# 2023-2024 学年江苏省无锡市江阴市普通高中高三（上）期初数学试卷

**一、单项选择题：（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

1．（5 分）已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant1\}$，则$\complement_UA=$（　　）

A．$(-2，1]$　　B．$(-3，-2)\cup[1，3)$

C．$[-2，1)$　　D．$(-3，-2]\cup(1，3)$

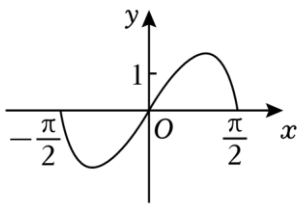
2．（5 分）sin210°cos120°的值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

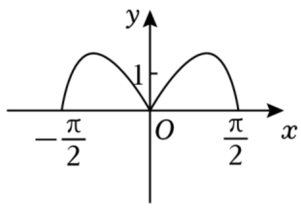
3．（5 分）函数 $f(x)=ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是（　　）

A．$(-\infty，-2)$　　B．$(-\infty，1)$　　C．$(1，+\infty)$　　D．$(4，+\infty)$

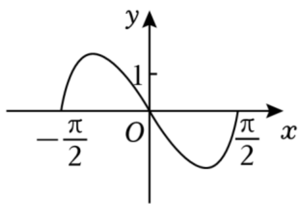
4．（5 分）函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$的图象大致为（　　）



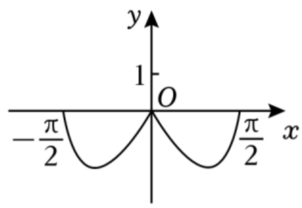

A．




B．




C．




D．

5．（5 分）若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{3-x}{x}-\frac{1}{2x^2}(a\neq0)$既有极大值也有极小值，则 $a\in$（　　）

A．$(0，\frac{9}{4})$　　B．$(0，3)$

C．$(0，\frac{9}{4})\cup(9，+\infty)$　　D．$(0，3)\cup(9，+\infty)$

6．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n，0\leqslant a_n<\frac{1}{2}\\2a_n-1，\frac{1}{2}\leqslant a_n<1\end{cases}$．若 $a_1=\frac{3}{5}$，则 $a_{2023}=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

7．（5 分）在△$ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$，若 $a=2$，则△$ABC$ 面积的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{3}$

8．（5 分）已知 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导数，且 $f(-x)=f(x)$，当 $x\geqslant0$ 时，$f'(x)>3x$，则不等式 $f(x)$

$-f(x-1)<3x-\frac{3}{2}$的解集是（　　）

A．$(-\frac{1}{2},\ 0)$　　B．$(-\infty,\ -\frac{1}{2})$　　C．$(\frac{1}{2},\ +\infty)$　　D．$(-\infty,\ \frac{1}{2})$

**二、多项选择题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

（多选）9．（5 分）下列结论正确的是（　　）

A．命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$“的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\leqslant 0$“

B．若样本数据 $x_1$，$x_2$，　，$x_{10}$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为 8

C．$C_7^1+C_7^2+C_7^3+\cdots+C_7^7=128$

D．若 $(1-\sqrt{2})^5=a+b\sqrt{2}$（$a$，$b$ 为有理数），则 $b=-29$

（多选）10．（5 分）在△$ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，若 $b=2\sqrt{3}$，$c=3$，$A+3C=\pi$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$a=1$　　D．$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$

（多选）11．（5 分）将函数$y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$的图象先向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将横坐标缩短为原来的$\sqrt{3}$倍（纵坐标不变），得到函数 $y=f(x)$ 的图象（$x\in\mathbf{R}$），下列结论错误的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的图象最小正周期为 π

B．函数 $f(x)$ 的图象关于点$(\frac{5\pi}{12},\ 0)$对称

C．函数 $f(x)$ 的图象在$[0,\ \frac{\pi}{2}]$上单调递增

D．函数 $f(x)$ 的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称

（多选）12．（5 分）已知曲线 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2+ax-1$ 上存在两条斜率为 3 的不同切线，且切点的横坐标都大于零，则实数 $a$ 可能的取值（　　）

A．$\frac{19}{6}$　　B．3　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{9}{2}$

**三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

13．（5 分）在△$ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle C=105°$，$BC=6\sqrt{2}$，则 $AC$ 的长度为 ______．

14．（5 分）已知非负数 $x$，$y$ 满足 $x+y=1$，则$\frac{1}{x+1}+\frac{9}{y+2}$的最小值是 ______．

15．（5 分）已知$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，求$\cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})=$__________．

16.（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & x>0\\ 2^{|x|}, & x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $y=|2f(x)-a|-1$ 存在 5 个零点，则整数 $a$ 的值为 ____________.

**四、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

17.（10 分）已知集合 $A=\{x|x^2-x-12\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2x+1-m^2\leqslant 0，m>0\}$.

