

2022-2023 学年江苏省淮安市高二（下）期末数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (5 分) 已知集合 $M = \{x | |x+1| < 2\}$, $N = \{x | a < x < 1\}$, 若 $M \subseteq N$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, -3]$ B. $(-\infty, -3)$ C. $[-3, 1)$ D. $(-3, 1)$
- (5 分) 已知直线 l 的方向向量 $\vec{e} = (1, -1, -2)$, 平面 α 的法向量 $\vec{n} = (-\frac{1}{2}, \lambda, 1)$, 若 $l \perp \alpha$, 则 $\lambda =$ ()
 A. $-\frac{5}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
- (5 分) 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 则所选 3 人中至少有 1 名女生的概率是 ()
 A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{1}{3}$
- (5 分) 若 $x > 0, y > 0$, 称 $a = \sqrt{xy}$ 是 x, y 的几何平均数, $b = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ 是 x, y 的调和平均数, 则 “ $a > 3$ ” 是 “ $b > 3$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (5 分) 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻 “—” 和阴爻 “--”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 2 个阳爻且 2 个阳爻不相邻的概率是 ()

 A. $\frac{1}{72}$ B. $\frac{5}{32}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{2}{3}$
- (5 分) 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 1$, 点 E 是 BC 的中点, 则点 E 到直线 PD 的距离是 ()
 A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
- (5 分) 某中学举行夏季运动会, 共有 3 类比赛 9 个项目: 集体赛 2 项, 田赛 3 项, 径赛 4 项. 要求参赛者每人至多报 3 项, 且集体赛至少报 1 项, 则每人有 () 种报名方式.

- A. 49 B. 64 C. 66 D. 73

8. (5分) 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 且 $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{6}$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 则 ()

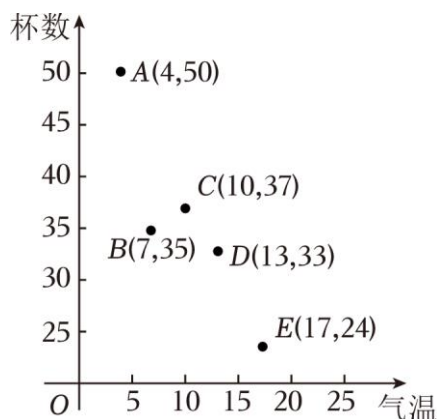
- A. $P(A) = \frac{1}{3}$ B. $P(AB) = \frac{1}{6}$ C. $P(A+B) = \frac{3}{4}$ D. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (5分) 若 $a < b < c < 0$, 则下列不等式中正确的有 ()

- A. $|a|+b > 0$ B. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ C. $\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c}$ D. $a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a}$

(多选) 10. (5分) 如图是某小卖部 5 天卖出热茶的杯数 (单位: 杯) 与当天气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的散点图, 若去掉 $B(7, 35)$ 后, 下列说法正确的有 ()



- A. 决定系数 R^2 变大
B. 变量 x 与 y 的相关性变弱
C. 相关系数 r 的绝对值变大
D. 当气温为 11°C 时, 卖出热茶的杯数估计为 35 杯

(多选) 11. (5分) 有甲、乙、丙等 5 名同学聚会, 下列说法正确的有 ()

- A. 5 名同学每两人握手 1 次, 共握手 20 次
B. 5 名同学相互赠送祝福卡片, 共需要卡片 20 张
C. 5 名同学围成一圈做游戏, 有 120 种排法
D. 5 名同学站成一排拍照, 甲、乙相邻, 且丙不站正中间, 有 40 种排法

(多选) 12. (5分) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $PA = \sqrt{3}$, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 其中 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, 则下列结论正确的有 ()

- A. $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值是 $\sqrt{2}$

B. 当 $x=1$ 时，三棱锥 $P-ADQ$ 的体积为定值

C. 当 $x=y$ 时， PB 与 PQ 所成角可能为 $\frac{\pi}{6}$

D. 当 $x+y=1$ 时， AB 与平面 PAQ 所成角正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分) 随机变量 $X \sim N(5, \sigma^2)$, $P(X < 3) = \frac{1}{8}$, 则 $P(3 \leq X < 7) =$ _____.

14. (5 分) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 M 在线段 CB_1 上，且 $CM=2MB_1$ ，若以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为基底表示 $\overrightarrow{AM}$ ，则 $\overrightarrow{AM} =$ _____.

15. (5 分) 已知 $x \neq -1$ ，且 $x \neq 0$ ，则 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^9$ 的展开式中 x^2 项的系数是_____。（用数字作答）

16. (5 分) 已知随机变量 ξ 的概率分布列如下表所示，当 $E(\xi) = \frac{3}{4}$ 时， $D(2\xi+1) =$ _____.

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	a	b

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $(2x-y)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大.

(1) 求展开式的第 2 项;

(2) 求展开式的奇数项系数之和.

18. (12 分) 某乡政府为提高当地农民收入，指导农民种植药材，取得较好的效果. 以下是某农户近 5 年种植药材的平均收入的统计数据:

年份	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5
平均收入 y (千元)	59	61	64	68	73

(1) 根据表中数据，现有 $y=a+bx$ 与 $y=c+dx^2$ 两种模型可以拟合 y 与 x 之间的关系，请分别求出两种模型的回归方程；（结果保留一位小数）

(2) 统计学中常通过比较残差的平方和来比较两个模型的拟合效果，请根据残差平方和说明上述两个方程哪一个拟合效果更好，并据此预测 2023 年该农户种植药材的平均收入.

