

2023-2024 学年江苏省无锡市市北高级中学高二（上）期初数学试卷

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

- （5 分）若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| =$ （ ）
A. 1 B. 5 C. 7 D. 25
- （5 分）设 α, β 为两个不同的平面， m, n 为两条不同的直线，下列命题正确的是 （ ）
A. 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$
B. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $m \perp \beta, n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$
D. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$ ，则 $n \perp \alpha$
- （5 分）若圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$ ，侧面展开图的面积为 6π ，则该圆锥的体积是 （ ）
A. $\sqrt{3}\pi$ B. 3π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 9π
- （5 分）若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空间三个单位向量， $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 60° ， $\vec{a} \perp \vec{c}$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{10}$ ，则 $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle =$ （ ）
A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°
- （5 分）三星堆古遗址作为“长江文明之源”，被誉为人类最伟大的考古发现之一。3 号坑发现的神树纹玉琮，为今人研究古蜀社会中神树的意义提供了重要依据。玉琮是古人用于祭祀的礼器，有学者认为其外方内圆的构造，契合了古代“天圆地方”观念，是天地合一的体现，如图，假定某玉琮形状对称，由一个空心圆柱及正方体构成，且圆柱的外侧面内切于正方体的侧面，圆柱的高为 12cm ，圆柱底面外圆周和正方体的各个顶点均在球 O 上，则球 O 的表面积为 （ ）



- （5 分） P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，满足 $|\vec{PB} - \vec{PC}| - |\vec{PB} + \vec{PC} - 2\vec{PA}| = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是 （ ）
A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形 D. 等边三角形

7. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2AC=2$, P, Q 为线段 BC 上的点, 且 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$. 若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=\frac{5}{9}$, 则 $\angle BAC$ = ()

- A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

8. (5分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c-b=2b\cos A$. 若 $\lambda\sin A - \cos(C-B) < 2$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ B. $(-\infty, 2\sqrt{2})$ C. $(-\infty, \frac{5\sqrt{3}}{3}]$ D. $(-\infty, \frac{5\sqrt{3}}{3})$

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共计20分，在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

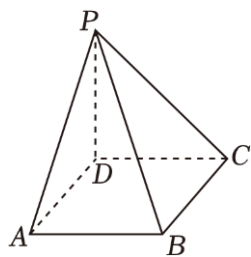
（多选）9. (5分) 下面四个命题中的真命题为 ()

- A. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$
 B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$
 C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 = \overline{z_2}$
 D. 若复数 $z \in \mathbf{R}$, 则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$

（多选）10. (5分) 下列选项中正确的是 ()

- A. 设向量 $\vec{a}=(1, x-1)$, $\vec{b}=(x+1, 3)$, 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线, 则 $x=\pm 2$
 B. 已知点 $O(0, 0)$, 向量 $\overrightarrow{OA}=(1, 3)$, $\overrightarrow{OB}=(4, 0)$, 点 P 是线段 AB 的三等分点, 则点 P 的坐标是 $(2, 2), (3, 0)$
 C. 若 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(4, 1)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的坐标为 $(-\frac{8}{17}, -\frac{2}{17})$
 D. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$, 则 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 的最大值是5

（多选）11. (5分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是边长为1的菱形, 且 $\angle ADC=120^\circ$, $PD=AD$, 则 ()

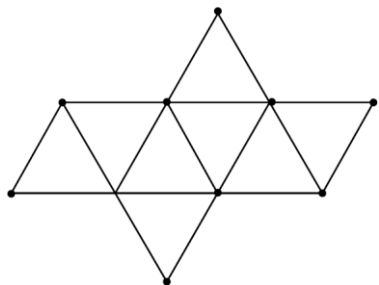


- A. $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{DP} = 1$ B. $(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}$

C. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}$

（多选）12.（5分）已知某多面体的平面展开图如图所示，每个面都是边长为2的正三角形，则下列结论正确的是（ ）



A. 该多面体的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

B. 该多面体的外接球的表面积为 8π

C. 该多面体的内切球的体积为 $\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$

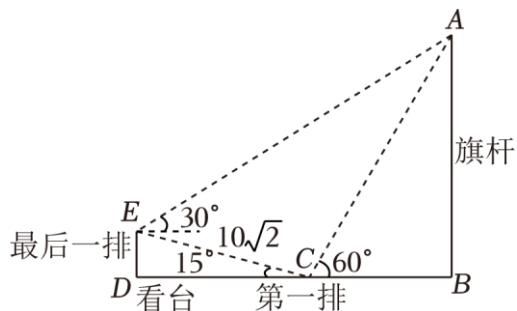
D. 该多面体的表面积为 8

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共计20分。请把答案写在答题卡相应位置上）

13.（5分）已知向量 $\vec{a} = (1 - \sin\theta, -1)$ ， $\vec{b} = (1 + \sin\theta, \frac{1}{3})$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\cos 2\theta$ = _____.

14.（5分）已知A、B、C三点共线，则对空间任一点O，存在三个不为零的实数 λ 、 m 、 n 使 $\lambda \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{OB} + n \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，那么 $\lambda + m + n$ 的值等于_____.

15.（5分）中华人民共和国国歌有84个字，37小节，奏唱需要45秒，某校周一举行升旗仪式，旗杆正好处在坡度 15° 的看台的某一列的正前方，从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为 60° 和 30° ，第一排和最后一排的距离为 $10\sqrt{2}$ 米如图所示，旗杆底部与第一排在同一个水平面上，要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部，升旗手升旗的速度应为 _____ 米/秒.