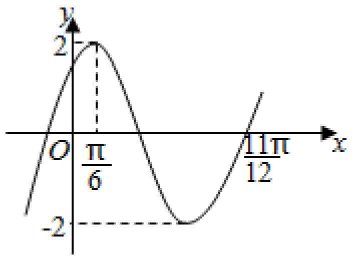
（1）若 $m=2$，求 $A\cup B$；

（2）若 $A\subseteq B$，求实数 $m$ 的取值范围.

18.（12 分）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A$，$\omega$，$\varphi$ 为常数，$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象如图所示，

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(-\frac{5\pi}{3})$ 的值.




19.（12 分）在△$ABC$ 中，$A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，满足条件 $a^2+b^2-c^2=2$，$\tan C=\frac{1}{2}$.

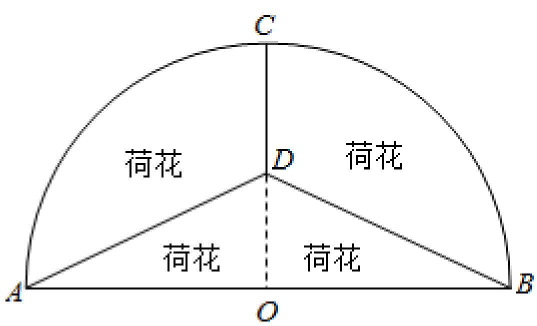
（1）求△$ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$；

（2）若 $c=2$，求 $\sin A\sin B$ 的值.

20.（12 分）学校外的湿地公园有一形状为半圆形的荷花池．如图所示，为了提升荷花池的观赏性，现计划在池塘的中轴线 $OC$ 上设计一个观景台 $D$（点 $D$ 与点 $O$，$C$ 不重合），其中 $AD$，$BD$，$CD$ 段建设架空木栈道，已知 $AB=100m$，设建设的架空木栈道的总长为 $ym$.

（1）设∠$DAO=\theta$（$rad$），将 $y$ 表示成 $\theta$ 的函数关系式，并写出 $\theta$ 的取值范围；

（2）试确定观景台的位置，使三段木栈道的总长度最短.



21．（12 分）王先生准备每天从骑自行车和开车两种出行方式中随机选择一种出行．从即日起出行方式选择规则自定如下：第一天选择骑自行车出行，随后每天用“一次性抛掷 4 枚均匀硬币”的方法确定出行方式，若得到的正面朝上的枚数小于 3，则该天出行方式与前一天相同，否则选择另一种出行方式．设 $p_n(n\in N^*)$表示事件“第 $n$ 天王先生选择骑自行车出行”的概率．

（1）用 $p_{n-1}$ 表示 $p_n$（$n\geqslant 2$）；

（2）请问王先生骑自行车的概率和开车的概率哪个更大？并说明理由．

22．（12 分）已知函数 $f$（$x$）$=lnx+lna+$（$a-1$）$x+2$（$a>0$）．

（1）讨论 $f$（$x$）的单调性；

（2）若 $e^{x-2}\geqslant f$（$x$），求实数 $a$ 的取值范围．

# 2023-2024学年江苏省无锡市江阴市普通高中高三（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

**一、单项选择题：（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

1.（5分）已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A.（﹣2，1]　　B.（﹣3，﹣2）∪[1，3）

C.[﹣2，1)　　D.（﹣3，﹣2]∪（1，3）

【答案】$D$

【分析】由补集的定义直接求解即可.

【解答】解：因为全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，

所以$\complement_U A=\{x|-3<x\leqslant -2$ 或 $1<x<3\}=$（﹣3，﹣2]∪（1，3）.

故选：$D$.

2.（5分）sin210°cos120°的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】$A$

【分析】利用诱导公式把要求的式子化为﹣sin30°•（﹣sin30°），从而求得结果.

【解答】解：sin210°cos120°＝﹣sin30°•（﹣sin30°）$=\frac{1}{4}$，

故选：$A$.

3.（5分）函数 $f(x)=ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是（　　）

A.（﹣∞，﹣2）　　B.（﹣∞，1）　　C.（1，+∞）　　D.（4，+∞）

【答案】$D$

【分析】求出函数的定义域，利用复合函数单调性之间的关系进行求解即可.

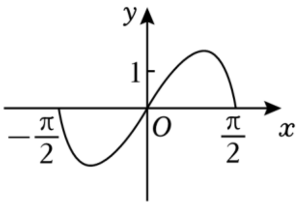
【解答】解：由 $x^2-2x-8>0$ 得 $x>4$ 或 $x<-2$，

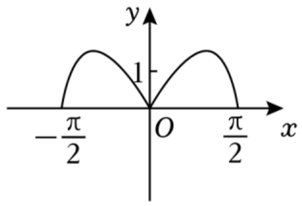
设 $t=x^2-2x-8$，则当 $x>4$ 时，$g(x)$ 为增函数，此时 $y=lnt$ 为增函数，则 $f(x)$ 为增函数，

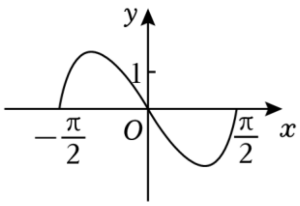
即 $f(x)$ 的单调递增区间为（4，+∞），

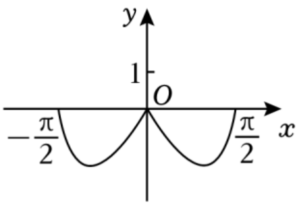
故选：$D$.