参考数据及公式： $\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = 217$ ， $\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = 374$ ，其中 $t_i = x_i^2$ ， $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

19. (12 分) 淮安西游乐园推出的西游主题毛绒公仔，具有造型逼真可爱、触感柔软等特点，深受学生喜爱。某调查机构在参观西游乐园的游客中随机抽取了 200 名学生，对是否有购买西游主题毛绒公仔的意愿进行调查，得到以下的 2×2 列联表：

	有购买意愿	没有购买意愿	合计
男		40	
女	60		
合计		50	

(1) 完成上述 2×2 列联表，根据以上数据，判断是否有 99% 的把握认为购买西游主题毛绒公仔与学生的性别有关？

(2) 某文创商店为了宣传推广西游主题毛绒公仔产品，设计了一个游戏：在三个外观大小都一样的袋子中，分别放大小相同的 1 个红球和 3 个蓝球，2 个红球和 2 个蓝球，以及 3 个红球和 1 个蓝球。游客可以从三个袋子中任选一个，再从中任取 2 个球，若取出 2 个红球，则可以获赠一套西游主题毛绒公仔。现有 3 名同学参加该游戏， ξ 表示 3 名同学中获赠一套毛绒公仔的人数，求随机变量 ξ 的概率分布及数学期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$ 。

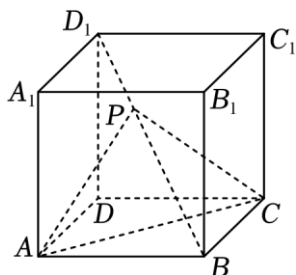
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828



20. (12 分) 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是对角线 BD_1 上异于 B, D_1 的点，记 $\frac{BP}{BD_1} = \lambda$ 。

(1) 当 $\angle APC$ 为锐角时，求实数 λ 的取值范围；

(2) 当二面角 $P-AC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ 时，求点 B_1 到平面 PAC 的距离.



21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2mx, & x \leq 2 \\ m - x + \frac{4}{2-x}, & x > 2 \end{cases}, m \in \mathbf{R}.$

(1) 当 $x \leq 2$ 时，求 $f(x) > 0$ 的解集；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为 3，求 m 的值.

22. (12 分) 投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏. 晋代在广泛开展投壶活动中，对投壶的壶也有所改进，即在壶口两旁增添两耳，因此在投壶的花式上就多了许多名目，如“贯耳（投入壶耳）”等. 现有甲、乙两人进行投壶游戏，规定投入壶口一次得 1 分，投入壶耳一次得 2 分，其余情况不得分. 已知甲投入壶口的概率为 $\frac{1}{3}$ ，投入壶耳的概率为 $\frac{1}{6}$ ；乙投入壶口的概率为 $\frac{2}{3}$ ，投入壶耳的概率为 $\frac{1}{3}$. 假设甲乙两人每次投壶是否投中相互独立.

(1) 求甲投壶 3 次得分为 3 分的概率；

(2) 求乙投壶多少次，得分为 8 分的概率最大.



2022-2023 学年江苏省淮安市高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知集合 $M = \{x | |x+1| < 2\}$, $N = \{x | a < x < 1\}$, 若 $M \subseteq N$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -3]$ B. $(-\infty, -3)$ C. $[-3, 1)$ D. $(-3, 1)$

【答案】A

【分析】首先求出集合 A, 再根据集合的包含关系计算可得.

【解答】解: 由 $|x+1| < 2$, 则 $-2 < x+1 < 2$, 解得 $-3 < x < 1$,

所以 $M = \{x | |x+1| < 2\} = \{x | -3 < x < 1\}$,

又 $N = \{x | a < x < 1\}$ 且 $M \subseteq N$,

所以 $a \leq -3$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

故选: A.

2. (5 分) 已知直线 l 的方向向量 $\vec{e} = (1, -1, -2)$, 平面 α 的法向量 $\vec{n} = (-\frac{1}{2}, \lambda, 1)$, 若 $l \perp \alpha$, 则 λ = ()

- A. $-\frac{5}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】C

【分析】根据空间向量平行的坐标关系即得.

【解答】解: 由题可得 $\vec{e} \parallel \vec{n}$, 所以可设 $(-\frac{1}{2}, \lambda, 1) = \mu (1, -1, -2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{1}{2} = \mu \\ \lambda = -\mu \\ 1 = -2\mu \end{cases}$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故选: C.

3. (5 分) 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 则所选 3 人中至少有 1 名女生的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【分析】试验发生包含的事件是从 6 个人中选 3 个，共有 C_6^3 种结果，满足条件的事件是所选 3 人中至少有 1 名女生，它的对立事件是所选的三人中没有女生，有 C_4^3 种结果，根据对立事件的概率公式得到结果。

【解答】解：由题意知本题是一个等可能事件的概率，

试验发生包含的事件是从 6 个人中选 3 个，共有 $C_6^3=20$ 种结果，

满足条件的事件是所选 3 人中至少有 1 名女生，它的对立事件是所选的三人中没有女生，

有 $C_4^3=4$ 种结果，

$$\therefore \text{要求的概率是 } 1 - \frac{4}{20} = \frac{4}{5}$$

故选：C.

4. (5 分) 若 $x>0, y>0$ ，称 $a=\sqrt{xy}$ 是 x, y 的几何平均数， $b=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ 是 x, y 的调和平均数，则 “ $a>3$ ”

是 “ $b>3$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】由 $b \leq a$ 结合充分条件必要条件的定义即得.