16.（5分）已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的6个顶点都在球O的表面上，若

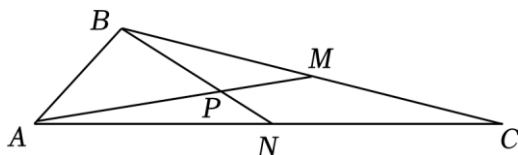
$AB=AC=1$, $AA_1=2\sqrt{3}$, $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$, 则球 O 的体积为 _____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\vec{AB}|=2$, $|\vec{AC}|=6\sqrt{2}$, $\angle BAC=45^\circ$, BC , AC 边上的两条中线 AM , BN 相交于点 P .

(1) 求 $|\vec{AM}|$;

(2) 求 $\angle MPN$ 的余弦值.

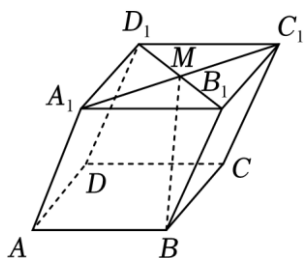


18. (12 分) 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都是 1，且它们彼此的夹角都是 60° , M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点. 已知 $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, $\vec{AA_1}=\vec{c}$.

(1) 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示 $\vec{BM}$;

(2) 求对角线 AC_1 的长;

(3) 求 $\cos\langle \vec{A_1B_1}, \vec{AC_1} \rangle$.

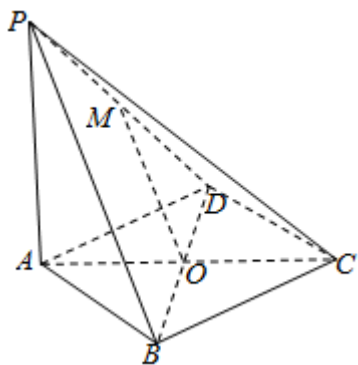


19. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形，点 O 是对角线 AC 与 BD 的交点， $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, M 是 PD 的中点.

(I) 求证: $OM \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;

(III) 当三棱锥 $C-PBD$ 的体积等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求 PA 的长.



20. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2(a-b)}{c} = \frac{2\sin C - \sin B}{\sin A + \sin B}$.

(1) 求 $\cos A$;

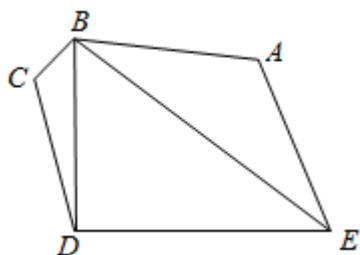
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{15}$, AD 为内角 A 的角平分线, 交 BC 边于点 D , 求线段 AD 长的最大值.

21. (12 分) 杭州市为迎接 2022 的亚运会, 规划公路自行车比赛赛道, 该赛道的平面示意图为如图的五边形 $ABCDE$, 运动员的公路自行车比赛中如出现故障, 可以从本队的器材车、公共器材车上或收容车上获得帮助. 比赛期间, 修理或更换车轮或赛车等, 也可在固定修车点进行. 还需要运送一些补给物品, 例如食物、饮料、工具和配件. 所以项目设计需要预留出 BD, BE 为赛道内的两条服务通道 (不考虑宽度), ED, DC, CB, BA, AE 为赛道, $\angle BCD = \angle BAE = \frac{2\pi}{3}$, $\angle CBD = \frac{\pi}{4}$, $CD = 2\sqrt{6} \text{ km}$, $DE = 8 \text{ km}$.

(1) 从以下两个条件中任选一个条件, 求服务通道 BE 的长度;

① $\angle CDE = \frac{7\pi}{12}$; ② $\cos \angle DBE = \frac{3}{5}$.

(2) 在 (1) 的条件下, 应该如何设计, 才能使折线赛道 BAE 最长 (即 $BA + AE$ 最大), 最长值为多少?



22. (12 分) 已知向量 $\vec{a} = (\cos \frac{3x}{2}, \sin \frac{3x}{2})$, $\vec{b} = (\cos \frac{x}{2}, -\sin \frac{x}{2})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - m|\vec{a} + \vec{b}| + 1$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 求实数 x 的值;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 -1 , 求实数 m 的值;

(3) 是否存在实数 m , 使函数 $g(x) = f(x) + \frac{24}{49}m^2$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 有四个不同的零点? 若存在,

求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2023-2024 学年江苏省无锡市市北高级中学高二（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

1.（5 分）若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| =$ （ ）

- A. 1 B. 5 C. 7 D. 25

【答案】B

【分析】把已知等式变形，再由商的模等于模的商求解.

【解答】解：由 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，得 $z = \frac{3-4i}{i}$ ，

$$\therefore |z| = \left| \frac{3-4i}{i} \right| = \frac{|3-4i|}{|i|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}{1} = 5.$$

故选：B.

2.（5 分）设 α, β 为两个不同的平面， m, n 为两条不同的直线，下列命题正确的是（ ）

- A. 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$
 B. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
 C. 若 $m \perp \beta, n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$
 D. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$ ，则 $n \perp \alpha$

【答案】C

【分析】对于 A， $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$ ；对于 B， α 与 β 相交或平行；对于 C，由线面垂直的性质和线面平行的性质得 $m \perp n$ ；对于 D， n 与 α 相交、平行或 $n \subset \alpha$.

【解答】解： α, β 为两个不同的平面， m, n 为两条不同的直线，

对于 A，若 $m \parallel n, n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$ ，则 α 与 β 相交或平行，故 B 错误；

对于 C，若 $m \perp \beta, n \parallel \beta$ ，则由线面垂直的性质和线面平行的性质得 $m \perp n$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$ ，则 n 与 α 相交、平行或 $n \subset \alpha$ ，故 D 错误.

