2024年高考数学押题密卷01(新高考 新题型)

【本试卷共19小题，满分150分。考试用时120分钟】

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.（2024•天津模拟）设集合 $A=\{-3，2，5\}$，$B=\{0，1，6\}$，$C=\{-1，4，5\}$，则（$A\cap C$）$\cup B$=（　　）

A．{5，6}　　B．{﹣3，0，1，5}　　C．{0，1，5，6}　　D．{0，2，4}

2.（2024•青羊区校级模拟）若向量 $\vec{a}=(x，4)$ 与向量 $\vec{b}=(1，x)$ 是共线向量，则实数 x 等于（　　）

A．2　　B．﹣2　　C．±2　　D．0

3.（2024•李沧区校级模拟）已知复数满足 $z(\sqrt{3}-i)=2$，则 $|z|\cdot\bar{z}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　　D．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4.（2024•丰台区二模）若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则（　　）

A．$\frac{1}{a^2+1}<\frac{1}{b^2+1}$　　B．$a^2b>ab^2$

C．$a^2>ab>b^2$　　D．$a>\frac{a+b}{2}>b$

5.（2024•绵阳模拟）将甲、乙、丙、丁4人分配到3个不同的工作岗位，每人只去一个岗位，每个岗位都要有人去，则甲、乙二人分别去了不同岗位的概率是（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

6.（2024•河北模拟）已知函数 $f(x)=sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若将 f（x）的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个

单位后所得的函数图象与曲线 $y=f(x)$ 关于$x=\frac{\pi}{3}$对称，则 ω 的最小值为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

7．（2024•呼和浩特模拟）设 $a=\log_6 15$，$b=\log_8 20$，$c=\log_{2012} 2024$，则 a、b、c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<a<c$　　D．$c<b<a$

8．（2024•安徽模拟）设 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 为两个正四棱锥，正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}$且$\angle PCQ=90°$，点 M 在线段 AC 上，且 $3CM=AM$，将异面直线 PD，QM 所成的角记为 θ，则 sinθ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9．（2024•安宁区校级模拟）已知抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，准线为 l 且与 x 轴交于点 Q，P 是 l 上一点，直线 PF 与抛物线交于 M，N 两点，若$\vec{PF}=3\vec{MF}$，则（　　）

A．$|MF|=\frac{2}{3}$　　B．$|MN|=\frac{8}{3}$　　C．$|FQ|=1$　　D．$|PQ|=2$

10．（2024•海口模拟）已知 S_n 为正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=1$，$S_n+S_{n-1}=\frac{1}{a_n}(n\geq 2，n\in N^*)$，则（　　）

A．$S_n=\sqrt{n}$　　B．$a_{n+1}<a_n$

C．$S_n+S_{n+2}>2S_{n+1}$　　D．$S_n-\frac{1}{S_n}\geq lnn$

11．（2024•广州二模）已知函数$f(x)=lnx-\frac{x+1}{x-1}$，则（　　）

A．$f(x)$ 的定义域为（0，+∞）

B．$f(x)$ 的图象在点（2，$f(2)$）处的切线斜率为$\frac{5}{2}$

C．$f(\frac{1}{x})+f(x)=0$

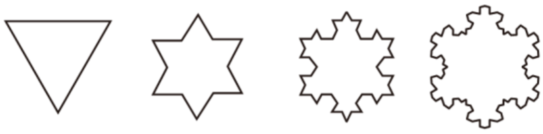
D．$f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1x_2=1$

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．（2024•呼和浩特模拟）若 $(2x-m)(x-1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 40，则实数 m ＝________．

13．（2024•濮阳二模）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的左焦点为 F_1，O 为坐标原点，$D(a，\sqrt{3}a)$，线段 OD 的垂直平分线与 C 交于 A，B 两点，且与 C 的一条渐近线交于第二象限的点 E，若$|DE|=\frac{2}{3}$，则△ABF_1 的周长为 ____________________.

