

2023-2024 学年江苏省镇江市丹阳市高二（上）期初数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (5 分) 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{1-3i}{1-i}$ ，则 z 的虚部为 ()
 A. $-i$ B. -1 C. 0 D. 1
- (5 分) 已知直线 $l_1: x+ay-2=0$ 与直线 $l_2: ax+y-a-1=0$ 平行，则 a 的值为 ()
 A. -1 B. 1 C. ± 1 D. 0
- (5 分) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 P 为线段 D_1C_1 的中点，且 $AB=2\sqrt{3}$ ， $BC=1$ ， $AA_1=2$ ，则直线 BB_1 与 AP 所成的角为 ()
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- (5 分) 开普勒第一定律也称椭圆定律、轨道定律，其内容如下：每一行星沿各自的椭圆轨道环绕太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点上．将某行星 H 看作一个质点， H 绕太阳的运动轨迹近似成曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > n > 0)$ ，行星 P 在运动过程中距离太阳最近的距离称为近日点距离，距离太阳最远的距离称为远日点距离．若行星 C 的近日点距离和远日点距离之和是 20（距离单位：亿千米），近日点距离和远日点距离之积是 81，则 $m+n =$ ()
 A. 181 B. 97 C. 52 D. 19
- (5 分) 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$ ， $|\vec{b}|=1$ 且 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$ ，则 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- (5 分) 已知圆台的上下底面半径分别为 2 和 5，且母线与下底面所成角为正切值为 $\frac{4}{3}$ ，则该圆台的表面积为 ()
 A. 59π B. 61π C. 63π D. 64π
- (5 分) 已知角 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ ，且 $\cos(2\theta + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{5}$ ，则 $\tan(\theta - \frac{\pi}{6}) =$ ()
 A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ 或 -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$
- (5 分) 已知 A, B 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 上的两个动点，且 $|AB| = 2\sqrt{5}$ ，若 $P(0, -3)$ ，则点 P 到直线 AB 距离的最大值为 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 7

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（5 分）下列说法正确的是（ ）

- A. 直线 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 的倾斜角为 120°
- B. 经过点 $P(2, 1)$ ，且在 x, y 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$
- C. 直线 $l: mx+y+2-m=0$ 恒过定点 $(1, -2)$
- D. 已知直线 l 过点 $(2, 1)$ ，且与 x, y 轴正半轴交于点 A, B 两点，则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 4

（多选）10.（5 分）已知圆 $M: x^2+y^2-2x-3=0$ ，圆 $N: x^2+y^2-8x-8y+23=0$ ，则下列选项正确的是（ ）

- A. 直线 MN 的方程为 $4x-3y-4=0$
- B. 若 P, Q 两点分别是圆 M 和圆 N 上的动点，则 $|PQ|$ 的最大值为 5
- C. 圆 M 和圆 N 的一条公切线长为 $2\sqrt{5}$
- D. 经过点 M, N 两点的所有圆中面积最小的圆的面积为 $\frac{25}{4}\pi$

（多选）11.（5 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，则下列说法中正确的是（ ）

- A. 若 $\sin A > \sin B$ ，则 $A > B$
- B. 若 $\tan A + \tan B + \tan C > 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形
- C. 若 $a=10, b=8, A=60^\circ$ ，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有两个
- D. 对任意 $\triangle ABC$ ，都有 $\cos A + \cos B > 0$

（多选）12.（5 分）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别是 BC, CC_1 的中点，则（ ）

- A. AM 与 D_1N 为异面直线
- B. $AN \perp BD$
- C. 点 B_1 到平面 DMN 的距离为 2
- D. 若点 Q 为线段 A_1C 上的一动点，则 $\angle AQD_1$ 的范围 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

13.（5 分）椭圆 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 m 的值为 _____。

14.（5 分）已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，且 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影向量的坐标为 _____。

15.（5 分）在我国古代数学名著《九章算术》中，将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的棱柱称为“堑堵”。已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一“堑堵”，其中 $AB \perp AC$ ， $AB=2$ ， $AC=2\sqrt{3}$ ，且该“堑堵”外接球

的表面积为 64π ，则该“堑堵”的高为 _____.

16. (5 分) 若直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 $C: \sqrt{1-(y-2)^2}=x-1$ 有两个交点，则实数 k 的取值范围是 _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $A(3, 4)$ ， $B(-1, 3)$ ， $C(5, 0)$.

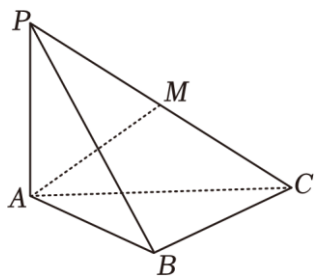
(1) 求 BC 边的高线的方程；

(2) 过点 A 的直线 l 与直线 BC 的交点为 D ，若 B 、 C 到 l 的距离之比为 $1:2$ ，求 D 的坐标.

18. (12 分) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle ABC=90^\circ$.

(1) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ；

(2) 若 M 是 PC 的中点，二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45° 且 $|AC|=\sqrt{2}|AB|$ ，求直线 AM 与平面 PBC 所成角的正切值.



19. (12 分) 在① $\sqrt{3}(a-c\cos B)=b\sin C$ ；② $b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$ ；③ $(2b-a)\cos C=c\cos A$ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，其中 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 且满足_____.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (12 分) 已知圆 C 经过 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 两点，且圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上.

(1) 求圆 C 的标准方程；

(2) 过点 $T(-1, 0)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 P, Q 两点，且 $\vec{CP} \cdot \vec{CQ} = -5$ ，求直线 l 的方程.

21. (12 分) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F 分别为棱 DD_1, BB_1 的中点，点 P 为底面对角线 AC 与 BD 的交点，点 Q 是棱 D_1C_1 上一动点.