【解答】解：因为 $b = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} \leq \frac{2xy}{2\sqrt{xy}} = \sqrt{xy} = a$ ，当且仅当 $x=y$ 时取等号，

所以由 $b>3$ 可推出 $a>3$ ，而由 $a>3$ 推不出 $b>3$ ，

所以 “ $a>3$ ” 是 “ $b>3$ ” 的必要不充分条件。

故选：B.

5. (5 分) 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“—”和阴爻“--”，如图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 2 个阳爻且 2 个阳爻不相邻的概率是 ()



A. $\frac{1}{72}$

B. $\frac{5}{32}$

C. $\frac{5}{16}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 B

【分析】 根据题意，分别计算所有“重卦”和恰有 2 个阳爻且 2 个阳爻不相邻的“重卦”种数，根据古典概型概率计算公式求得结果.

【解答】 解：根据题意，每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“—”和阴爻“--”，即每个“爻”有 2 种情况，则所有“重卦”共有 2^6 种；

若恰有 2 个阳爻且 2 个阳爻不相邻，先将 4 个阴爻排好，有 5 个空位可选，

在其中任选 2 个，安排 2 个阳爻即可，则符合题意的“重卦”种数有 C_5^2 种，

故恰有 2 个阳爻且 2 个阳爻不相邻的概率为 $\frac{C_5^2}{2^6} = \frac{5}{32}$.

故选：B.

6. (5 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA=AB=1$ ，点 E 是 BC 的中点，则点 E 到直线 PD 的距离是 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【答案】 D

【分析】 利用坐标法，根据点到直线的距离的向量求法即得.

【解答】 解：因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以建系如图，则根据题意可得：

$$P(0, 0, 1), D(0, 1, 0), E(1, \frac{1}{2}, 0),$$

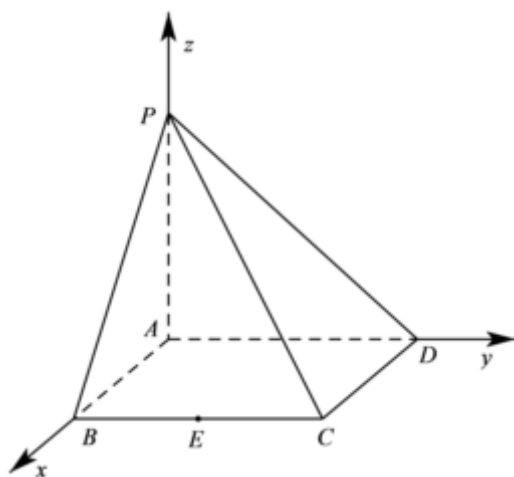
$$\text{所以 } \overrightarrow{PD} = (0, 1, -1), \overrightarrow{DE} = (1, -\frac{1}{2}, 0),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}, |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{2}, \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

所以点 E 到直线 PD 的距离为：

$$\sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

故选：D.



7. (5分) 某中学举行夏季运动会，共有3类比赛9个项目：集体赛2项，田赛3项，径赛4项．要求参赛者每人至多报3项，且集体赛至少报1项，则每人有（ ）种报名方式．

A. 49 B. 64 C. 66 D. 73

【答案】C

【分析】根据两个计数原理结合组合知识即得．

【解答】解：由题可知，若每人报集体赛1项，则报名方式有 $C_2^1 C_7^0 + C_2^1 C_7^1 + C_2^1 C_7^2 = 58$ 种，

若每人报集体赛2项，则报名方式有 $C_2^2 C_7^0 + C_2^2 C_7^1 = 8$ 种，

所以每人共有报名方式 $58+8=66$ 种．

故选：C．

8. (5分) 设A, B是一个随机试验中的两个事件，且 $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{6}$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ，则（ ）

A. $P(A) = \frac{1}{3}$ B. $P(AB) = \frac{1}{6}$ C. $P(A+B) = \frac{3}{4}$ D. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{4}$

【答案】C

【分析】利用全概率公式结合条件可得 $P(A) = \frac{1}{2}$ ，然后利用和事件的概率公式和条件概率公式结合条件逐项分析即得．

【解答】解：因为 $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{6}$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{2}$,

所以 $P(B|A) = \frac{1}{6}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 又 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$,

所以 $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}P(A) + \frac{1}{2}P(\bar{A}) = \frac{1}{6}P(A) + \frac{1}{2}(1-P(A))$,

所以 $P(A) = \frac{1}{2}$ ，故A错误；

由 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{6}$, 可得 $P(AB) = \frac{1}{12}$, 故 B 错误;

所以 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$, 故 C 正确;

所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{4}$, $P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 故 D 错误.

故选: C .

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

(多选) 9. (5 分) 若 $a < b < c < 0$, 则下列不等式中正确的有 ()

- A. $|a|+b > 0$ B. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ C. $\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c}$ D. $a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a}$

【答案】AD

【分析】根据不等式的性质判断 A 、 B , 利用作差法判断 C 、 D .