4.（5分）函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 的图象大致为（　　）

A. 


B. 


C. 


D. 


【答案】*A*

【分析】由函数的奇偶性及函数值的大小进行排除即可求得结论.

【解答】解：函数 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，

$f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-(3^x-3^{-x})\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 *B*，*D*；

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)\geqslant 0$，排除 *C*.

故选：*A*.

5.（5 分）若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{3-x}{x}-\frac{1}{2x^2}(a\neq 0)$既有极大值也有极小值，则 $a\in$（　　）

A．$(0,\frac{9}{4})$　　B．（0，3）

C．$(0,\frac{9}{4})\cup(9,+\infty)$　　D．（0，3）∪（9，+∞）

【答案】*A*

【分析】将函数既有极大值也有极小值转化为导函数对应的方程有两个不等正根即可解决问题.

【解答】解：因为 $f(x)=a\ln x+\frac{3-x}{x}-\frac{1}{2x^2}(a\neq 0)$，

所以函数 $f(x)$ 定义域为（0，+∞），

$$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{ax^2-3x+1}{x^3},$$

由题意，方程 $f'(x)=0$，即 $ax^2-3x+1=0$ 有两个不相等的正根，设为 $x_1$，$x_2$，

则$\begin{cases}\Delta=9-4a>0\\ x_1+x_2=\frac{3}{a}>0\\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}>0\end{cases}$，解得 $0<a<\frac{9}{4}$，即 $a$ 的取值范围为 $(0,\frac{9}{4})$.

故选：*A*.

6.（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n<\frac{1}{2}\\ 2a_n-1, & \frac{1}{2}\leqslant a_n<1\end{cases}$．若$a_1=\frac{3}{5}$，则$a_{2023}=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】*B*

【分析】逐项计算找到数列的周期即可．

【解答】解：由题意，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_2=2a_1-1=\frac{1}{5}$，$a_3=2a_2=\frac{2}{5}$，$a_4=2a_3=\frac{4}{5}$，$a_5=2a_4-1=\frac{3}{5}\cdots$，

故数列$\{a_n\}$周期为 4，则$a_{2023}=a_{2019}=\ldots=a_3=\frac{2}{5}$．

故选：*B*．

7.（5 分）在△*ABC* 中，$A=\frac{\pi}{3}$，若 $a=2$，则△*ABC* 面积的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】*D*

【分析】根据余弦定理和基本不等式，即可计算△*ABC* 面积的最大值．

【解答】解：△*ABC* 中，$A=\frac{\pi}{3}$，$a=2$，

由余弦定理得，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $4\geqslant 2bc-bc=bc$，

∴$bc\leqslant 4$，当且仅当 $b=c$ 时“＝”成立；

∴△*ABC* 面积的最大值为

$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

故选：*D*．

8.（5 分）已知$f'(x)$是函数$f(x)$的导数，且$f(-x)=f(x)$，当$x\geqslant 0$时，$f'(x)>3x$，则不等式$f(x)-f(x-1)<3x-\frac{3}{2}$的解集是（　　）

A．$(-\frac{1}{2},\ 0)$　　B．$(-\infty,\ -\frac{1}{2})$　　C．$(\frac{1}{2},\ +\infty)$　　D．$(-\infty,\ \frac{1}{2})$

【答案】*D*

【分析】设$g(x)=f(x)-\frac{3}{2}x^2$，根据函数的单调性和奇偶性得到$g(x)<g(x-1)$，$|x|<|x-1|$，求出 $x$ 的范围即可．

【解答】解：设$g(x)=f(x)-\frac{3}{2}x^2$，则$g'(x)=f'(x)-3x$，

因为当$x\geqslant0$时，$f'(x)>3x$，所以当$x\geqslant0$时，$g'(x)>0$，

即$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

因为$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，

则$g(x)$也是偶函数，

因为$f(x)-f(x-1)<3x-\frac{3}{2}$，

所以$f(x)-\frac{3}{2}x^2<f(x-1)-\frac{3}{2}(x-1)^2$，

即$g(x)<g(x-1)$，

则$|x|<|x-1|$，解得$x<\frac{1}{2}$，

故选：$D$.