(1) 证明：直线 $CF \parallel$ 平面 A_1EC_1 ；

(2) 证明： $CF \perp PQ$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若 $\triangle POQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, 求直线 l 的方程.

2023-2024 学年江苏省镇江市丹阳市高二（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{1-3i}{1-i}$ ，则 z 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. -1 C. 0 D. 1

【答案】B

【分析】根据已知条件，结合复数的四则运算，以及虚部的定义，即可求解.

【解答】解： $z = \frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = 2-i$,

则 z 的虚部为 -1 .

故选：B.

2. (5 分) 已知直线 $l_1: x+ay-2=0$ 与直线 $l_2: ax+y-a-1=0$ 平行，则 a 的值为 ()

- A. -1 B. 1 C. ± 1 D. 0

【答案】A

【分析】利用直线与直线平行的性质直接求解.

【解答】解： $\because$ 直线 $l_1: x+ay-2=0$ 与直线 $l_2: ax+y-a-1=0$ 平行，

$$\therefore \frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{-a-1}{-2},$$

解得 $a = -1$.

故选：A.

3. (5 分) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 P 为线段 D_1C_1 的中点，且 $AB=2\sqrt{3}$ ， $BC=1$ ， $AA_1=2$ ，则直线 BB_1 与 AP 所成的角为 ()

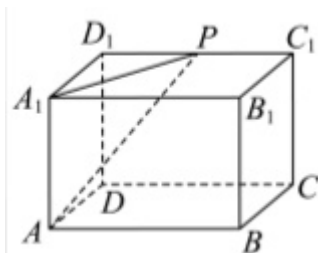
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】B

【分析】根据题意分析可知直线 BB_1 与 AP 所成的角即为 $\angle PAA_1$ (或其补角)，进而在 $Rt\triangle PAA_1$ 中，运算求解即可.

【解答】解：因为 $BB_1 \parallel AA_1$ ，则直线 BB_1 与 AP 所成的角即为直线 AA_1 与 AP 所成的角，

如图，连接 A_1P ，可知直线 BB_1 与 AP 所成的角即为 $\angle PAA_1$ (或其补角)，



则 $A_1P = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, 因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1P \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

则 $AA_1 \perp A_1P$, 在 $Rt\triangle PAA_1$, 可知 $\tan \angle PAA_1 = \frac{A_1P}{AA_1} = 1$, 且 $\angle PAA_1$ 为锐角,

则 $\angle PAA_1 = 45^\circ$, 所以直线 BB_1 与 AP 所成的角为 45° .

故选: B.

4. (5 分) 开普勒第一定律也称椭圆定律、轨道定律, 其内容如下: 每一行星沿各自的椭圆轨道环绕太阳, 而太阳则处在椭圆的一个焦点上. 将某行星 H 看作一个质点, H 绕太阳的运动轨迹近似成曲线

$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > n > 0)$, 行星 P 在运动过程中距离太阳最近的距离称为近日点距离, 距离太阳最远

的距离称为远日点距离. 若行星 C 的近日点距离和远日点距离之和是 20 (距离单位: 亿千米), 近日点距离和远日点距离之积是 81, 则 $m+n =$ ()

- A. 181 B. 97 C. 52 D. 19

【答案】A

【分析】结合椭圆的性质可得 $\begin{cases} \sqrt{m} - \sqrt{m-n} + \sqrt{m} + \sqrt{m-n} = 20 \\ (\sqrt{m} - \sqrt{m-n})(\sqrt{m} + \sqrt{m-n}) = 81 \end{cases}$, 然后求解即可.

【解答】解: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$,

由椭圆的性质可得: 椭圆上的点到焦点的距离为 $[a-c, a+c]$,

又椭圆方程为 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > n > 0)$,

则 $a = \sqrt{m}, b = \sqrt{n}, c = \sqrt{m-n}$,

由题意可得 $\begin{cases} \sqrt{m} - \sqrt{m-n} + \sqrt{m} + \sqrt{m-n} = 20 \\ (\sqrt{m} - \sqrt{m-n})(\sqrt{m} + \sqrt{m-n}) = 81 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} m=100 \\ n=81 \end{cases}$,

则 $m+n=181$.

故选：A.

5. (5分) 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ 且 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$, 则 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】直接利用向量的模和数量积运算求出结果.

【解答】解：由于 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$, 整理得 $\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=10$,

由于 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$,

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$,

所以 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{4}$.

故选：A.

6. (5分) 已知圆台的上下底面半径分别为 2 和 5, 且母线与下底面所成角的正切值为 $\frac{4}{3}$, 则该圆台的表面积为 ()

- A. 59π B. 61π C. 63π D. 64π

【答案】D

【分析】根据题意, 结合圆台的轴截面进行分析, 求出圆台的母线, 进而计算可得答案.

【解答】解：根据题意, 如图圆台中, $AD=4$, $BC=10$,

则 $BE=\frac{1}{2}(BC-AD)=3$,

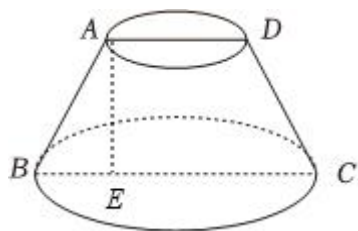
又由母线与下底面所成角的正切值为 $\frac{4}{3}$, 即 $\tan\angle ABE=\frac{4}{3}$,

则 $AE=4$,

故 $AB=\sqrt{9+16}=5$,

该圆台的表面积 $S=4\pi+25\pi+\pi(2+5)\times 5=64\pi$.

故选：D.



7. (5分) 已知角 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos(2\theta + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan(\theta - \frac{\pi}{6}) =$ ()
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ 或 -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】利用二倍角公式可得 $\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 再利用诱导公式, 同角关系式即可求值.