【解答】解: 由题意可知, $-a > -b > -c > 0$, 则 $|a|+b = -a+b > 0$, 故 A 正确;

因为 $a < b < c < 0$, 所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 所以 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, 故 B 错误;

因为 $\frac{b}{a} - \frac{b+c}{a+c} = \frac{b(a+c) - a(b+c)}{a(a+c)} = \frac{c(b-a)}{a(a+c)}$, 又 $a < b < c < 0$,

所以 $a+c < 0$, $b-a > 0$, 所以 $\frac{c(b-a)}{a(a+c)} < 0$, 即 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$, 故 C 错误;

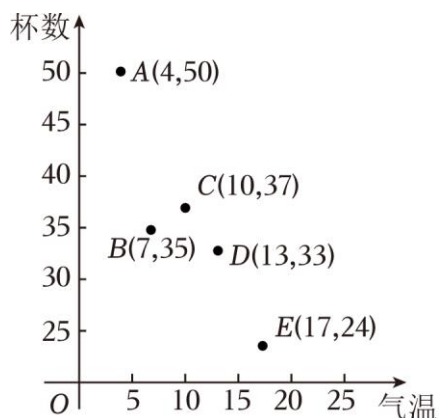
$a + \frac{1}{b} - (b + \frac{1}{a}) = a - b + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (a-b) + \frac{a-b}{ab} = (a-b)(1 + \frac{1}{ab})$,

因为 $a < b < c < 0$, 所以 $ab > 0$, $a-b < 0$, $1 + \frac{1}{ab} > 0$, 所以 $(a-b)(1 + \frac{1}{ab}) < 0$,

则 $a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a}$, 故 D 正确.

故选: AD.

(多选) 10. (5 分) 如图是某小卖部 5 天卖出热茶的杯数 (单位: 杯) 与当天气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的散点图, 若去掉 $B(7, 35)$ 后, 下列说法正确的有 ()



- A. 决定系数 R^2 变大
- B. 变量 x 与 y 的相关性变弱
- C. 相关系数 r 的绝对值变大
- D. 当气温为 11°C 时，卖出热茶的杯数估计为 35 杯

【答案】AC

【分析】由散点图可知，去掉 B 后，变量 x 与 y 的相关性变强可判断 ABC ；求出线性回归方程后可判断 D 。

【解答】解：由散点图可知，去掉 $B(7, 35)$ 后，变量 x 与 y 的相关性变强，故 B 错误；
因为是负相关，所以相关系数 r 的绝对值变大，故 C 正确；

决定系数 R^2 变大，故 A 正确；

$$\text{去掉 } B(7, 35) \text{ 后, } \bar{x} = \frac{4+10+13+17}{4} = 11, \bar{y} = \frac{50+37+33+24}{4} = 36,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 4 \times 50 + 10 \times 37 + 13 \times 33 + 17 \times 24 = 1407,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 4^2 + 10^2 + 13^2 + 17^2 = 861,$$

$$\text{所以 } b = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \bar{x}^2} = \frac{1407 - 4 \times 11 \times 36}{861 - 4 \times 121} \approx -0.47,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b \bar{x} = 36 + 0.47 \times 11 = 41.17,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y = -0.47x + 41.17$,

当气温为 11°C 时， $y = -0.47 \times 11 + 41.17 = 36$,

卖出热茶的杯数估计为 36 杯，故 D 错误。

故选：AC.

(多选) 11. (5 分) 有甲、乙、丙等 5 名同学聚会，下列说法正确的有 ()

- A. 5 名同学每两人握手 1 次，共握手 20 次
- B. 5 名同学相互赠送祝福卡片，共需要卡片 20 张
- C. 5 名同学围成一圈做游戏，有 120 种排法
- D. 5 名同学站成一排拍照，甲、乙相邻，且丙不站正中间，有 40 种排法

【答案】BD

【分析】利用组合的概念可判断 A，根据排列知识可判断 BC，利用捆绑法及间接法可判断 D.

【解答】解：A 选项，5 名同学每两人握手 1 次，共握手 $C_5^2=10$ 次，故 A 错误；

B 选项，5 名同学相互赠送祝福卡片，共需要卡片 $A_5^2=20$ 张，故 B 正确；

C 选项，5 名同学围成一圈做游戏，确定 4 个人之后，最后一个人的位置也就确定了，所以有 $A_4^4=24$ 种排法，故 C 错误；

D 选项，5 名同学站成一排拍照，甲、乙相邻，共有 $A_2^2 A_4^4=48$ 种排法，其中丙站正中间的排法有 $A_2^2 A_2^2 A_2^2=8$ 种，

所以甲、乙相邻，且丙不站正中间的排法有 $48 - 8=40$ 种，故 D 正确.

故选：BD.

(多选) 12. (5 分) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB=\sqrt{2}$ ， $PA=\sqrt{3}$ ，点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$ ，其中 $x\in[0, 1]$ ， $y\in[0, 1]$ ，则下列结论正确的有 ()

- A. $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值是 $\sqrt{2}$
- B. 当 $x=1$ 时，三棱锥 $P-ADQ$ 的体积为定值
- C. 当 $x=y$ 时， PB 与 PQ 所成角可能为 $\frac{\pi}{6}$
- D. 当 $x+y=1$ 时， AB 与平面 PAQ 所成角正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$

【答案】ABD

【分析】根据向量关系可得 Q 为正方形 $ABCD$ 内的点（包括边界），设 $AC\cap BD=O$ ，根据正棱锥的性质结合条件可得 $|\overrightarrow{PQ}| \geq |\overrightarrow{PO}|$ 判断 A，根据棱锥的体积公式结合条件可判断 B，根据线面角的求法结合条件可判断 C，利用坐标法表示出线面角，然后利用导数求最值可判断 D.