**二、多项选择题：（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

（多选）9.（5分）下列结论正确的是（　　）

A．命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant0$“的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\leqslant0$“

B．若样本数据$x_1$，$x_2$，　，$x_{10}$的方差为2，则数据$2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$的方差为8

C．$C_7^1+C_7^2+C_7^3+\cdots+C_7^7=128$

D．若$(1-\sqrt{2})^5=a+b\sqrt{2}$（$a$，$b$为有理数），则$b=-29$

【答案】$BD$

【分析】结合含有量词的命题的否定可检验$A$；

结合方差性质可检验$B$；

结合组合数性质检验$C$；

结合二项式定理检验$D$.

【解答】解：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant0$“的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$“，$A$错误；

由方差的性质可知：$2x_1-1$，$2x_2-1$，　，$2x_{10}-1$的方差为$2^2\times2=8$，$B$正确；

$C_7^1+C_7^2+C_7^3+\cdots+C_7^7=2^7-C_7^0=127$，$C$错误；

因为$(1-\sqrt{2})^5$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r(-\sqrt{2})^r$，

所以$b\sqrt{2}=C_5^1(-\sqrt{2})^1+C_5^3(-\sqrt{2})^3+C_5^5(-\sqrt{2})^5=-29\sqrt{2}$，即$b=-29$，故$D$正确.

故选：*BD*．

（多选）10．（5 分）在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，若 $b=2\sqrt{3}$，*c*＝3，*A*+3*C*＝π，则下列结论正确的是（　　）

A．$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．*a*＝1　　D．$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$

【答案】*ACD*

【分析】根据正弦定理得到 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，利用二倍角公式计算 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，根据余弦定理得到 *a*＝1，利用面积公式求得 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，即可得解．

【解答】解：因为 *A*+3*C*＝π，所以 *B*＝2*C*，

根据正弦定理：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 *b*sin*C*＝*c*sin*B*＝2*c*sin*C*cos*C*，

所以 $2\sqrt{3}\sin C=3\times 2\sin C\cos C$，

又 sin*C*≠0，故 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 *A* 正确；

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\sin B=\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故 *B* 错误；

因为 $b=2\sqrt{3}$，*c*＝3，$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得 $9=a^2+12-2a\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $a^2-4a+3=0$，解得 *a*＝3 或 *a*＝1，

若 *a*＝3，又 *c*＝3，且 *A*+3*C*＝π，所以 $A=C=\frac{\pi}{4}$，故 $B=\frac{\pi}{2}$，

所以 $b=\sqrt{a^2+c^2}=3\sqrt{2}\neq 2\sqrt{3}$，不合题意舍去，故 *a*＝1，故 *C* 正确；

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$，故 *D* 正确．

故选：*ACD*．

（多选）11．（5 分）将函数 $y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再将横坐标缩短为原来的 $\sqrt{3}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 *y*＝*f*（*x*）的图象（*x*∈**R**），下列结论错误的是（　　）

A．函数 *f*（*x*）的图象最小正周期为 π

B．函数 *f*（*x*）的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 对称

C．函数 $f(x)$ 的图象在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

D．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

【答案】*ABD*

【分析】先求出 $f(x)=\cos(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3})$，再对四个选项一一验证：对于 *A*；直接利用公式求周期，即可判断；对于 *B*：用代入法检验；对于 *C*：利用复合函数同增异减进行验证：对于 *D*：用代入法检验．

【解答】解：$y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$，向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})$，

再将横坐标缩短为原来的 $\sqrt{3}$ 倍（纵坐标不变），得到 $y=\cos(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3})$，

即 $f(x)=\cos(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3})$．对

于 *A*：最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\sqrt{3}\pi$，故 *A* 错误；

对于 *B*：当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，

故 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 不是对称中心，故 *B* 错误；

对于 *C*：当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{\pi}{3}]$，

而 $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{\pi}{3}<0$，因为 $y=\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增．故 *C* 正确；

对于 *D*：当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\neq k\pi$，所以 $x=\frac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 的对称轴，故 *D* 错误．

故选：*ABD*．

（多选）12．（5 分）已知曲线 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2+ax-1$ 上存在两条斜率为 3 的不同切线，且切点的横坐标都大于零，则实数 $a$ 可能的取值（　　）

A．$\frac{19}{6}$　　　　B．3　　　　C．$\frac{10}{3}$　　　　D．$\frac{9}{2}$

【答案】*AC*

【分析】求得 $f(x)$ 的导数，可令切点的横坐标为 $m$，求得切线的斜率，由题意可得关于 $m$ 的方程 $2m^2-2m+a-3=0$ 有两个不等的正根，考虑判别式大于 0，且两根之和大于 0，两根之积大于 0，计算可得 $a$ 的范围，可得答案．

【解答】解：$f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2+ax-1$ 的导数为 $f'(x)=2x^2-2x+a$，

可令切点的横坐标为 $m$，可得 $k=2m^2-2m+a=3$，

由题意可得关于 $m$ 的方程 $2m^2-2m+a-3=0$ 有两个不等的正根，

可得△＞0，即 $4-8(a-3)>0$，即 $a<\frac{7}{2}$，

又 $a-3>0$，解得 $3<a<\frac{7}{2}$，

对照选项，可得：

$a$ 的取值可能为$\frac{19}{6}$，$\frac{10}{3}$.