【解答】解: $\cos(2\theta + \frac{2\pi}{3}) = 2\cos^2(\theta + \frac{\pi}{3}) - 1 = -\frac{3}{5}$, $\therefore \cos^2(\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{5}$,
 $\because \theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \theta + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$, $\therefore \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\because (\theta + \frac{\pi}{3}) + (\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\because \theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \frac{\pi}{6} - \theta \in (-\frac{\pi}{3}, 0)$, $\therefore \cos(\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\therefore \tan(\theta - \frac{\pi}{6}) = -\tan(\frac{\pi}{6} - \theta) = -\frac{\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{6} - \theta)} = \frac{1}{2}$.

故选: C.

8. (5分) 已知 A, B 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 上的两个动点, 且 $|AB| = 2\sqrt{5}$, 若 $P(0, -3)$, 则点 P 到直线 AB 距离的最大值为 ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 7

【答案】D

【分析】判断 P 与圆的位置关系, 求解 $|CP|$, 圆心 C 到 AB 的距离, 然后求解点 P 到直线 AB 距离的最大值.

【解答】解: 圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$, 圆的圆心 $C(3, 1)$, 半径为 3, $P(0, -3)$,
 $|CP| = \sqrt{3^2 + (1+3)^2} = 5$, 所以 P 在圆外, A, B 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 上的两个动点, 且
 $|AB| = 2\sqrt{5}$, 圆心 C 到 AB 的距离: $\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$,

所以, 点 P 到直线 AB 距离的最大值为: $5+2=7$.

故选: D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（5 分）下列说法正确的是（ ）

- A. 直线 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 的倾斜角为 120°
- B. 经过点 $P(2, 1)$ ，且在 x, y 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$
- C. 直线 $l: mx+y+2-m=0$ 恒过定点 $(1, -2)$
- D. 已知直线 l 过点 $(2, 1)$ ，且与 x, y 轴正半轴交于点 A, B 两点，则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 4

【答案】ACD

【分析】直接利用直线的倾斜角和斜率，恒过定点的直线系，截距式直线方程，基本不等式判断 A、B、C、D 的结论.

【解答】解：对于 A：直线 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 的斜率 $k=\tan\theta=-\sqrt{3}$ ，由于 $\theta\in[0, \pi)$ ，故直线的的倾斜角为 120° ，故 A 正确；

对于 B：经过点 $P(2, 1)$ ，且在 x, y 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$ 和 $y=\frac{1}{2}x$ ，故 B 错误；

对于 C：直线 $l: mx+y+2-m=0$ ，整理得 $m(x-1)+y+2=0$ ，故该直线恒过定点 $(1, -2)$ ，故 C 正确；

对于 D：已知直线 l 过点 $(2, 1)$ ，且与 x, y 轴正半轴交于点 A, B 两点，设直线的方程为 $y-1=k(x-2)$ ，($k<0$)，故 $A(\frac{2k-1}{k}, 0)$ ， $B(0, 1-2k)$ ，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\times(-4k-\frac{1}{k}+4)\geq\frac{1}{2}\times[2\sqrt{4}+4]=4$ ，故 D 正确.

故选：ACD.

（多选）10.（5 分）已知圆 $M: x^2+y^2-2x-3=0$ ，圆 $N: x^2+y^2-8x-8y+23=0$ ，则下列选项正确的是（ ）

- A. 直线 MN 的方程为 $4x-3y-4=0$
- B. 若 P, Q 两点分别是圆 M 和圆 N 上的动点，则 $|PQ|$ 的最大值为 5
- C. 圆 M 和圆 N 的一条公切线长为 $2\sqrt{5}$
- D. 经过点 M, N 两点的所有圆中面积最小的圆的面积为 $\frac{25}{4}\pi$

【答案】AD

【分析】根据题意求圆 M, N 的圆心与半径，对于 A：根据两点式方程运算求解；对于 B：根据圆的性质分析求解；对于 C：根据切线的性质运算求解；对于 D：当 MN 为圆的直径时，经过点 M, N 两点的所有圆中面积最小，运算求解即可.

【解答】解：由题意可知：圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $M(1, 0)$ ，半径 $r_1 = 2$ ，

圆 $N: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ 的圆心 $N(4, 4)$ ，半径 $r_2 = 3$ ，

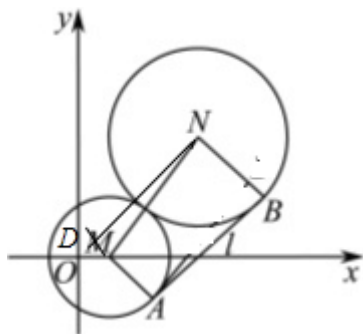
对于选项 A：直线 MN 的方程为 $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{4-1}$ ，即 $4x - 3y - 4 = 0$ ，故 A 正确；

对于选项 B：因为 $|MN| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$ ，

所以 $|PQ|$ 的最大值为 $|MN| + r_1 + r_2 = 10$ ，故 B 错误；

对于选项 C：因为 $|MN| = r_1 + r_2$ ，可知圆 M 与圆 N 外切，

如图，直线 l 为两圆的公切线， A, B 为切点坐标，过 N 作 $ND \perp AM$ ，垂足为 D ，



则 $ADNM$ 为矩形，可得 $|MN| = 5$ ， $|DA| = r_2 - r_1 = 1$ ，

所以公切线长为 $|AB| = \sqrt{|AN|^2 - |AD|^2} = 2\sqrt{6}$ ，故 C 错误；

对于选项 D：当 MN 为圆的直径时，经过点 M, N 两点的所有圆中面积最小，

此时圆的面积为 $\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$ ，故 D 正确。

故选：AD。

(多选) 11. (5 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，则下列说法中正确的是 ()