14．（2024•龙岗区校级模拟）第二十四届北京冬奥会开幕式上由 96 片小雪花组成的大雪花惊艳了全世界，数学中也有一朵英丽的雪花——“科赫雪花”. 它的绘制规则是：任意画一个正三角形 P_1，并把每一条边三等分，以三等分后的每边的中间一段为边向外作正三角形，并把这“中间一段”擦掉，形成雪花曲线 P_2，重复上述两步，画出更小的三角形，一直重复，直到无穷，形成雪花曲线 P_3，P_4，…，P_n…



P_1　P_2　P_3　P_4

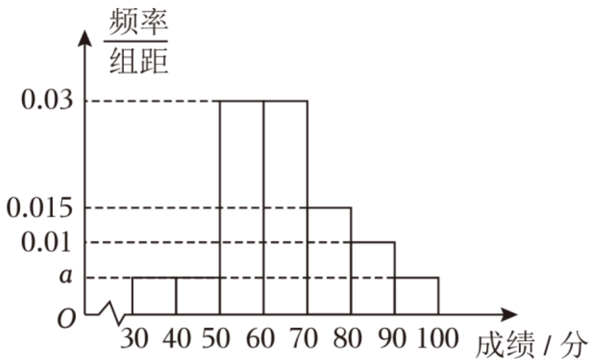
设雪花曲线 P_n 周长为 l_n，面积为 S_n，若 P_1 的边长为 1，则 l_4＝______________________，S_n＝______________________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）（2024•揭阳二模）为提升基层综合文化服务中心服务效能，广泛开展群众性文化活动，某村干部在本村的村民中进行问卷调查，将他们的成绩（满分：100 分）分成 7 组：[30，40)，[40，50)，[50，60)，[60，70)，[70，80)，[80，90)，[90，100]．整理得到如下频率分布直方图．

（1）求 a 的值并估计该村村民成绩的平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

（2）从成绩在[30，40)，[80，90)内的村民中用分层抽样的方法选取 6 人，再从这 6 人中任选 3 人，记这 3 人中成绩在[80，90)内的村民人数为 X，求 X 的分布列与期望．



16．（15 分）（2024•天津模拟）在锐角△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*．已知$a=3$，$b=2\sqrt{2}$，$\triangle ABC$的面积为 3．

（Ⅰ）求 *c* 的值；

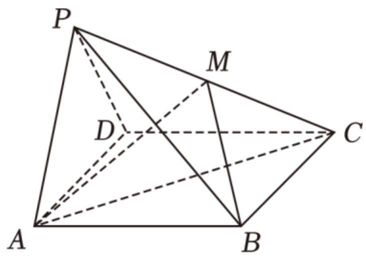
（Ⅱ）求 sin*B* 的值；

（Ⅲ）求 sin（2*B*﹣*C*）的值．

17．（15 分）（2024•合肥模拟）如图，在四棱锥 *P*﹣*ABCD* 中，底面 *ABCD* 是边长为 2 的菱形，∠*BAD*＝60°，*M* 是侧棱 *PC* 的中点，侧面 *PAD* 为正三角形，侧面 *PAD*⊥底面 *ABCD*．

（1）求三棱锥 *M*﹣*ABC* 的体积；

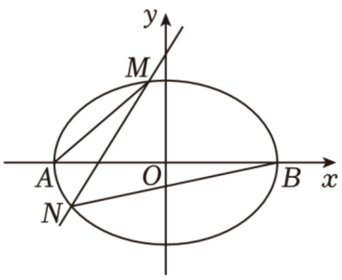
（2）求 *AM* 与平面 *PBC* 所成角的正弦值．



18．（17 分）（2024•西宁一模）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且点$(1,-\frac{3}{2})$在椭圆上．

（1）求椭圆 *C* 的标准方程；

（2）如图，若一条斜率不为 0 的直线过点（﹣1，0）与椭圆交于 *M*，*N* 两点，椭圆 *C* 的左、右顶点分别为 *A*，*B*，直线 *BN* 的斜率为 k_1，直线 *AM* 的斜率为 k_2，求证：$\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1\cdot k_2}$为定值．