故选：$AC$.

**三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

13.（5 分）在△$ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle C=105°$，$BC=6\sqrt{2}$，则 $AC$ 的长度为 <u>　6　</u>.

【答案】6

【分析】先由三角形的内角和定理，求得$\angle B=30°$，再利用正弦定理，即可得解.

【解答】解：由题意知，$\angle B=180°-\angle A-\angle C=30°$，

由正弦定理知，$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{BC}{\sin\angle A}$，

所以 $AC=\frac{BC\sin\angle B}{\sin A}=\frac{6\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6$.

故答案为：6.

14.（5 分）已知非负数 $x$，$y$ 满足 $x+y=1$，则$\frac{1}{x+1}+\frac{9}{y+2}$的最小值是 <u>　4　</u>.

【答案】4.

【分析】根据题意 $x+1+y+2=4$，再构造等式利用基本不等式求解即可.

【解答】解：由 $x+y=1$，可得$x+1+y+2=4$，$\frac{1}{x+1}+\frac{9}{y+2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x+1}+\frac{9}{y+2})(x+1+y+2)$

$=\frac{1}{4}(1+9+\frac{y+2}{x+1}+\frac{9(x+1)}{y+2})\geqslant\frac{1}{4}(10+2\sqrt{\frac{y+2}{x+1}\cdot\frac{9(x+1)}{y+2}})=4$，

当且仅当 $y+2=3(x+1)$，即 $x=0$，$y=1$ 时取等号.

故答案为：4.

15.（5 分）已知$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，求$\cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})=$ <u>　$\frac{7}{9}$　</u>.

【答案】$\frac{7}{9}$.

【分析】利用二倍角余弦公式可求得 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})$，由诱导公式可得 $\cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})=-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})$，由此可得结果.

【解答】解：$\because \cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})=1-\frac{16}{9}=-\frac{7}{9}$，

$\therefore \cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})=\cos(-\pi+(2\alpha+\frac{\pi}{3}))=-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{7}{9}$.

故答案为：$\frac{7}{9}$.

16.（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & x>0\\ 2^{|x|}, & x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $y=|2f(x)-a|-1$ 存在 5 个零点，则整数 $a$ 的值为 ＿（1，3）＿.

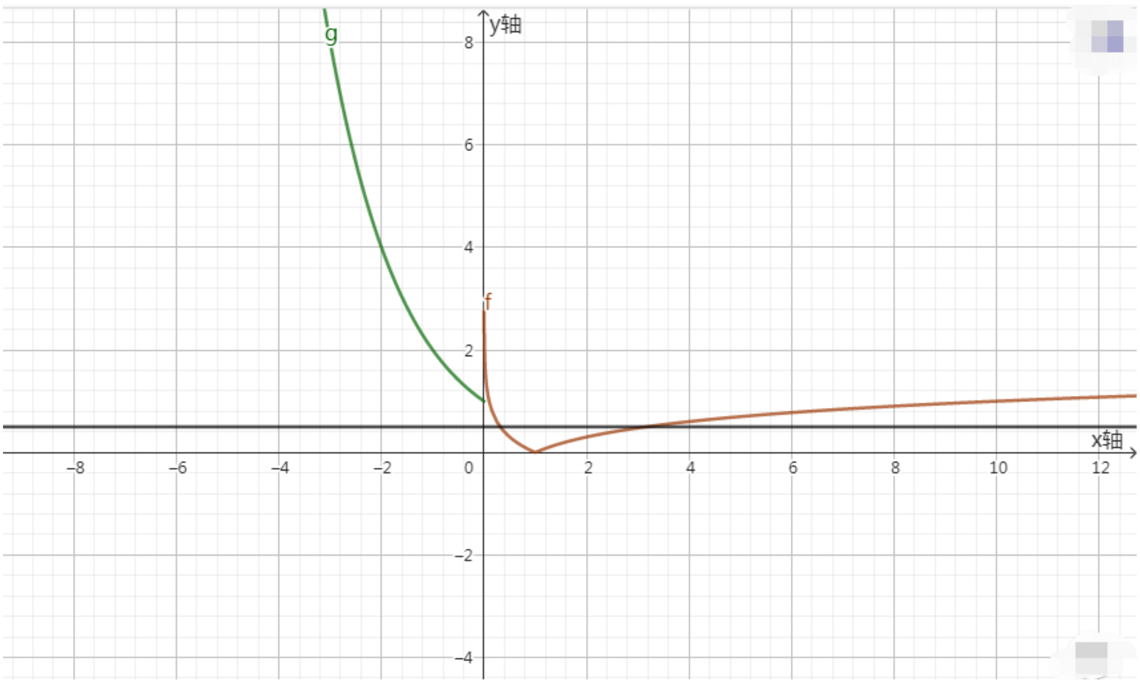
【答案】（1，3）.