A. 若 $\sin A > \sin B$ ，则 $A > B$

B. 若 $\tan A + \tan B + \tan C > 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

C. 若 $a = 10, b = 8, A = 60^\circ$ ，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有两个

D. 对任意 $\triangle ABC$ ，都有 $\cos A + \cos B > 0$

【答案】 ABD

【分析】对于 A，由正弦定理及三角形中大角对大边即可判断；

对于 B，通过内角和为 π 化简角 C ，再利用两角和的正切公式化简即可得到 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C > 0$ ，即可判断；

对于 C，由题意利用正弦定理得 $\sin B = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ ，结合大边对大角可求 B 为锐角，即可判断得解；

对于 D，分类讨论，利用余弦函数的性质即可判断。

【解答】解：对于 A， $\because \sin A > \sin B$ ，

$\therefore$ 由正弦定理知 $a > b$ ，

又 $\because$ 在三角形中大角对大边，

$\therefore A > B$ ，故 A 正确；

对于 B，由 $\tan C = \tan[\pi - (A+B)] = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ，

化为 $\tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1)$ ，

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan C (\tan A \tan B - 1) + \tan C = \tan A \tan B \tan C > 0$ ，

又 $\because$ 最多只有一个角为钝角，

$\therefore \tan A > 0$ ， $\tan B > 0$ ， $\tan C > 0$ ，即三个角都为锐角，

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形，故 B 正确；

对于 C， $\because a = 10$ ， $b = 8$ ， $A = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 由正弦定理得： $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ ，

又 $a > b$ ，

$\therefore B$ 为锐角，

$\therefore B$ 的度数只有一解，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有一个，故 C 错误；

对于 D：A，B 都是锐角或一锐角一直角时显然成立，

当一钝角和一锐角时，设 A 为钝角，B 为锐角，

则 $0 < B < \pi - A < \frac{\pi}{2}$ ，

由 $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，

故 $\cos B > \cos(\pi - A) = -\cos A$ ，

即 $\cos A + \cos B > 0$ ，

综上所述，在 $\triangle ABC$ 中，恒有 $\cos A + \cos B > 0$ ，故 D 正确。

故选：ABD。

（多选）12.（5 分）在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 BC， CC_1 的中点，则（ ）

A. AM 与 D_1N 为异面直线

B. $AN \perp BD$

C. 点 B_1 到平面 DMN 的距离为 2

D. 若点 Q 为线段 A_1C 上的一动点, 则 $\angle AQD_1$ 的范围 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

【答案】BC

【分析】连接 AM , D_1N , DC , 并延长, 由三角形的中位线定理可得它们交于一点, 设为 E , 由此判断 A ; 以 D 为坐标原点, 以 DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 利用向量法判断 BCD .

【解答】解: 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M , N 分别是 BC , CC_1 的中点, 连接 AM , D_1N , DC , 并延长, 由三角形的中位线定理可得它们交于一点, 设为 E , 故 AM , D_1N 为相交直线, 故 A 错误;

以 D 为坐标原点, 以 DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $N(0, 2, 1)$, $M(1, 2, 0)$,

$B_1(2, 2, 2)$, $A_1(2, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$, $D_1(0, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{AN} = (-2, 2, 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 - 4 + 0 = 0$,

$\therefore \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BD}$, 故 B 正确;

$\overrightarrow{DM} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{DN} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{DB_1} = (2, 2, 2)$,

设平面 DMN 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DN} = 2y + z = 0 \end{cases}$, 取 $x = 2$, 得 $\vec{n} = (2, -1, 2)$,

则 B_1 到平面 DMN 的距离为 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|4 - 2 + 4|}{3} = 2$, 故 C 正确;

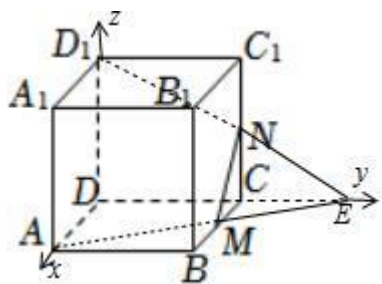
设 $\overrightarrow{A_1Q} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $Q(m, n, t)$, 则 $(m - 2, n, t - 2) = \lambda(-2, 2, -2)$,

解得 $Q(-2\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda)$, 则 $\overrightarrow{QA} = (2 + 2\lambda, -2\lambda, 2\lambda - 2)$, $\overrightarrow{QD_1} = (2\lambda, -2\lambda, 2\lambda)$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QD_1}}{|\overrightarrow{QA}| \cdot |\overrightarrow{QD_1}|} = \frac{4\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda}{\sqrt{12\lambda^2 + 8} \cdot \sqrt{12\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3\lambda^2}}} \leq \frac{\sqrt{15}}{5}$,

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD_1} \rangle \geq 0$, $\therefore \angle AQD_1$ 不为钝角, 故 D 错误.

故选：BC.