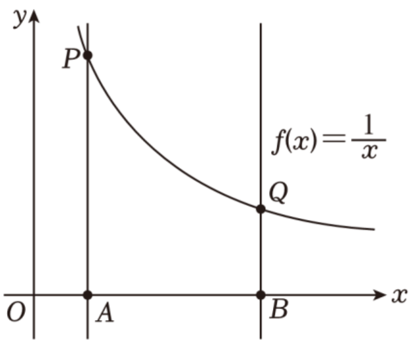
19．（17 分）（2024•湖北模拟）微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段．对于函数$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，$f(x)$在区间$[a，b]$上的图像连续不断，从几何上看，定积分$\int_a^b \frac{1}{x}dx$便是由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 和曲线$y=\frac{1}{x}$所围成的区域（称为曲边梯形 $ABQP$）的面积，根据微积分基本定理可得$\int_a^b \frac{1}{x}dx=lnb-lna$，因为曲边梯形 $ABQP$ 的面积小于梯形 $ABQP$ 的面积，即 S 曲边梯形 $ABQP<S$ 梯形 $ABQP$，代入数据，进一步可以推导出不等式：$\frac{a-b}{lna-lnb}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

（1）请仿照这种根据面积关系证明不等式的方法，证明：$\frac{a-b}{lna-lnb}<\frac{a+b}{2}$；

（2）已知函数 $f(x)=ax^2+bx+xlnx$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

（i）证明：对任意两个不相等的正数 x_1，x_2，曲线 $y=f(x)$ 在（x_1，$f(x_1)$）和（x_2，$f(x_2)$）处的切线均不重合；

（ii）当 $b=-1$ 时，若不等式 $f(x)\geqslant 2\sin(x-1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．



参考答案

一．选择题（共 8 小题）

1．【答案】C

【解答】解：∵集合 $A=\{-3，2，5\}$，$B=\{0，1，6\}$，$C=\{-1，4，5\}$，

∴$A\cap C=\{5\}$，

则（$A\cap C$）$\cup B=\{0，1，5，6\}$．

故选：C．

2．【答案】C

【解答】解：向量$\vec{a}=(x，4)$与向量$\vec{b}=(1，x)$是共线向量，

则 $x^2=1\times4$，解得 $x=\pm2$．

故选：C．

3．【答案】B

【解答】解：$z=\frac{2}{\sqrt{3}-i}=\frac{2(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

所以$|z|=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1$，$\overline{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

所以$|z|\cdot\overline{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$．

故选：B．

4．【答案】D

【解答】解：当 $a=1$，$b=-1$ 时，A，B 显然错误；

当 $a<0$，$b<0$ 时，C 显然错误；

由 $a>b$ 可得 $2a>a+b>2b$，

即 $a>\frac{a+b}{2}>b$，D 正确．

故选：D．

5．【答案】D

【解答】解：根据题意，将甲、乙、丙、丁 4 人分配到 3 个不同的工作岗位，每人只去一个岗位，每个岗位都要有人去，

则将 4 人分为 1，1，2 三组，共有C_4^2 =6 方法，则所有分配方法为$C_4^2 \cdot A_3^3$ =36，

甲、乙二人分别去了相同岗位共有A_3^3 =6 种，

则甲、乙二人分别去了不同岗位的概率是$\frac{36-6}{36}=\frac{5}{6}$.

故选：D.

6.【答案】A

【解答】解：因为函数$f(x)=sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，

若将 f（x）的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位后所得的函数为 $y=g(x)=sin[\omega(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=sin(\omega x+\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6})$，

函数 $y=g$（x）的图象与 $y=f$（x）的图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，

则$f(x)=g(\frac{2\pi}{3}-x)$，于是$sin(\omega x+\frac{\pi}{6})=sin[\omega(\frac{2\pi}{3}-x)+\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}]$对任意实数 x 恒成立，

即 $sin(\alpha x+\frac{\pi}{6})=sin(-\alpha x+\pi\omega+\frac{\pi}{6})=sin[\pi-(\omega x-\pi\omega+\frac{5\pi}{6})]=sin(\omega x-\pi\alpha+\frac{5\pi}{6})$ 对任意实数 x 恒成立，

因此$-\pi\omega+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$\omega=-2k+\frac{2}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

而 $\omega>0$，则 $k\in\mathbf{Z}$，$k\leqslant 0$，

所以当 $k=0$ 时，ω 取得最小值$\frac{2}{3}$.