故选：C.

3.（5 分）若圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$ ，侧面展开图的面积为 6π ，则该圆锥的体积是（ ）

- A. $\sqrt{3}\pi$ B. 3π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 9π

【答案】B

【分析】求出圆锥的底面圆半径，再求出圆锥的高和体积。

【解答】解：设圆锥的底面圆半径为 r ，因为母线长为 $2\sqrt{3}$ ，
所以侧面展开图的面积为 $\pi r \times 2\sqrt{3} = 6\pi$ ，
解得 $r = \sqrt{3}$ ，
所以圆锥的高为 $h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ ，
所以圆锥的体积是 $V = \frac{1}{3}\pi \times (\sqrt{3})^2 \times 3 = 3\pi$ 。

故选：B。

4. (5 分) 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是空间三个单位向量， $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 60° ， $\vec{a} \perp \vec{c}$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{10}$ ，则 $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
= ()

A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

【答案】D

【分析】根据模长转化为数量积，再根据单位向量求模根据夹角计算数量积，进而求出夹角余弦，结合向量夹角范围求解即可。

【解答】解： $\because |\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{10}$ ，
 $\therefore (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 9\vec{c}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{c} + 12\vec{b} \cdot \vec{c} = 10$ ，
因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是空间三个单位向量， $\therefore \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$ ，
 $\therefore 10 = 1 + 4 + 9 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{c} + 12\vec{b} \cdot \vec{c}$ ，
因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 60° ， $\vec{a} \perp \vec{c}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore 10 = 1 + 4 + 9 + 2 + 12|\vec{b}| \times |\vec{c}| \cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ ， $\therefore \cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\frac{1}{2}$ ，
又 $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \in [0^\circ, 180^\circ]$ ， $\therefore \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 120^\circ$ 。

故选：D。

5. (5 分) 三星堆古遗址作为“长江文明之源”，被誉为人类最伟大的考古发现之一。3 号坑发现的神树纹玉琮，为今人研究古蜀社会中神树的意义提供了重要依据。玉琮是古人用于祭祀的礼器，有学者认为其外方内圆的构造，契合了古代“天圆地方”观念，是天地合一的体现，如图，假定某玉琮形状对称，由一个空心圆柱及正方体构成，且圆柱的外侧面内切于正方体的侧面，圆柱的高为 12cm ，圆柱底面外圆

周和正方体的各个顶点均在球 O 上，则球 O 的表面积为（ ）



- A. $72\pi\text{cm}^2$ B. $162\pi\text{cm}^2$ C. $216\pi\text{cm}^2$ D. $288\pi\text{cm}^2$

【答案】C

【分析】根据题意可知正方体的体对角线即是外接球的直径，又因圆柱的外侧面内切于正方体的侧面，可利用勾股定理得出正方体棱长，继而求出球的表面积。

【解答】解：不妨设正方体的棱长为 $2a$ ，球 O 的半径为 R ，则圆柱的底面半径为 a ，

因为正方体的体对角线即为球 O 直径，故 $2R=2\sqrt{3}a$ ，

利用勾股定理得： $6^2+a^2=R^2=3a^2$ ，解得 $a^2=18$ ，球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times 3\times 18=216\pi$ 。

故选：C。

- 6.（5分） P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，满足 $|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）

- A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形 D. 等边三角形

【答案】B

【分析】根据平面向量的线性运算与模长公式，可以得出 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ，即 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$ ， $\triangle ABC$ 是直角三角形。

【解答】解： P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，且 $|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$ ，

$$\therefore |\overrightarrow{CB}|-|(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})|=0,$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|,$$

$$\text{两边平方并化简得 } \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \angle A=90^\circ,$$

则 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

故选: B.

7. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2AC=2$, P, Q 为线段 BC 上的点, 且 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$. 若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=\frac{5}{9}$, 则 $\angle BAC$ = ()

A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

【答案】B

【分析】由平面向量数量积的运算, 结合平面向量的夹角的运算求解即可.

【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2AC=2$, P, Q 为线段 BC 上的点, 且 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$,

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}) = \frac{5}{9},$$

$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}) = \frac{5}{9},$$

$$\therefore (\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) \cdot (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{5}{9},$$

$$\therefore 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC}^2 + 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5,$$

$$\therefore 2 \times 4 + 2 \times 1 + 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = -1,$$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2},$$

即 $\angle BAC = 120^\circ$,

故选: B.

8. (5分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c - b = 2b \cos A$. 若 $\lambda \sin A - \cos(C - B) < 2$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ B. $(-\infty, 2\sqrt{2})$ C. $(-\infty, \frac{5\sqrt{3}}{3}]$ D. $(-\infty, \frac{5\sqrt{3}}{3})$

【答案】C

【分析】由 $c - b = 2b \cos A$ 可得 $A = 2B$, 从而有 $C = \pi - 3B$, 由不等式 $\lambda \sin A - \cos(C - B) < 2$ 恒成立,

可得 $2\sin^2 2B - \lambda \sin 2B + 1 > 0$ 恒成立, 其中 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$, 设 $t = \sin 2B$, $t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, 则有 $2t^2 - \lambda t + 1$

>0 在 $t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 上恒成立，结合二次函数的性质，列出不等式组求解即可。

【解答】解：因为 $c - b = 2b \cos A$,

所以 $\sin C - \sin B = 2 \sin B \cos A$,

即有 $\sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin B = 2 \sin B \cos A$,