三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. (5 分) 椭圆 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 m 的值为 4 或 $\frac{1}{4}$ ．

【答案】4 或 $\frac{1}{4}$ ．

【分析】由椭圆的性质，结合椭圆离心率的求法求解即可．

【解答】解：椭圆 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

当椭圆的焦点在 x 轴上时，有 $\begin{cases} m > 1 \\ \frac{m-1}{m} = \frac{3}{4} \end{cases}$ ，

即 $m = 4$ ；

当椭圆的焦点在 y 轴上时，有 $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ \frac{1-m}{1} = \frac{3}{4} \end{cases}$ ，

即 $m = \frac{1}{4}$ ，

则 m 的值为 4 或 $\frac{1}{4}$ ．

故答案为：4 或 $\frac{1}{4}$ ．

14. (5 分) 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，且 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影向量的坐标为 (-1, $-\sqrt{3}$)．

【答案】(-1, $-\sqrt{3}$)．

【分析】根据已知条件及投影向量的定义直接计算即可．

【解答】解：由 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ，可得 $|\vec{a}| = \sqrt{1+3} = 2$ ，

由投影向量定义可知：

$$\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 上的投影向量为 } |\vec{b}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(1, \sqrt{3})}{2} = (-1, -\sqrt{3}).$$

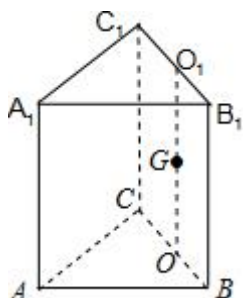
故答案为： $(-1, -\sqrt{3})$.

15. (5分) 在我国古代数学名著《九章算术》中，将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的棱柱称为“堑堵”. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为一“堑堵”，其中 $AB \perp AC$, $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$, 且该“堑堵”外接球的表面积为 64π , 则该“堑堵”的高为 $4\sqrt{3}$.

【答案】 $4\sqrt{3}$.

【分析】 由题意画出图形，找出三棱柱外接球的球心，结合外接球的表面积求解半径，再由三棱柱外接球的半径与棱长的关系列式求解.

【解答】 解：如图，



由题意可知，三棱柱是底面为直角三角形的直三棱柱，

则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的球心 G 在三棱柱上下底面外心连线的中点上，

设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为 h ，外接球的半径为 R ，

$$\text{可得} \begin{cases} 4\pi R^2 = 64\pi \\ 4R^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 + h^2 \end{cases}, \text{解得 } h = 4\sqrt{3}.$$

故答案为： $4\sqrt{3}$.

16. (5分) 若直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 $C: \sqrt{1-(y-2)^2}=x-1$ 有两个交点，则实数 k 的取值范围是 $(\frac{4}{3}, 2]$.

【答案】 见试题解答内容

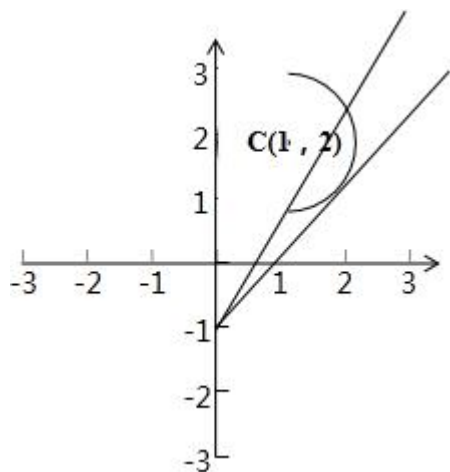
【分析】 根据直线所过的定点，结合直线与圆的切线性质，利用数形结合思想进行求解即可.

【解答】 解：直线 $l: y=kx-1$ 恒过定点 $(0, -1)$,

$$\text{由曲线 } C: \sqrt{1-(y-2)^2}=x-1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1, (x \geq 1).$$

所以曲线 C 表示以点 $(1, 2)$ 为圆心，半径为 1，

且位于直线 $x=1$ 右侧的半圆（包括点 $(1, 2)$, $(1, 0)$ ），如图所示：



当直线 l 经过点 $(1, 1)$ 时, l 与曲线 C 有两个不同的交点, 此时 $k=2$;

当 l 与半圆相切时, 由 $\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 得 $k=\frac{4}{3}$,

分析可知当 $\frac{4}{3} < k \leq 2$ 时, l 与曲线 C 有两个不同的交点.

故答案为: $(\frac{4}{3}, 2]$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $A(3, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(5, 0)$.

(1) 求 BC 边的高线的方程;

(2) 过点 A 的直线 l 与直线 BC 的交点为 D , 若 B 、 C 到 l 的距离之比为 1: 2, 求 D 的坐标.

【答案】(1) 方程为 $2x - y - 2 = 0$;

(2) D 的坐标为 $(-7, 6)$ 或 $(1, 2)$.

【分析】(1) 由题意, 先求出直线 BC 的斜率, 根据垂直关系可得高线所在的直线斜率, 进而可得结果;

(2) 先求出直线 BC 的方程, 分类讨论直线 l 的斜率是否存在, 利用点到直线的距离公式可得直线 l 的方程, 进而可求交点坐标.

【解答】解: (1) 已知 $B(-1, 3)$, $C(5, 0)$,

所以直线 BC 的斜率 $k_{BC} = \frac{3-0}{-1-5} = -\frac{1}{2}$,

则 BC 边的高线所在的直线斜率为 $k=2$,

所以 BC 边的高线所在的直线方程为 $y - 4 = 2(x - 3)$,

即 $2x - y - 2 = 0$;

(2) 由(1)知直线 BC 的方程为 $y-0=-\frac{1}{2}(x-5)$,

即 $x+2y-5=0$,

若直线 l 的斜率不存在,

此时直线 l 的方程为 $x=3$,

则点 B 、 C 到 l 的距离分别为 4, 2, 不符合题意;

若直线 l 的斜率存在,

不妨设直线 l 的方程为 $y-4=k(x-3)$,

即 $kx-y+4-3k=0$,

因为 B 、 C 到 l 的距离之比为 1: 2,

$$\text{所以 } \frac{2|-k-3+4-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|5k+4-3k|}{\sqrt{k^2+1}},$$

解得 $k=-\frac{1}{5}$ 或 $k=1$,

当 $k=-\frac{1}{5}$ 是, 直线 l 的方程 $x+5y-23=0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x+5y-23=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases},$$

解得 $x=-7$, $y=6$,

即 $D(-7, 6)$;

当 $k=1$ 时, 直线 l 的方程为 $x-y+1=0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases},$$

解得 $x=1$, $y=2$,

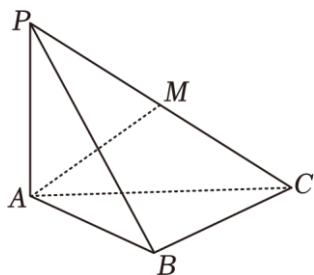
即 $D(1, 2)$,

综上, 点 D 的坐标为 $(-7, 6)$ 或 $(1, 2)$.