【分析】把“函数 $y=|2f(x)-a|-1$ 存在 5 个零点”转化为“$f(x)$ 与 $\frac{a+1}{2}$ 或 $\frac{a-1}{2}$ 有五个交点”，由此数形结合即可求出 $a$ 的范围.

【解答】解：因为函数 $y=|2f(x)-a|-1$ 存在 5 个零点，所以方程 $|2f(x)-a|-1=0$ 有五个实数根，

即 $f(x)=\frac{a+1}{2}$ 或 $f(x)=\frac{a-1}{2}$ 有五个实数根，即 $f(x)$ 与 $\frac{a+1}{2}$ 或 $\frac{a-1}{2}$ 有五个交点.

函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：




由图可知 $0<\frac{a-1}{2}<1$，且 $\frac{a+1}{2}\geqslant 1$.

解得（1，3）.

**四、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.请将答案填写在答题卡相应的位置上.）**

17.（10 分）已知集合 $A=\{x|x^2-x-12\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2x+1-m^2\leqslant 0，m>0\}$.

（1）若 $m=2$，求 $A\cup B$；

（2）若 $A\subseteq B$，求实数 $m$ 的取值范围.

【答案】（1）$[-3，4]$；

（2）$[4，+\infty)$.

【分析】（1）根据题意，分别解出集合 $A$、$B$ 中包含的不等式，再求 $A\cup B$ 可得答案；

（2）解出集合 $B$ 中包含的不等式，然后根据 $A\subseteq B$ 建立不等式组求解即可.

【解答】解：（1）不等式 $x^2-x-12\leqslant 0$，即（$x-4$）（$x+3$）$\leqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$，可得 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$.

当 $m=2$ 时，集合 $B$ 中的不等式为 $x^2-2x-3\leqslant 0$，即（$x+1$）（$x-3$）$\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$，即 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，

因为 $B\subseteq A$，所以 $A\cup B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}=[-3，4]$；

（2）不等式 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 可化为（$x-m-1$）（$x+m-1$）$\leqslant 0$，

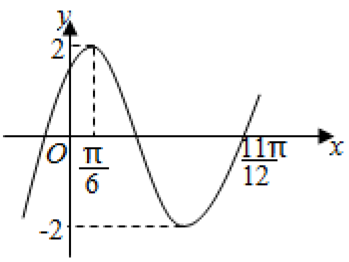
其中 $m>0$，解得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$，所以 $B=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m，m>0\}$.

而集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$，且 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}1-m\leqslant -3\\ m+1\geqslant 4\\ m>0\end{cases}$，解得 $m\geqslant 4$，即 $m$ 的取值范围是 $[4，+\infty)$.

18.（12 分）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A$，$\omega$，$\varphi$ 为常数，$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象如图所示，

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(-\frac{5\pi}{3})$ 的值.




【答案】见试题解答内容

【分析】（1）根据图象的最高点坐标，最高点横坐标与零点距离等求出 $A$，$\varphi$，$\omega$；

（2）利用（1）的解析式代入求值

【解答】解：（1）由图象可知 $A=2$，并且 $T=\frac{4}{3}(\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$，所以 $\omega=2$，又 $f(\frac{\pi}{6})=2$，$0<\varphi<\pi$，得到 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$；

（2）由（1）得到 $f(-\frac{5\pi}{3})=2\sin(-\frac{10}{3}\pi+\frac{\pi}{6})=-2\sin\frac{\pi}{6}=1$.

19.（12 分）在△$ABC$ 中，$A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，满足条件 $a^2+b^2-c^2=2$，$\tan C=\frac{1}{2}$.

（1）求△$ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$；

（2）若 $c=2$，求 $\sin A\sin B$ 的值．

【答案】（1）$\frac{1}{4}$，

（2）$\frac{\sqrt{5}}{40}$.

【分析】（1）利用余弦定理建立方程进行求解即可．

（2）根据正弦定理建立方程进行求解即可．

【解答】解：（1）由 $a^2+b^2-c^2=2$，结合余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2}{2ab}=\frac{1}{ab}$，

得 $ab\cos C=1$，

由 $\tan C=\frac{1}{2}$，知 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

得 $ab=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}$.

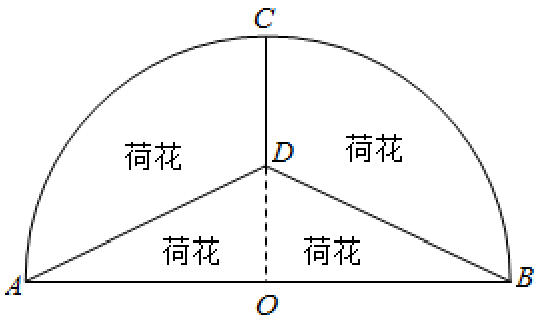
（2）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得：$\frac{a}{\sin A}\cdot\frac{b}{\sin B}=(\frac{c}{\sin C})^2=20$.