所以 $\sin A \cos B - \sin B = \sin B \cos A$,

$\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin B$,

$\sin(A - B) = \sin B$,

又因为 A, B, C 均为锐角，

所以 $A - B \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

所以 $A - B = B, A = 2B$,

$C = \pi - A - B = \pi - 3B$,

所以 $\cos(C - B) = \cos(\pi - 4B) = -\cos 4B = -(1 - 2\sin^2 2B) = 2\sin^2 2B - 1$,

因为 $\begin{cases} 0 < A = 2B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C = \pi - 3B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$,

又因为 $\lambda \sin A - \cos(C - B) < 2$ 恒成立，

即 $\lambda \sin 2B - (2\sin^2 2B - 1) < 2 \Leftrightarrow -2\sin^2 2B + \lambda \sin 2B + 1 < 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 2B - \lambda \sin 2B + 1 > 0$ 恒成立，其中 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$,

因为 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$, 所以 $2B \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $\sin 2B \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$,

设 $t = \sin 2B, t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$,

则有 $2t^2 - \lambda t + 1 > 0$ 在 $t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 上恒成立，

由二次函数的性质可得：

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{4} \geq 1 \\ 2 - \lambda + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{\lambda}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda + 1 \geq 0 \end{cases},$$

解得 $\lambda \leq \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分，在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

（多选）9.（5 分）下面四个命题中的真命题为（ ）

A. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$

B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$

C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z_1 = \overline{z_2}$

D. 若复数 $z \in \mathbf{R}$ ，则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$

【答案】AD

【分析】根据复数的分类，有复数性质，逐一分析给定四个命题的真假，可得答案.

【解答】解：若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$ ，故命题 A 为真命题；

复数 $z=i$ 满足 $z^2 = -1 \in \mathbf{R}$ ，则 $z \notin \mathbf{R}$ ，故命题 B 为假命题；

若复数 $z_1=i, z_2=2i$ 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$ ，但 $z_1 \neq \overline{z_2}$ ，故命题 C 为假命题；

若复数 $z \in \mathbf{R}$ ，则 $\overline{z} = z \in \mathbf{R}$ ，故命题 D 为真命题.

故选：AD.

（多选）10.（5 分）下列选项中正确的是（ ）

A. 设向量 $\vec{a} = (1, x-1)$ ， $\vec{b} = (x+1, 3)$ ，若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线，则 $x = \pm 2$

B. 已知点 $O(0, 0)$ ，向量 $\vec{OA} = (1, 3)$ ， $\vec{OB} = (4, 0)$ ，点 P 是线段 AB 的三等分点，则点 P 的坐标是 $(2, 2), (3, 0)$

C. 若 $\vec{a} = (-1, 2)$ ， $\vec{b} = (4, 1)$ ，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的坐标为 $(-\frac{8}{17}, -\frac{2}{17})$

D. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 2$ ，则 $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ 的最大值是 5

【答案】ACD

【分析】根据向量共线的坐标公式、数乘的几何意义、投影向量的计算以及数量积的运算律，可得答案.

【解答】解：对于 A，由 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线，得 $1 \times 3 - (x-1)(x+1) = 0$ ，解得 $x = \pm 2$ ，故 A 正确；

对于 B，由向量 $\vec{OA} = (1, 3)$ ， $\vec{OB} = (4, 0)$ ，得 $\vec{AB} = (3, -3)$ ，

设 $P(x, y)$ ，则 $\vec{AP} = (x-1, y-3)$ ，

由 P 是线段 AB 的三等分点，则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ，

可得 $\begin{cases} x-1 = \frac{1}{3} \times 3 \\ y-3 = \frac{1}{3} \times (-3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 = \frac{2}{3} \times 3 \\ y-3 = \frac{2}{3} \times (-3) \end{cases}$ ，解得 $(2, 2)$ 或 $(3, 1)$ ，故 B 错误；

对于 C ，设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} (4, 1) = (-\frac{8}{17}, -\frac{2}{17})$ ，故 C 正确；

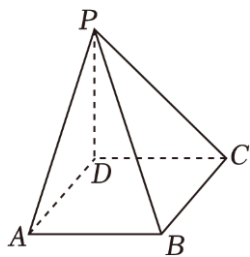
对于 D ， $|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$ ，设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，由 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 2$ ，

可得 $|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}|^2 \cos \theta + 16|\vec{a}|^2 = 17 - 8\cos \theta$ ，

当 $\cos \theta = -1$ 时， $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 取得最大值为 5 ，故 D 正确。

故选：ACD。

(多选) 11. (5 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，且 $\angle ADC = 120^\circ$ ， $PD = AD$ ，则 ()



A. $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{DP} = 1$

B. $(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}$

C. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}$

【答案】BD

【分析】利用数量积的定义和运算律，结合图形，即可求解。

【解答】解：因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 PD 垂直于平面 $ABCD$ 内的任何一条直线，

因为四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，且 $\angle ADC = 120^\circ$ ，所以 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 是等边三角形，

A. $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$ ，故 A 错误；

B. $(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ，故 B 正确；

C. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}) = \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DP}$

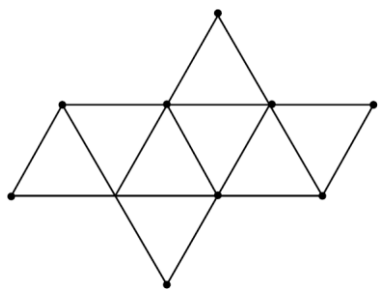
$$= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } C \text{ 错误};$$

$$D. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DP}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BD}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } D \text{ 正确}.$$

故选：BD.