【解答】解：由 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，可得 $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，其中 $x \in [0, 1]$ ， $y \in [0, 1]$ ，

所以 Q 为正方形 $ABCD$ 内的点（包括边界），

在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB = \sqrt{2}$ ， $PA = \sqrt{3}$ ，设 $AC \cap BD = O$ ，连接 PO ，

则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $OA = OB = 1$ ， $PO = \sqrt{2}$ ，

对 A ，由题可知 $|\overrightarrow{PQ}| \geq |\overrightarrow{PO}| = \sqrt{2}$ ，当 Q, O 重合时取等号，故 A 正确；

对 C ，当 $x = y$ 时， $\overrightarrow{AQ} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = x\overrightarrow{AC}$ ，故 Q 在线段 AC 上，

由题可知 $PO \perp OB$ ， $OB \perp OA$ ， $PO \cap OA = O$ ， $PO, OA \subset$ 平面 PAC ，故 $OB \perp$ 平面 PAC ，

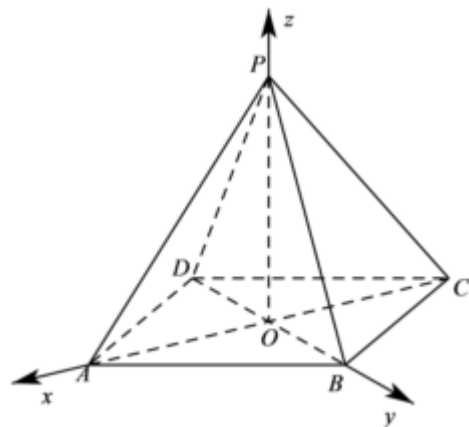
所以 PO 为 PB 在平面 PAC 内的射影， $\angle BPQ \geq \angle BPO$ ，

而在 $Rt\triangle POB$ 中， $\tan \angle BPO = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\angle BPO > \frac{\pi}{6}$ ， $\angle BPQ > \frac{\pi}{6}$ ，故 PB 与 PQ 所成角不可能为 $\frac{\pi}{6}$ ，故 C 错误；

对 B ，当 $x = 1$ 时， $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，即 $\overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{AD}$ ，故 Q 在线段 BC 上，

因为 $AD \parallel BC$ ，所以三角形 ADQ 的面积为定值，而三棱锥 $P-ADQ$ 的高 PO 为定值，故三棱锥 $P-ADQ$ 的体积为定值，故 B 正确；

对 D ，当 $x + y = 1$ 时， $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，故 Q 在线段 BD 上，



如图以 O 为原点建立空间直角坐标系，设 $Q(0, t, 0)$ ($-1 \leq t \leq 1$)，则

$A(1, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $P(0, 0, \sqrt{2})$ ，

所以 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{AQ} = (-1, t, 0)$ ，

设平面 PAQ 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$ ，则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -a + \sqrt{2}c = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AQ} = -a + tb = 0 \end{cases}$ ，

令 $\vec{b} = \sqrt{2}$, 则 $\vec{m} = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}, t)$, 设 AB 与平面 PAQ 所成角为 α ,

$$\text{所以 } \sin \alpha = \left| \frac{\vec{AB} \cdot \vec{m}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{m}|} \right| = \frac{|\sqrt{2} - \sqrt{2}t|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3t^2 + 2}} = \sqrt{\frac{(t-1)^2}{3t^2 + 2}},$$

$$\text{设 } f(t) = \frac{(t-1)^2}{3t^2 + 2}, t \in [-1, 1], \text{ 则 } f'(t) = \frac{2(t-1)(3t^2 + 2) - 6t(t-1)^2}{(3t^2 + 2)^2} = \frac{(t-1)(6t+4)}{(3t^2 + 2)^2},$$

所以当 $t \in [-1, -\frac{2}{3})$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增, 当 $t \in (-\frac{2}{3}, 1)$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减,

$$\text{所以 } f(t)_{\max} = f(-\frac{2}{3}) = \frac{(\frac{2}{3}-1)^2}{3(-\frac{2}{3})^2 + 2} = \frac{5}{6}, \sin \alpha \leq \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

故选: ABD .

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. (5 分) 随机变量 $X \sim N(5, \sigma^2)$, $P(X < 3) = \frac{1}{8}$, 则 $P(3 \leq X < 7) = \frac{3}{4}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【分析】 利用正态分布曲线的对称性求解即可.

【解答】 解: 因为随机变量 $X \sim N(5, \sigma^2)$, 可得正态分布曲线的对称轴为 $x=5$,

$$\text{又因为 } P(X < 3) = \frac{1}{8},$$

$$\text{所以 } P(X > 7) = \frac{1}{8}, P(X \leq 7) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$\text{所以 } P(3 \leq X < 7) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.

14. (5 分) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 M 在线段 CB_1 上, 且 $CM = 2MB_1$, 若以 $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AA_1}\}$ 为

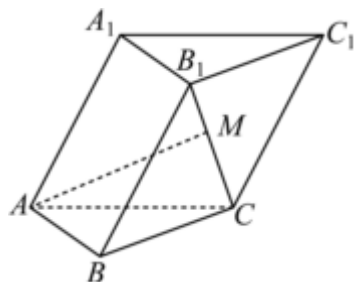
基底表示 $\vec{AM}$, 则 $\vec{AM} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}$.

【答案】 $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}$.

【分析】 利用向量的线性关系结合图形运算即得.

【解答】 解: 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 M 在线段 CB_1 上, 且 $CM = 2MB_1$,

所以 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB_1}$,



所以 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

故答案为: $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

15. (5 分) 已知 $x \neq -1$, 且 $x \neq 0$, 则 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^9$ 的展开式中 x^2 项的系数是 120. (用数字作答)

【答案】120.

【分析】利用二项式定理得到 $(1+x)^n$ ($n \geq 2$) 的展开式中 x^2 的系数为 C_n^2 , 进而得到答案.