所以 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{40}$.

20.（12 分）学校外的湿地公园有一形状为半圆形的荷花池．如图所示，为了提升荷花池的观赏性，现计划在池塘的中轴线 $OC$ 上设计一个观景台 $D$（点 $D$ 与点 $O$，$C$ 不重合），其中 $AD$，$BD$，$CD$ 段建设架空木栈道，已知 $AB=100m$，设建设的架空木栈道的总长为 $ym$．

（1）设∠$DAO=\theta$（$rad$），将 $y$ 表示成 $\theta$ 的函数关系式，并写出 $\theta$ 的取值范围；

（2）试确定观景台的位置，使三段木栈道的总长度最短．




【答案】（1）$y=50(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+1)$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$.

（2）当 $D$ 位于线段 $AB$ 的中垂线上且距离 $AB$ 边$\frac{50\sqrt{3}}{3}$π处时，能使三段木栈道总长度最短.

【分析】（1）根据已知条件，结合三角形的性质，求出 $DA$，$DB$，$DC$，将三者相加，即可求解.

（2）根据（1）的结论，再利用导数研究函数的单调性，即可求解.

【解答】解：（1）∵$\angle DAO=\theta$，$OC\perp AB$，$OA=OB=50$，

∴$DA=DB=\frac{50}{\cos\theta}$，$DO=50\tan\theta$，

∴$DC=50-50\tan\theta$，

∴$y=DA+DB+DC=\frac{100}{\cos\theta}+50-50\tan\theta=50(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+1)$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$.

（2）由（1）可知，$y'=50(\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta})$，令 $y'=0$，得$\sin\theta=\frac{1}{2}$，

∵$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，

∴$\theta=\frac{\pi}{6}$，

当$0<\theta<\frac{\pi}{6}$时，$y'<0$，$y$ 是 θ 的减函数，

当$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$时，$y'>0$，$y$ 是 θ 的增函数，

故当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$y_{min}=50(\sqrt{3}+1)$，$DO=50\tan\theta=\frac{50\sqrt{3}}{3}$，

故当 $D$ 位于线段 $AB$ 的中垂线上且距离 $AB$ 边$\frac{50\sqrt{3}}{3}$π处时，能使三段木栈道总长度最短.

21.（12 分）王先生准备每天从骑自行车和开车两种出行方式中随机选择一种出行．从即日起出行方式选择规则自定如下：第一天选择骑自行车出行，随后每天用“一次性抛掷 4 枚均匀硬币”的方法确定出行方式，若得到的正面朝上的枚数小于 3，则该天出行方式与前一天相同，否则选择另一种出行方式．设 $p_n(n\in N^*)$表示事件“第 $n$ 天王先生选择骑自行车出行”的概率.

（1）用 $p_{n-1}$ 表示 $p_n$（$n\geqslant2$）；

（2）请问王先生骑自行车的概率和开车的概率哪个更大？并说明理由．

【答案】（1）$p_n=\frac{3}{8}p_{n-1}+\frac{5}{16}(n\geqslant 2)$；

（2）王先生选择骑自行车出行的次数多于选择开车出行的次数是大概率事件，理由见解析．

【分析】（1）设一次性抛掷 4 枚均匀的硬币得到正面向上的枚数为 ξ，则 $\xi\sim B(4,\frac{1}{2})$，计算 $P$（ξ＜3）和 $P$（ξ≥3），结合全概率公式即可求解；

（2）通过构造数列得到 $p_n=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{8})^{n-1}+\frac{1}{2}$，再与$\frac{1}{2}$比较即可．

【解答】解：（1）设一次性抛掷 4 枚均匀的硬币得到正面向上的枚数为 ξ，则 $\xi\sim B(4,\frac{1}{2})$，

$P(\xi<3)=C_4^0\times(\frac{1}{2})^4+C_4^1\times(\frac{1}{2})^4+C_4^2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{11}{16}$，则 $P(\xi\geqslant 3)=1-P(\xi<3)=\frac{5}{16}$．

用 $A_{n-1}$ 表示事件“第（$n-1$）天王先生选择的是骑自行车出行”，

$A_n$ 表示事件“第 $n$ 天王先生选择的是骑自行车出行”，

由全概率公式知：

$p_n=P(A_n)=P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1})+P(A_n|\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}})$

$=p_{n-1}\cdot P(\xi<3)+(1-p_{n-1})\cdot P(\xi\geqslant 3)$

$=\frac{11}{16}p_{n-1}+(1-p_{n-1})\frac{5}{16}$

$=\frac{3}{8}p_{n-1}+\frac{5}{16}$；

所以 $p_n=\frac{3}{8}p_{n-1}+\frac{5}{16}(n\geqslant 2)$；

（2）由（1）知，$p_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}(p_{n-1}-\frac{1}{2})$，$n\geqslant 2$，

因为 $p_1=1$，则 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $p_n-\frac{1}{2}\neq 0$，所以$\frac{p_n-\frac{1}{2}}{p_{n-1}-\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$，