(多选) 12. (5 分) 已知某多面体的平面展开图如图所示，每个面都是边长为 2 的正三角形，则下列结论正确的是 ()



A. 该多面体的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

B. 该多面体的外接球的表面积为 8π

C. 该多面体的内切球的体积为 $\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$

D. 该多面体的表面积为 8

【答案】ABC

【分析】根据条件，可知该几何体是每个面都是正三角形的正八面体，然后依次判断各个选项即可.

【解答】解：如图所示，该多面体是每个面都是正三角形的正八面体，

其中四棱锥 $P-ABCD$ 和四棱锥 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥，

所以四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\begin{aligned} V_{\text{八面体}} &= 2V_{P-ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot PO \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 } A \text{ 正确}; \end{aligned}$$

连接 AB, CD, PQ ，三条直线相交于点 O ,

$$\text{因为 } OA = OB = OC = OD = OP = OQ = \sqrt{2},$$

所以 O 为正八面体的外接球球心，且外接球的半径为 $\sqrt{2}$,

$$\text{故 } S_{\text{外接球}} = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi. \text{ 故 } B \text{ 正确};$$

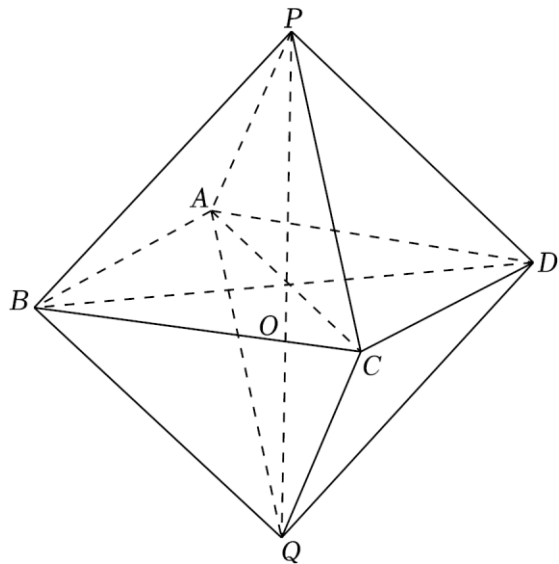
正八面体内切球的半径即点 O 到平面 ABP 的距离，设为 r ,

则 $V_{O-ABP} = V_{P-AOB} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}$, 解得 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

故 $V_{\text{内切球}} = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\sqrt{6}}{27}$, 故 C 正确;

$S_{\text{八面体}} = 8S_{\triangle ABP} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 8\sqrt{3}$, 故 D 错误.

故选: ABC.



三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。请把答案写在答题卡相应位置上）

13. (5 分) 已知向量 $\vec{a} = (1 - \sin \theta, -1)$, $\vec{b} = (1 + \sin \theta, \frac{1}{3})$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\cos 2\theta = \underline{-\frac{1}{3}}$.

【答案】 $-\frac{1}{3}$.

【分析】 根据平面向量垂直的性质，结合平面向量数量积的坐标表示公式、降幂公式进行求解即可.

【解答】 解: 因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 \theta - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{3}.$$

故答案为: $-\frac{1}{3}$.

14. (5 分) 已知 A、B、C 三点共线，则对空间任一点 O，存在三个不为零的实数 λ 、 m 、 n 使 $\lambda \vec{OA} + m \vec{OB} + n \vec{OC} = \vec{0}$, 那么 $\lambda + m + n$ 的值等于 0.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 根据向量共线的条件，存在实数 k ，使得 $\vec{AB} = k \vec{BC}$. 由此化简得 $\vec{OA} - (k+1) \vec{OB} + k \vec{OC} = \vec{0}$, 再与已知等式比较系数，结合讨论即可得到 $\lambda + m + n$ 的值为 0.

【解答】解：∵A、B、C 三点共线，∴存在实数 k ，使得 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}), \text{化简整理得: } \overrightarrow{OA} - (k+1)\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\therefore \lambda \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{OB} + n \overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

∴①当 $k = -1$ 时，比较系数得： $m = 0$ 且 $\lambda = -n$ ，所以 $\lambda + m + n = 0$

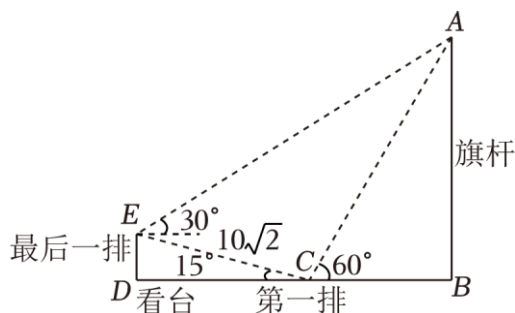
②当 $k \neq -1$ 时，可得 $\frac{\lambda}{1} = \frac{m}{-k-1} = \frac{n}{k}$ ，得 $m = (-k-1)\lambda$ ， $n = k\lambda$

由此可得： $\lambda + m + n = \lambda + (-k-1)\lambda + k\lambda = 0$

综上所述， $\lambda + m + n$ 的值为 0

故答案为：0

15. (5 分) 中华人民共和国国歌有 84 个字，37 小节，奏唱需要 45 秒，某校周一举行升旗仪式，旗杆正好处在坡度 15° 的看台的某一列的正前方，从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为 60° 和 30° ，第一排和最后一排的距离为 $10\sqrt{2}$ 米如图所示，旗杆底部与第一排在同一个水平面上，要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部，升旗手升旗的速度应为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 米/秒。



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

【分析】根据题意求得角，利用正弦定理求得边长，再根据直角三角形边角关系求出旗杆的高度即可求解。

【解答】解：依题意知 $\angle AEC = 45^\circ$ ， $\angle ACE = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$ ，