18. (12分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle ABC=90^\circ$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若 M 是 PC 的中点, 二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45° 且 $|AC|=\sqrt{2}|AB|$, 求直线 AM 与平面 PBC 所成角的正切值.



【答案】（1）证明见解答；

（2） $\sqrt{2}$.

【分析】（1）根据线线垂直得 $BC \perp$ 平面 PAB ，由面面垂直的判定定理可证得结论；

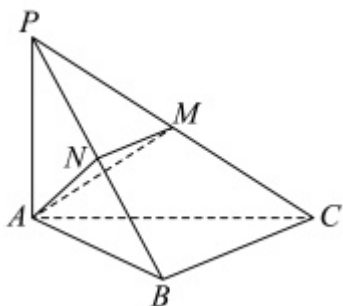
（2）由题意求出 AB, BC 的长，过点 A 作 $AN \perp PB$ 于 N ，连接 MN ，则 $\angle AMN$ 为直线 AM 与平面 PBC 所成的角，然后在 $\text{Rt}\triangle ANM$ 中可求得结果。

【解答】解：（1）证明：因为 $PA \perp$ 底面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，所以 $PA \perp BC$ ，
因为 $\angle ABC = 90^\circ$ ，所以 $AB \perp BC$ ，因为 $PA \cap AB = A$ ， $PA, AB \subset$ 平面 PAB ，
所以 $BC \perp$ 平面 PAB ，因为 $BC \subset$ 平面 PBC ，所以平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ；

（2）由（1）可知 $BC \perp$ 平面 PAB ， $PB \subset$ 平面 PAB ，所以 $BC \perp PB$ ，因为 $AB \perp BC$ ，
所以 $\angle ABP$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，所以 $\angle ABP = 45^\circ$ ，

令 $AB = 2$ ，则 $PA = 2$ ， $|AC| = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$ ，

如图，过点 A 作 $AN \perp PB$ 于 N ，因为平面 $PBC \perp$ 平面 PAB ，平面 $PBC \cap$ 平面 $PAB = PB$ ，
 $AN \subset$ 平面 PAB ，则 $AN \perp$ 平面 PBC ，



M 为 PC 的中点，连接 MN ，则 $\angle AMN$ 为直线 AM 与平面 PBC 所成的角，

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中， $AN = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ；

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中， $PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$ ，

M 是 PC 的中点，则 $AM = \frac{1}{2}PC = \sqrt{3}$ ，

因为 $AN \perp$ 平面 PBC ， $MN \subset$ 平面 PBC ，所以 $AN \perp MN$ 。在 $\text{Rt}\triangle ANM$ 中， $MN = 1$ ，

$$\tan \angle AMN = \frac{AN}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

则直线 AM 与平面 PBC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$.

19. (12 分) 在① $\sqrt{3}(a - c \cos B) = b \sin C$; ② $b + b \cos C = \sqrt{3} c \sin B$; ③ $(2b - a) \cos C = c \cos A$ 三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解决该问题.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 且满足_____.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$;

(2) $8 + 2\sqrt{7}$.

【分析】 (1) 若选①, 利用正弦定理, 两角和的正弦公式以及同角三角函数基本关系式可求 $\tan C = \sqrt{3}$, 结合 $C \in (0, \pi)$, 可求 C 的大小;

若选②, 由正弦定理, 两角差的正弦公式化简已知等式可得 $\sin(C - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 可求 $C - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 进而可求 C 的大小;

若选③, 由正弦定理, 两角和的正弦公式化简已知等式可得 $\cos C = \frac{1}{2}$, 结合 $C \in (0, \pi)$, 可求 C 的大小.

(2) 由题意利用同角三角函数基本关系式可求 $\sin B, \cos B$ 的值, 利用两角和的正弦公式可求 $\sin A$ 的值, 进而利用三角形的面积公式可求得 $ab = 12, ac = 12\sqrt{7}, bc = 4\sqrt{7}$, 联立方程可求 a, b, c 的值, 即可求解 $\triangle ABC$ 的周长.

【解答】 解: (1) 若选①, $\because \sqrt{3}(a - c \cos B) = b \sin C$,

$$\therefore \sqrt{3}(\sin A - \sin C \cos B) = \sin B \sin C,$$

$$\therefore \sqrt{3}[\sin(B + C) - \sin C \cos B] = \sin B \sin C,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B \cos C = \sin B \sin C,$$

$$\therefore \tan C = \sqrt{3},$$

$$\because C \in (0, \pi),$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3};$$