所以数列 $\{p_n-\frac{1}{2}\}$ 是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{3}{8}$的等比数列，

从而 $p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{8})^{n-1}$，于是 $p_n=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{8})^{n-1}+\frac{1}{2}$，

又因为 $p_n=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{8})^{n-1}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$恒成立，

所以王先生每天选择骑自行车出行的概率始终大于选择开车出行的概率，

从长期来看，王先生选择骑自行车出行的次数多于选择开车出行的次数是大概率事件．

22．（12 分）已知函数 $f(x)=\ln x+\ln a+(a-1)x+2$（$a>0$）．

（1）讨论 $f$（$x$）的单调性；

（2）若 $e^{x-2}\geqslant f$（$x$），求实数 $a$ 的取值范围．

【答案】（1）当 $a\geqslant1$ 时，$f$（$x$）在（0，+∞）上单调递增，

当 $0<a<1$ 时，$f$（$x$）在（0，$\frac{1}{1-a}$）上单调递增，在（$\frac{1}{1-a}$，+∞）上单调递减．

（2）（0，$\frac{1}{e}$]．

【分析】（1）函数 $f$（$x$）的定义域为（0，+∞），求导得 $f'$（$x$）$=\frac{1+(a-1)x}{x}$，$a>0$，分三种情况：当 $a>1$ 时，当 $a=1$ 时，当 $0<a<1$ 时，分析 $f'$（$x$）的符号，$f$（$x$）的单调性．

（2）若 $e^{x-2}\geqslant f$（$x$），则 $e^{x-2}\geqslant\ln ax+ax-x+2$，进而可得 $\ln e^{x-2}+e^{x-2}\geqslant\ln ax+ax$（*），令 $g$（$t$）$=\ln t+t$，则（*）不等式为 $g$（$e^{x-2}$）$\geqslant g$（$ax$），分析 $g$（$x$）的单调可得 $e^{x-2}\geqslant ax$ 在（0，+∞）上恒成立，$a\leqslant\frac{e^{x-2}}{x}$，令 $h$（$x$）$=\frac{e^{x-2}}{x}$，$x>0$，只需 $a\leqslant h(x)_{min}$，即可得出答案．

【解答】解：（1）函数 $f$（$x$）的定义域为（0，+∞），

$f'$（$x$）$=\frac{1}{x}+a-1=\frac{1+(a-1)x}{x}$，$a>0$，

当 $a>1$ 时，令 $f'$（$x$）$=0$ 得 $x=\frac{1}{1-a}<0$，

所以在（0，+∞）上 $f'$（$x$）$>0$，$f$（$x$）单调递增，

当 $a=1$ 时，$f'$（$x$）$=\frac{1}{x}>0$，

所以在（0，+∞）上 $f$（$x$）单调递增，

当 $0<a<1$ 时，令 $f'$（$x$）$=0$ 得 $x=\frac{1}{1-a}$，

所以在（0，$\frac{1}{1-a}$）上 $f'$（$x$）$>0$，$f$（$x$）单调递增，

在（$\frac{1}{1-a}$，+∞）上 $f'$（$x$）$<0$，$f$（$x$）单调递减，

综上所述，当 $a\geqslant1$ 时，$f$（$x$）在（0，+∞）上单调递增，

当 $0<a<1$ 时，$f$（$x$）在（0，$\frac{1}{1-a}$）上单调递增，在（$\frac{1}{1-a}$，+∞）上单调递减．

（2）若 $e^{x-2}\geqslant f$（$x$），则 $e^{x-2}\geqslant\ln ax+ax-x+2$，

所以 $e^{x-2}+x-2\geqslant\ln ax+ax$，

所以 $\ln e^{x-2}+e^{x-2}\geqslant\ln ax+ax$，（*）

令 $g$（$t$）$=\ln t+t$，则（*）不等式为 $g$（$e^{x-2}$）$\geqslant g$（$ax$），

$g'$（$t$）$=\frac{1}{t}+1>0$，

所以 $g$（$t$）在（0，+∞）上单调递增，

所以 $e^{x-2}\geqslant ax$ 在（0，+∞）上恒成立，

所以 $a\leqslant\frac{e^{x-2}}{x}$，

令 $h$（$x$）$=\frac{e^{x-2}}{x}$，$x>0$，

$h'$（$x$）$=\frac{e^{x-2}x-e^{x-2}}{x^2}=\frac{e^{x-2}(x-1)}{x^2}$，

令 $h'$（$x$）$=0$ 得 $x=1$，

所以在（0，1）上 $h'$（$x$）$<0$，$h$（$x$）单调递减，

在（1，+∞）上 $h'$（$x$）$>0$，$h$（$x$）单调递增，

所以 $h(x)_{min}=h(1)=\frac{1}{e}$，

所以 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，

所以 $a$ 的取值范围为$(0,\frac{1}{e}]$.