所以 $\angle EAC = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$ ，

由正弦定理知 $\frac{CE}{\sin \angle EAC} = \frac{AC}{\sin \angle AEC}$ ，

所以 $AC = \frac{10\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \times \sin 45^\circ = 20$ ，

所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC \cdot \sin \angle ACB = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ ，

因为国歌奏唱需要 45s，所以升旗手升旗的速度应为 $\frac{10\sqrt{3}}{45} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ m/s}$ 。

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 。

16. (5 分) 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的表面上，若 $AB=AC=1$ ， $AA_1=2\sqrt{3}$ ， $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$ ，则球 O 的体积为 $\frac{32\pi}{3}$ 。

【答案】 $\frac{32\pi}{3}$ 。

【分析】 根据正余弦定理可得 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，然后根据球的性质结合条件可得球的半径，再利用球的体积公式求解。

【解答】 解：在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB=AC=1$ ， $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$ ，

得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot \cos\angle BAC=1+1-2\times 1\times 1\times (-\frac{1}{2})=3$ ，

即 $BC=\sqrt{3}$ ， $\therefore \triangle ABC$ 的外接圆半径为 $r=\frac{1}{2}\cdot \frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{1}{2}\times \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ ，

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1=2\sqrt{3}$ ，

设球 O 的半径为 R ，则 $R=\sqrt{r^2+(\frac{2\sqrt{3}}{2})^2}=2$ ，

因此球 O 的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$ 。

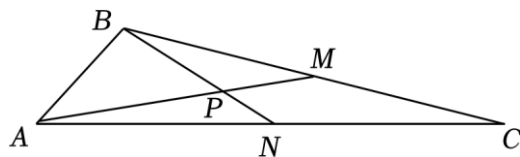
故答案为： $\frac{32\pi}{3}$ 。

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=2$ ， $|\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{2}$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， BC ， AC 边上的两条中线 AM ， BN 相交于点 P 。

(1) 求 $|\overrightarrow{AM}|$ ；

(2) 求 $\angle MPN$ 的余弦值。



【答案】 见试题解答内容

【分析】(1) 由条件可得， $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，两边平方，并结合向量的数量积公式，即可求解。

(2) $\angle MPN$ 与 $\overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{BN}$ 的夹角相等，再结合向量的夹角公式，即可求解。

【解答】解：(1) $\because M$ 为 BC 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC),$$

$$\because |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{2}, \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AM}|^2 = 25,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AM}| = 5.$$

(2) $\because N$ 为 AC 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 72 - \frac{1}{2} \times 12 - 4\right) = 13,$$

$$|\overrightarrow{BN}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2} = \sqrt{18 - 12 + 4} = \sqrt{10},$$

$$\cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN} \rangle = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BN}|} = \frac{13}{5 \times \sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{50},$$

$\angle MPN$ 与 $\overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{BN}$ 的夹角相等，

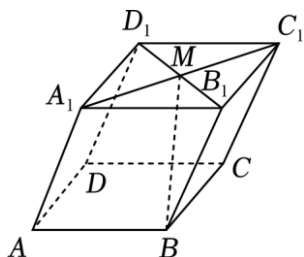
则 $\angle MPN$ 的余弦值为 $\frac{13\sqrt{10}}{50}$ 。

18. (12 分) 如图，在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都是 1，且它们彼此的夹角都是 60° ， M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点。已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ 。

(1) 用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{BM}$ ；

(2) 求对角线 AC_1 的长；

(3) 求 $\cos \langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle$ 。



【答案】(1) $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

(2) $\sqrt{6}$;

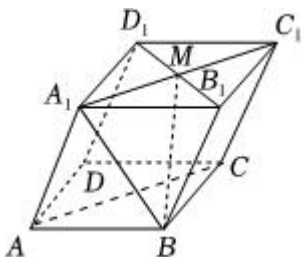
(3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【分析】(1) 根据已知条件，结合空间向量的线性运算，即可求解.

(2) 利用向量 $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ，可求对角线 AC_1 的长；

(3) 利用向量的夹角公式可求异面直线 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\overrightarrow{AC_1}$ 夹角的余弦值.

【解答】解：(1) 如图，连接 A_1B , AC .



因为 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. 在 $\triangle A_1AB$ 中，根据向量减法法则可得 $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{a}$,

因为底面 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$,

因为 $AC \parallel A_1C_1$ 且 $|AC| = |A_1C_1|$ ，所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$,

又因为 M 为线段 A_1C_1 的中点，所以 $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

在 $\triangle A_1MB$ 中， $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

(2) 因为以顶点 A 为端点的三条棱长都是 1，且它们彼此的夹角都是 60° ，

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

由 (1) 可知 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ，所以在平行四边形 AA_1CC_1 中，

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. 则 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 + 1 + 1 + 2$

$$\times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 6,$$

所以 $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$. 故对角线 AC_1 的长为 $\sqrt{6}$;

(3) 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$,

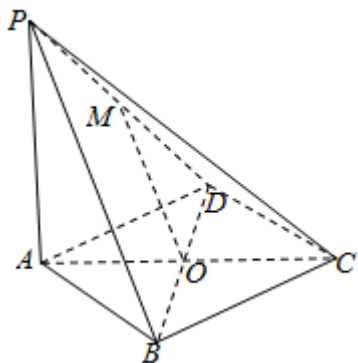
$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{A_1B_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, 点 O 是对角线 AC 与 BD 的交点, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, M 是 PD 的中点.

(I) 求证: $OM \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;

(III) 当三棱锥 $C-PBD$ 的体积等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 求 PA 的长.