若选②, $\because b + b \cos C = \sqrt{3} c \sin B$,

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } \sin B + \sin B \cos C = \sqrt{3} \sin C \sin B,$$

$$\because B \in (0, \pi), \sin B \neq 0,$$

$$\therefore 1 + \cos C = \sqrt{3} \sin C, \text{ 可得 } \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\because C \in (0, \pi), C - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\therefore C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 可得 } C = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{若选③, } \because (2b - a) \cos C = c \cos A, \text{ 可得 } 2b \cos C = c \cos A + a \cos C,$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } 2 \sin B \cos C = \sin C \cos A + \sin A \cos C = \sin(A + C) = \sin B,$$

$$\text{又 } \because B \in (0, \pi), \sin B \neq 0,$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \because C \in (0, \pi),$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \because C = \frac{\pi}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sin B}{\cos B} > 0,$$

$$\therefore \sin^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{\sqrt{3} \cos B}{5}\right)^2 + \cos^2 B = 1, \text{ 解得 } \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos B = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\therefore \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sqrt{21}}{14} \times \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab, \text{ 解得 } ab = 12, \text{ ①}$$

$$\triangle ABC \text{ 的面积为 } 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{21}}{28} ac, \text{ 解得 } ac = 12\sqrt{7}, \text{ ②}$$

$$\triangle ABC \text{ 的面积为 } 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{3\sqrt{21}}{28} bc, \text{ 解得 } bc = 4\sqrt{7}, \text{ ③}$$

$$\therefore \text{由①②③可得 } a = 6, b = 2, c = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长 } a + b + c = 8 + 2\sqrt{7}.$$

20. (12分) 已知圆 C 经过 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 两点，且圆心在直线 $2x - y - 3 = 0$ 上.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $T(-1, 0)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 P 、 Q 两点，且 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = -5$ ，求直线 l 的方程.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 求出线段 AB 的垂直平分线的方程，与直线 $2x - y - 3 = 0$ 的方程，可得出圆心 C 的坐标，求出圆 C 的半径，即可得出圆 C 的标准方程;

(2) 说明直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程，通过向量的数量积，转化求解圆心到直线 l 的距离，求出 k 的值，即可求解直线 l 的方程.

【解答】解：（1）圆 C 经过 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 两点，线段 AB 的中点为 $(1, 2)$ ，直线 AB 的斜率为 -2 ，

所以线段 AB 的中垂线方程为 $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ ，即 $x - 2y + 3 = 0$ ，

圆心 C 为 AB 的中垂线与直线 $x + 2y - 9 = 0$ 的交点，

联立 $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ ，解得 $x = y = 3$ ，故圆心为 $C(3, 3)$ ，

圆 C 的半径 $r = \sqrt{(3-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$ ，

所以圆 C 的标准方程为 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ；

（2）过点 $T(-1, 0)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 P 、 Q 两点，且 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = -5$ ，

可得 $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cos \angle PCQ = -5$ ，可得 $\angle PCQ = 120^\circ$ ，所以 C 到 PQ 的距离为： $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ，

可知直线 l 的斜率存在，设为 k ，直线 l ： $y = k(x + 1)$ ，即 $kx - y + k = 0$ ，

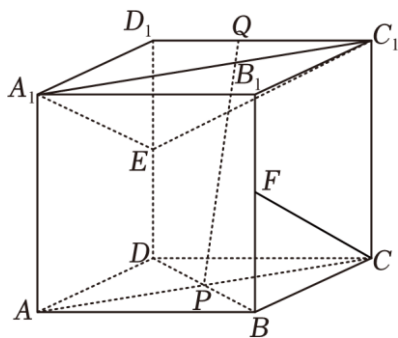
可得 $\frac{|3k - 3 + k|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，解得 $k = \frac{1}{3}$ 或 $k = \frac{13}{9}$ ，

直线 l 的方程： $x - 3y + 1 = 0$ 或 $13x - 9y + 13 = 0$ 。

21.（12 分）如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 、 F 分别为棱 DD_1 、 BB_1 的中点，点 P 为底面对角线 AC 与 BD 的交点，点 Q 是棱 D_1C_1 上一动点。

（1）证明：直线 $CF \parallel$ 平面 A_1EC_1 ；

（2）证明： $CF \perp PQ$ 。



【答案】（1）证明过程见详解；

（2）证明过程见详解。

【分析】（1）取 CC_1 中点 M ， BC 的中点 N ，由题意可证得四边形 A_1B_1ME 为平行四边形，可得 $A_1E \parallel B_1M$ ，再证得 $A_1E \parallel CF$ ，可证得线面平行；

（2）通过证明 $CF \perp$ 平面 PD_1C_1 ，再证得线线的垂直。

【解答】证明：（1）取 CC_1 中点 M ， BC 的中点 N ，连接 B_1M ， EM ， PN ，

因为 E 为 DD_1 的中点，所以 $A_1B_1 \parallel EM$ ，且 $A_1B_1 = EM$ ，可得四边形 A_1B_1ME 为平行四边形，
所以 $A_1E \parallel B_1M$ ，

在矩形 BCC_1B_1 中， F, M 为中点， $B_1F \parallel CM$ ，且 $B_1F = CM$ ，

即四边形 B_1FCM 为平行四边形，

所以 $B_1M \parallel CF$ ，所以 $CF \parallel A_1E$ ，

又因为 $A_1E \subset$ 平面 A_1EC_1 ， $CF \not\subset$ 平面 A_1EC_1 ，

所以 $CF \parallel$ 平面 A_1EC_1 ；

(2) P 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点， N 为 BC 的中点，所以 PN 为 $\triangle BCD$ 的中位线，
所以 $PN \parallel CD$ ，

而 $CD \perp$ 面 BCB_1C_1 ， $CF \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

所以 $CD \perp CF$ ，

所以 $PN \perp CF$ ，

且 $\tan \angle BCF = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle C_1NC = \frac{CC_1}{CN} = 2$ ，