【解答】解: 因为 $(1+x)^n$ ($n \geq 2$) 的展开式中 x^2 的系数为 C_n^2 ,

故 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^9$ 的展开式中 x^2 的系数
 $C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_9^2 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120$.

故答案为: 120.

16. (5 分) 已知随机变量 ξ 的概率分布列如下表所示, 当 $E(\xi) = \frac{3}{4}$ 时, $D(2\xi+1) = \underline{\frac{11}{4}}$.

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	a	b

【答案】 $\frac{11}{4}$.

【分析】依题意根据分布列的性质及期望公式求出 a, b , 即可求出 $D(\xi)$, 再根据方差的性质得到 $D(2\xi+1)$.

【解答】解: 依题意 $\begin{cases} a+b+\frac{1}{2}=1 \\ 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times a + 2 \times b = \frac{3}{4} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$,

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\therefore D(\xi) = \frac{1}{2} \times (0 - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{4} \times (1 - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{4} \times (2 - \frac{3}{4})^2 = \frac{11}{16},$$

$$\therefore D(2\xi + 1) = 4D(\xi) = \frac{11}{4},$$

故答案为： $\frac{11}{4}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $(2x - y)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大。

(1) 求展开式的第 2 项；

(2) 求展开式的奇数项系数之和。

【答案】(1) $T_2 = -192x^5y$;

(2) 365.

【分析】(1) 根据二项式系数的性质可得 $n=6$ ，然后根据二项式的通项公式即得；

(2) 设 $(2x-y)^6 = a_0x^6 + a_1x^5y + a_2x^4y^2 + \dots + a_6y^6$ ，然后利用赋值法即得。

【解答】解：(1) 因为 $(2x - y)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大，

根据二项式系数的性质：左右对称且先增后减，所以展开式共有 7 项，则 $n=6$ ，

所以展开式的第 2 项为 $T_2 = C_6^1(2x)^5(-y) = -192x^5y$;

(2) 设 $(2x-y)^6 = a_0x^6 + a_1x^5y + a_2x^4y^2 + \dots + a_6y^6$,

令 $x=y=1$ 得： $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 1$ ①

令 $x=1, y=-1$ 得： $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_6 = 3^6 = 729$ ②

由①②得 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 365$,

所以展开式的奇数项系数之和为 365.

18. (12 分) 某乡政府为提高当地农民收入，指导农民种植药材，取得较好的效果。以下是某农户近 5 年种植药材的平均收入的统计数据：

年份	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5
平均收入 y	59	61	64	68	73

(千元)					
------	--	--	--	--	--

(1) 根据表中数据，现有 $y=a+bx$ 与 $y=c+dx^2$ 两种模型可以拟合 y 与 x 之间的关系，请分别求出两种模型的回归方程；（结果保留一位小数）

(2) 统计学中常通过比较残差的平方和来比较两个模型的拟合效果，请根据残差平方和说明上述两个方程哪一个拟合效果更好，并据此预测 2023 年该农户种植药材的平均收入。

参考数据及公式： $\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = 217$ ， $\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = 374$ ，其中 $t_i = x_i^2$ ， $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 根据最小二乘法结合条件可得回归方程；

(2) 根据回归方程分别计算残差平方和，进而可得 $y=0.6x^2+58.4$ 拟合效果更好，然后根据回归方程结合条件即得。

【解答】解：(1) 根据农户近 5 年种植药材的平均收入情况的统计数据可得：

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3, \quad \bar{y} = \frac{1}{5}(59+61+64+68+73) = 65,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 35, \quad \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10,$$

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{35}{10} = 3.5,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 65 - 3.5 \times 3 = 54.5.$$

$$\text{设 } t = x^2, \text{ 则 } y = c + dx^2 = c + dt, \text{ 所以 } \bar{t} = \frac{1}{5}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 11,$$

$$\text{则 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{217}{374} \approx 0.6, \quad \hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{t} = 65 - 0.6 \times 11 = 58.4,$$

所以两种模型的回归方程分别为 $y=3.5x+54.5$ ， $y=0.6x^2+58.4$ 。

(2) 回归方程为 $y=3.5x+54.5$ 时，将 x 值代入可得估计值分别为 58, 61.5, 65, 68.5, 72，
 则残差平方和为 $(59-58)^2+(61-61.5)^2+(64-65)^2+(68-68.5)^2+(73-72)^2=3.5$.
 回归方程为 $y=0.6x^2+58.4$ 时，将 x 值代入可得估计值分别为 59, 60.8, 63.8, 68, 73.4，
 则残差平方和为 $(59-59)^2+(61-60.8)^2+(64-63.8)^2+(68-68)^2+(73-73.4)^2=0.24$.
 因为 $0.24<3.5$ ，所以回归方程 $y=0.6x^2+58.4$ 拟合效果更好，应选择该方程进行拟合.
 当 $x=6$ 时， $y=0.6\times 6^2+58.4=80$ ，
 故预测 2023 年该农户种植药材的平均收入为 80 千元，即 8 万元.

19. (12 分) 淮安西游乐园推出的西游主题毛绒公仔，具有造型逼真可爱、触感柔软等特点，深受学生喜爱. 某调查机构在参观西游乐园的游客中随机抽取了 200 名学生，对是否有购买西游主题毛绒公仔的意愿进行调查，得到以下的 2×2 列联表：

	有购买意愿	没有购买意愿	合计
男		40	
女	60		
合计		50	

(1) 完成上述 2×2 列联表，根据以上数据，判断是否有 99% 的把握认为购买西游主题毛绒公仔与学生的性别有关？

(2) 某文创商店为了宣传推广西游主题毛绒公仔产品，设计了一个游戏：在三个外观大小都一样的袋子中，分别放大小相同的 1 个红球和 3 个蓝球，2 个红球和 2 个蓝球，以及 3 个红球和 1 个蓝球. 游客可以从三个袋子中任选一个，再从中任取 2 个球，若取出 2 个红球，则可以获赠一套西游主题毛绒公仔. 现有 3 名同学参加该游戏， ξ 表示 3 名同学中获赠一套毛绒公仔的人数，求随机变量 ξ 的概率分布及数学期望.

附： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828



【答案】(1) 列联表见解析，没有 99% 的把握认为购买西游主题毛绒公仔与学生的性别有关；

(2) 分布列见解析，数学期望为 $\frac{2}{3}$.

【分析】(1) 由题可得列联表，进而可得 K^2 并结合条件即得；

(2) 先求出一次游戏中取出 2 个红球的概率，然后利用二项分布概率公式可得概率，进而可得分布列及期望.

【解答】解：(1) 由题可得 2×2 列联表如下：

	有购买意愿	没有购买意愿	合计
男	90	40	130
女	60	10	70
合计	150	50	200

提出假设 H_0 ：购买西游主题毛绒公仔与学生的性别无关，

根据列联表中的数据，可以求得：

$$K^2 = \frac{200(90 \times 10 - 60 \times 40)^2}{150 \times 50 \times 130 \times 70} = \frac{600}{91} \approx 6.5934 < 6.635,$$

因为当 H_0 成立时， $K^2 \geq 6.635$ 的概率大于 1%，所以没有 99% 的把握认为购买西游主题毛绒公仔与学生的性别有关.

$$(2) \text{ 一次游戏中取出 2 个红球的概率 } p = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{2}{9},$$

由题可知 $\xi = 0, 1, 2, 3$ ，则 $\xi \sim B(3, \frac{2}{9})$,

$$\text{所以 } P(\xi = 0) = (1 - \frac{2}{9})^3 = \frac{343}{729}, \quad P(\xi = 1) = C_3^1 \cdot \frac{2}{9} \cdot (1 - \frac{2}{9})^2 = \frac{98}{243},$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \cdot (\frac{2}{9})^2 \cdot (1 - \frac{2}{9}) = \frac{28}{243}, \quad P(\xi = 3) = C_3^3 \cdot (\frac{2}{9})^3 = \frac{8}{729},$$

所以随机变量 ξ 的概率分布为：

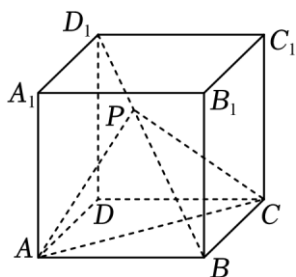
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

$$\text{所以 } E(\xi) = 0 \times \frac{343}{729} + 1 \times \frac{98}{243} + 2 \times \frac{28}{243} + 3 \times \frac{8}{729} = \frac{2}{3}.$$

20. (12 分) 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是对角线 BD_1 上异于 B, D_1 的点，记 $\frac{BP}{BD_1} = \lambda$.

(1) 当 $\angle APC$ 为锐角时，求实数 λ 的取值范围；

(2) 当二面角 $P - AC - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ 时，求点 B_1 到平面 PAC 的距离.



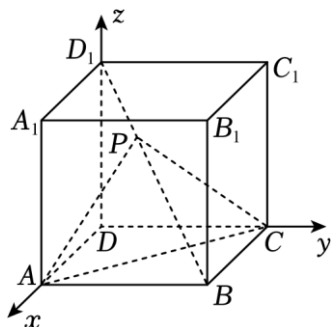
【答案】(1) $(\frac{2}{3}, 1)$;

(2) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

【分析】(1) 利用坐标法，表示出向量 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$ ，然后结合条件列出不等式，进而即得；

(2) 利用面面角的向量求法可得 $\lambda = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ，然后利用点到平面的距离的向量求法即得.

【解答】解：(1) 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



则 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

因为 $\frac{BP}{BD_1} = \lambda$, $0 < \lambda < 1$.

所以 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BD_1} = (-\lambda, -\lambda, \lambda)$.

则 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP} = (\lambda, \lambda - 1, -\lambda)$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = (\lambda - 1, \lambda, -\lambda)$.

由 $\angle APC$ 为锐角，

则 $\cos \angle APC = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PC}|} > 0$ 且 $\cos \angle APC \neq 1$.

则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 3\lambda^2 - 2\lambda > 0$.

解得 $\frac{2}{3} < \lambda < 1$,

即实数 λ 的取值范围为 $(\frac{2}{3}, 1)$;

(2) 设平面 APC 的法向量 $\overrightarrow{n_1} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \text{ 且 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PA} = (\lambda, \lambda - 1, -\lambda), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0),$$

$$\text{所以 } \lambda x + (\lambda - 1)y - \lambda z = 0, -x + y = 0.$$

$$\text{则可取 } \overrightarrow{n_1} = (1, 1, 2 - \frac{1}{\lambda}).$$

$$\text{易知平面 } ABC \text{ 的一个法向量 } \overrightarrow{n_2} = (0, 0, 1).$$

$$\text{因为二面角 } P-AC-B \text{ 为 } \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } |\cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \left| \frac{2 - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{2 + (2 - \frac{1}{\lambda})^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因为 } 0 < \lambda < 1,$$

$$\text{则 } \lambda = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{则平面 } APC \text{ 的一个法向量 } \overrightarrow{n_1} = (1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$\text{又向量 } \overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 1),$$

$$\text{所以点 } B_1 \text{ 到平面 } PAC \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$21. (12 \text{ 分}) \text{ 已知函数 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2mx, & x \leq 2 \\ m - x + \frac{4}{2-x}, & x > 2 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

(1) 当 $x \leq 2$ 时, 求 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为 3, 求 m 的值.