【答案】 见试题解答内容

【分析】 (I) 由中位线定理可知 $OM \parallel PB$, 故而 $OM \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 由菱形的性质得 $BD \perp AC$, 由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 得 $BD \perp PA$, 故 $BD \perp$ 平面 PAC , 于是平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;

(III) 根据 $V_{C-PBD} = V_{P-BCD}$, 计算出 $S_{\triangle BCD}$ 代入体积公式得出棱锥的高 PA .

【解答】 证明: (I) 在 $\triangle PBD$ 中, 因为 O, M 分别是 BD, PD 的中点

所以 $OM \parallel PB$. 又 $OM \not\subset$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $OM \parallel$ 平面 PAB .

(II) 因为底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $BD \perp AC$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$. 又 $AC \cap PA = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

又 $BD \subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

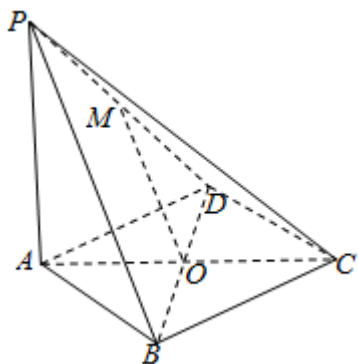
解：(III) 因为底面 $ABCD$ 是菱形，且 $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

又 $V_{C-PBD} = V_{P-BCD}$ ，三棱锥 $P-BCD$ 的高为 PA ，

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times PA = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } PA = \frac{3}{2}.$$



20. (12分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $\frac{2(a-b)}{c} = \frac{2\sin C - \sin B}{\sin A + \sin B}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{15}$ ， AD 为内角 A 的角平分线，交 BC 边于点 D ，求线段 AD 长的最大值.

【答案】 (1) $\cos A = \frac{1}{4}$; (2) $\sqrt{5}$.

【分析】 (1) 根据题设条件，利用正弦定理可得 $c^2 + b^2 - a^2 = \frac{1}{2}bc$ ，再由余弦定理即可得解；

(2) 根据面积公式可得 $bc = 8$ ，再求出 $\sin \angle BAD = \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，利用

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \angle CAD + \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = \sqrt{15}$ ，可得 $AD = \frac{4\sqrt{10}}{b+c}$ ，再由基本不等式可得解.

【解答】 解：(1) 因为 $\frac{2(a-b)}{c} = \frac{2\sin C - \sin B}{\sin A + \sin B}$,

所以由正弦定理，得 $\frac{2(a-b)}{c} = \frac{2c-b}{a+b}$ ，即 $c^2 + b^2 - a^2 = \frac{1}{2}bc$,

$$\text{故 } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{1}{2}bc}{2bc} = \frac{1}{4}.$$

(2) 由 (1) 知， $\sin A = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{15}$,

则 $\frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{15}$, 可得 $bc=8$,

又因为 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{A}{2}$, $\cos A = \frac{1}{4}$,

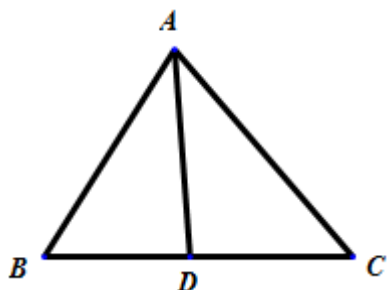
所以 $\sin^2 \angle BAD = \sin^2 \angle CAD = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{3}{8}$, $\sin \angle BAD = \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

于是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \angle CAD + \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = \sqrt{15}$,

那么 $AD \cdot (\frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}) = \sqrt{15}$,

所以 $AD = \frac{4\sqrt{10}}{b+c} \leq \frac{4\sqrt{10}}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{5}$ (当且仅当 $b=c=2\sqrt{2}$ 时等号成立),

故 AD 的最大值为 $\sqrt{5}$.

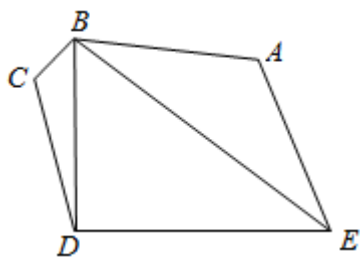


21. (12分) 杭州市为迎接2022的亚运会, 规划公路自行车比赛赛道, 该赛道的平面示意图为如图的五边形 $ABCDE$, 运动员的公路自行车比赛中如出现故障, 可以从本队的器材车、公共器材车上或收容车上获得帮助. 比赛期间, 修理或更换车轮或赛车等, 也可在固定修车点上进行. 还需要运送一些补给物品, 例如食物、饮料、工具和配件. 所以项目设计需要预留出 BD , BE 为赛道内的两条服务通道 (不考虑宽度), ED , DC , CB , BA , AE 为赛道, $\angle BCD = \angle BAE = \frac{2\pi}{3}$, $\angle CBD = \frac{\pi}{4}$, $CD = 2\sqrt{6} \text{ km}$, $DE = 8 \text{ km}$.

(1) 从以下两个条件中任选一个条件, 求服务通道 BE 的长度;

① $\angle CDE = \frac{7\pi}{12}$; ② $\cos \angle DBE = \frac{3}{5}$.

(2) 在(1)的条件下, 应该如何设计, 才能使折线赛道 BAE 最长 (即 $BA+AE$ 最大), 最长值为多少?



【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 选择①, 由正弦定理求出 BD , 利用勾股定理求解角 BE .

选择②由正弦定理求解 BD , 在 $\triangle BDE$ 中, 由余弦定理求出 BE 即可.

(2) 在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理, 结合基本不等式求解即可.