所以 $\tan \angle BCF \cdot \tan \angle C_1NC = 1$ ，

即 $\angle BCF + \angle C_1NC = \frac{\pi}{2}$ ，即 $C_1N \perp CF$ ，

又 $PN \cap C_1N = N$ ，所以 $CF \perp$ 平面 PNC_1 ，

又 $PC_1 \subset$ 平面 PNC_1 ，所以 $CF \perp PC_1$ ，

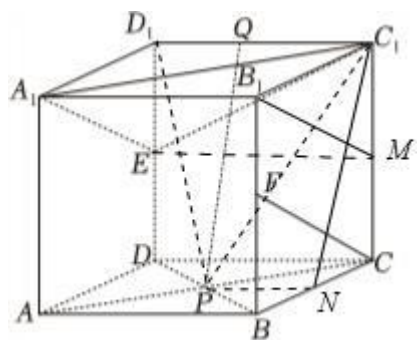
因为 $D_1C_1 \parallel CD$ ，所以 $D_1C_1 \perp CF$ ，

因为 $D_1C_1 \cap C_1P = C_1$ ，

所以 $CF \perp$ 平面 D_1PC_1 ，

而 $Q \in C_1D_1$ ，即 $PQ \subset$ 面 D_1PC_1 ，

所以 $CF \perp PQ$ 。



22. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 交椭圆 E

于 P, Q 两点 (点 P 位于第三象限), 点 P 关于原点 O 的对称点为 R . 当 $PF_2 \perp RF_2$ 时, $\triangle PF_2R$ 的面积为 1, 且 $|PF_2| + |RF_2| = 4$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若 $\triangle POQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) 方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 直线 l 的方程为 $x = 2y + \sqrt{3}$ 或 $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}y + \sqrt{3}$.

【分析】(1) 由题意, 连接 PF_1, RF_1 , 根据对称性得到 $|PF_2| + |RF_2| = |RF_1| + |RF_2| = 2a$, 解得 $a = 2$, 结合三角形面积以及矩形的性质即可求出 c 的值, 进而可得椭圆 E 的方程;

(2) 先将直线 l 的方程设出, 将直线 l 的方程与椭圆方程联立, 结合韦达定理以及三角形面积公式进行求解即可.

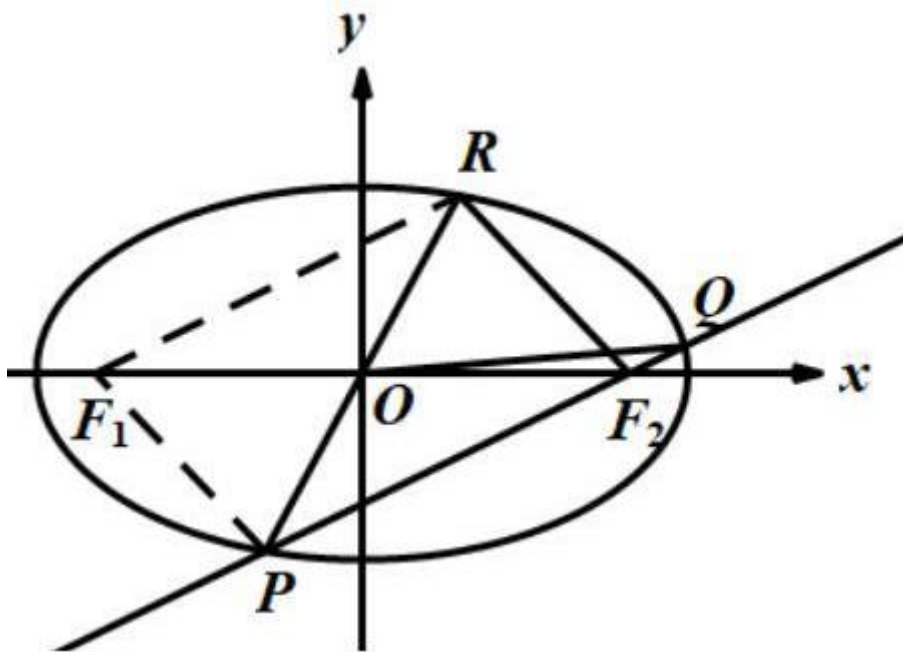
【解答】解: (1) 连接 PF_1, RF_1 ,

因为点 P 关于原点对称点为 R ,

所以四边形 PF_1RF_2 为平行四边形,

又 $PF_2 \perp RF_2$,

所以四边形 PF_1RF_2 为矩形,



此时 $|PF_2| + |RF_2| = |RF_1| + |RF_2| = 2a = 4$,

解得 $a=2$,

因为 $\triangle PF_2R$ 的面积为 1,

$$\text{所以 } S_{\triangle PF_2R} = \frac{1}{2} \times |PF_2| \times |RF_2| = 1, \quad ①$$

$$\text{又 } |PF_2| + |RF_2| = 4, \quad ②$$

联立①②, 解得 $c = \sqrt{3}$,

$$\text{此时 } b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

则椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 由 (1) 知 $F_2(\sqrt{3}, 0)$,

不妨设 $P(x_1, y_1)$ ($x_1 < 0, y_1 < 0$), $Q(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $x = ty + \sqrt{3}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = ty + \sqrt{3} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } (t^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}ty - 1 = 0,$$

$$\text{此时 } \Delta = 16t^2 + 16 > 0,$$

$$\text{由韦达定理得 } y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{4+t^2}, \quad y_1 y_2 = -\frac{1}{t^2+4},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle POQ} &= \frac{1}{2} |OF_2| \times |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 4} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } \sqrt{t^2 + 1} = m,$$

$$\text{此时 } \sqrt{5}m^2 - 8m + 3\sqrt{5} = 0,$$

$$\text{解得 } m = \sqrt{5} \text{ 或 } m = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } t = \pm 2 \text{ 或 } t = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

又点 P 在第三象限,

$$\text{此时直线 } l \text{ 的方程为 } x = 2y + \sqrt{3} \text{ 或 } x = \frac{2\sqrt{5}}{5}y + \sqrt{3},$$

$$\text{即 } x = 2y + \sqrt{3} \text{ 或 } x = \frac{2\sqrt{5}}{5}y + \sqrt{3}.$$