【答案】 (1) 当 $m < 0$ 时, 不等式的解集为 $(2m, 0)$; 当 $m = 0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $0 < m \leq 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 2m)$; 当 $m > 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 2]$.

$$(2) m = \pm \sqrt{3}.$$

【分析】 (1) 根据二次不等式的解法, 分类讨论即得;

(2) 当 $x > 2$ 时利用基本不等式可得函数的最大值, 进而可得 $m = 9$ 然后结合条件即得, 当 $x \leq 2$ 时根据二次函数的性质分类讨论可得函数的最值, 然后结合条件检验即得.

【解答】 解: (1) 当 $x \leq 2$ 时, $-x^2 + 2mx > 0$, 即 $x(x - 2m) < 0$.

当 $m < 0$ 时, $2m < x < 0$;

当 $m=0$ 时, 不等式无解;

当 $m>0$ 时, 若 $m\leq 1$, $0<x<2m$,

若 $m>1$, $0<x\leq 2$;

所以当 $m<0$ 时, 不等式的解集为 $(2m, 0)$;

当 $m=0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $0<m\leq 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 2m)$;

当 $m>1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 2]$.

$$(2) \textcircled{1} \text{ 当 } x>2 \text{ 时, } f(x)=m-x+\frac{4}{2-x}=m-2-\left[(x-2)+\frac{4}{x-2}\right],$$

又 $x-2>0$, 则 $(x-2)+\frac{4}{x-2}\geq 4$, 当且仅当 $x=4$ 取等号,

所以 $f(x)_{\max}=m-2-4=m-6=3$, 即 $m=9$,

若 $m=9$ 时, 当 $x\leq 2$ 时, $f(x)=-x^2+2mx=-x^2+18x$.

此时 $f(x)_{\max}=f(2)=32>3$,

所以 $m=9$ 不满足题意, 舍去.

$\textcircled{2}$ 当 $x\leq 2$ 时, $f(x)=-x^2+2mx$ 的对称轴为 $x=m$,

当 $m\leq 2$ 时, $f(x)_{\max}=f(m)=m^2=3$, $m=\pm\sqrt{3}$.

当 $m>2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 时增函数,

$f(x)_{\max}=f(2)=4m-4=3$, 即 $m=\frac{7}{4}$ (舍去).

若 $m=\pm\sqrt{3}$. 当 $x>2$ 时, $f(x)_{\max}=m-6=\pm\sqrt{3}-6<3$, 满足题意.

综上, $m=\pm\sqrt{3}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 3.

22. (12 分) 投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏. 晋代在广泛开展投壶活动中, 对投壶的壶也有所改进, 即在壶口两旁增添两耳, 因此在投壶的花式上就多了许多名目, 如“贯耳 (投入壶耳)”等. 现有甲、乙两人进行投壶游戏, 规定投入壶口一次得 1 分, 投入壶耳一次得 2 分, 其余情况不得分. 已知甲投入壶口的概率为 $\frac{1}{3}$, 投入壶耳的概率为 $\frac{1}{6}$; 乙投入壶口的概率为 $\frac{2}{3}$, 投入壶耳的概率为 $\frac{1}{3}$. 假设甲乙两人每次投壶是否投中相互独立.

(1) 求甲投壶 3 次得分为 3 分的概率;

(2) 求乙投壶多少次, 得分为 8 分的概率最大.



【答案】 (1) $\frac{11}{54}$;

(2) 乙投壶 6 次时，得分为 8 分的概率最大.

【分析】 (1) 根据互斥事件求和公式及独立事件的乘法公式即得；

(2) 设乙投壶 n 次时得分为 (8 分) 的概率为 $P(n)$ ，根据独立事件概率公式可得 $P(n) = C_n^{2n-8} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-8} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-n}$ ，然后根据条件可得不等式组，进而即得；或结合条件可得 n 的值，分别计算概率比较即得.

【解答】 解：(1) 因为甲投入壶口概率为 $\frac{1}{3}$ ，投入壶耳概率为 $\frac{1}{6}$ ，

所以甲未投中的概率为 $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ，

设事件 A 为甲投壶 3 次得分为 3 分，

则 $P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times A_3^3 = \frac{11}{54}$;

(2) 设乙投壶 n 次时得分为 8 分的概率为 $P(n)$ ，设投壶 n 次中投入壶口 x 次，投入壶耳 y 次，

则 $\begin{cases} x+y=n \\ x+2y=8 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} x=2n-8 \\ y=8-n \end{cases}$ ，

则 $P(n) = C_n^{2n-8} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-8} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-n}$ ，

所以 $\begin{cases} P(n) \geq P(n+1) \\ P(n) \geq P(n-1) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} C_n^{2n-8} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-8} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-n} \geq C_{n+1}^{2n-6} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-6} \left(\frac{1}{3}\right)^{7-n} \\ C_n^{2n-8} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-8} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-n} \geq C_{n-1}^{2n-10} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-10} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-n} \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} 8n^2 - 53n + 47 \geq 0 \\ 8n^2 - 69n + 108 \leq 0 \end{cases}$ ，结合 $n \in \mathbb{N}^*$ 可得 $n=6$ ，

所以乙投壶 6 次时，得分为 8 分的概率最大.