【解答】 (1) 解: 选择① $\angle CDE = \frac{7\pi}{12}$, 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理:

$$\frac{BD}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{CD}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow BD = \frac{CD \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 6,$$

$$\text{又 } \angle BDC = \frac{\pi}{12}, \text{ 所以 } \angle BDE = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDE \text{ 中, } BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = 10;$$

$$\text{选择② } \cos \angle DBE = \frac{3}{5}, \text{ 在 } \triangle BCD \text{ 中, 由正弦定理: } \frac{BD}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{CD}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow BD = \frac{CD \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 6,$$

$$\text{在 } \triangle BDE \text{ 中, 由余弦定理: } DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos \angle DBE \Rightarrow 64 = 36 + BE^2 - 2 \cdot 6 \cdot BE \cdot \frac{3}{5}$$

$$\text{即: } 5BE^2 - 36BE - 140 = 0, \text{ 解得 } BE = 10 \text{ (负值舍去)}$$

$$(2) \text{ 解: 在 } \triangle ABE \text{ 中, 由余弦定理: } BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = AB^2 + AE^2 + AB \cdot AE,$$

$$\Rightarrow (AB + AE)^2 = 100 + AB \cdot AE \leq 100 + \frac{(AB + AE)^2}{4} \Rightarrow (AB + AE)^2 \leq \frac{400}{3} \Rightarrow AB + AE \leq \frac{20\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当 } AB = AE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ 时取等号. 故 } AB = AE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 折线赛道 } BAE \text{ 最长, 最长值为 } \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

22. (12 分) 已知向量 $\vec{a} = (\cos \frac{3x}{2}, \sin \frac{3x}{2})$, $\vec{b} = (\cos \frac{x}{2}, -\sin \frac{x}{2})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - m|\vec{a} + \vec{b}| + 1$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 求实数 x 的值;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 -1 , 求实数 m 的值;

(3) 是否存在实数 m , 使函数 $g(x) = f(x) + \frac{24}{49}m^2$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 有四个不同的零点? 若存在,

求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $x = \pm \frac{\pi}{6}$; (2) $m = \sqrt{2}$; (3) 不存在满足题意的实数 m .

【分析】 (1) 根据 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 得到 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 3$, 然后利用向量数量积的坐标运算, 求出实数 x 的值;

(2) 根据题意, 化简得到函数 $f(x) = 2\cos^2 x - 2m\cos x$, 然后根据函数最小值为 -1 , 求出实数 m 的值;

(3) 通过令 $g(x) = f(x) + \frac{24m^2}{49} = 0$, 求解得出 $\cos x = \frac{3m}{7}$ 或 $\frac{4m}{7}$, 进一步判断是否存在四个不同的零点.

【解答】解: (1) $\because |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}, \therefore (\vec{a} + \vec{b})^2 = 3$, 即 $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$,

$$\text{又 } \vec{a} = (\cos \frac{3}{2}x, \sin \frac{3}{2}x), \vec{b} = (\cos \frac{1}{2}x, -\sin \frac{1}{2}x),$$

$$\therefore |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x - \sin \frac{3}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x = \cos 2x,$$

$$\therefore 2 + 2\cos 2x = 3, \therefore \cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}], \therefore 2x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\text{解得 } x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \because \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \cdot (-\sin \frac{x}{2}) = \cos 2x,$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}, \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}),$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + (\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2} = \sqrt{2 + 2\cos 2x} = \sqrt{4\cos^2 x},$$

$$\text{又 } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}], \therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4\cos^2 x} = 2\cos x.$$

$$\therefore f(x) = \cos 2x - 2m\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 2m\cos x,$$

$$\text{令 } t = \cos x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], \text{ 则 } y = 2t^2 - 2mt,$$

$$\because y_{\min} = -1, \text{ 对称轴为 } t = \frac{m}{2},$$

$$\text{① 当 } \frac{m}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } m < \sqrt{2} \text{ 时,}$$

$$\text{当 } t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } y_{\min} = 1 - \sqrt{2}m = -1, \therefore m = \sqrt{2}, \text{ 舍去,}$$

$$\text{② 当 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{m}{2} \leq 1, \text{ 即 } \sqrt{2} \leq m \leq 2 \text{ 时,}$$

$$\text{当 } t = \frac{m}{2} \text{ 时, } y_{\min} = -\frac{m^2}{2} = -1, \therefore m = \sqrt{2},$$

$$\text{③ 当 } \frac{m}{2} > 1, \text{ 即 } m > 2 \text{ 时,}$$

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } y_{\min} = 2 - 2m = -1, \therefore m = \frac{3}{2}, \text{ 舍去,}$$

综上, $m = \sqrt{2}$.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = f(x) + \frac{24m^2}{49} = 0, \text{ 则 } 2\cos^2 x - 2m\cos x + \frac{24m^2}{49} = 0,$$

$$\therefore \cos x = \frac{3m}{7} \text{ 或 } \frac{4m}{7}, \therefore y = g(x), x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 有四个不同的零点,}$$

$$\therefore \text{方程 } \cos x = \frac{3m}{7} \text{ 和 } \cos x = \frac{4m}{7} \text{ 在 } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 上共有四个不同的实根,}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3m}{7} < 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{4m}{7} < 1 \\ \frac{3m}{7} \neq \frac{4m}{7} \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{7\sqrt{3}}{6} \leq m < \frac{7}{3} \\ \frac{7\sqrt{3}}{8} \leq m < \frac{7}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}, \text{ 无解.}$$

$$\therefore \text{不存在实数 } m, \text{ 使函数 } g(x) = f(x) + \frac{24}{49}m^2, x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 有四个不同的零点.}$$