故选：A.

7.【答案】D

【解答】解：$a=\log_6 15=log_6(\frac{15}{6}\times 6)=log_6\frac{5}{2}+1$，

$b=\log_8 20=log_8(\frac{20}{8}\times 8)=log_8\frac{5}{2}+1$，

$c=\log_{2012}2024=log_{2012}(\frac{2024}{2012}\times 2012)=log_{2012}\frac{2024}{2012}+1=log_{2012}\frac{506}{503}+1$，

$\because log_6\frac{5}{2}>log_8\frac{5}{2}$，

$\therefore a>b$，

下面比较 b 和 c，

$\because log_8\frac{5}{2}>\log_8 2=\frac{1}{3}$，$log_{2012}\frac{506}{503}<\log_{2012}10=log_{2012}1000^{\frac{1}{3}}<log_{2012}2012^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$，

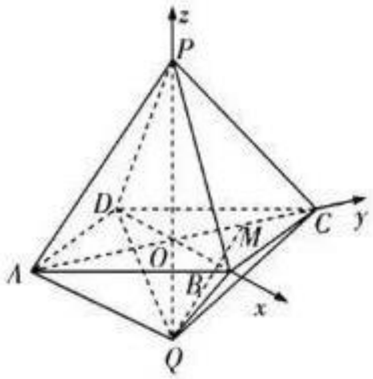
∴$b>c$，

∴$a>b>c$.

故选：D.

8.【答案】A

【解答】解：连接 BD 交 AC 于点 O，以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐



标系，

因为正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}$，所以 $OA=OB=OC=OD=1$，

因为 $3CM=AM$，所以 M 为 OC 的中点，

设 $OP=h$，在直角△PCQ 中，有 $OP\bullet OQ=OC^2=1$，

故$OQ=\frac{1}{h}$，

所以 P（0，0，b），D（﹣1，0.0），$Q(0，0，-\frac{1}{h})$，$M(0，\frac{1}{2}，0)$，

则$\overrightarrow{PD}=(-1，0，-h)$，$\overrightarrow{QM}=(0，\frac{1}{2}，\frac{1}{h})$，

所以$|cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QM}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{QM}|}=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{1}{\sqrt{(h^2+1)(\frac{1}{4}+\frac{1}{h^2})}}$,

因为$(h^2+1)(\frac{1}{4}+\frac{1}{h^2})=\frac{5}{4}+\frac{h^2}{4}+\frac{1}{h^2}\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{h^2}{4}\cdot\frac{1}{h^2}}=\frac{9}{4}$,

当且仅当$\frac{h^2}{4}=\frac{1}{h^2}$，即$h=\sqrt{2}$时等号成立，所以|cosθ|的最大值为$\frac{2}{3}$,

$sin\theta=\sqrt{1-cos^2\theta}\geq\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

因此 sinθ 的最小值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：A.

二．多选题（共 3 小题）

9.【答案】ABC

【解答】解：抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F（$\frac{1}{2}$，0），准线为 l：$x=-\frac{1}{2}$，

可得 Q（$-\frac{1}{2}$，0），$|FQ|=1$，故 C 正确；

设 P（$-\frac{1}{2}$，n），则直线 PF 的方程为 $y=-n$（$x-\frac{1}{2}$），

设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），

由$\vec{PF}=3\vec{MF}$，可得 $0-n=3$（$0-y_1$），解得 $y_1=\frac{1}{3}n$，$x_1=\frac{1}{6}$，

即 M（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}n$），代入抛物线方程 $y^2=2x$，可得 $n^2=3$，即$|PQ|=\sqrt{3}$，故 D 错误；

在直角三角形 PQF 中，$|PF|^2=|PQ|^2+|FQ|^2$，可得$|PF|=2$，$|MF|=\frac{2}{3}$，故 A 正确；

不妨设直线 PF 的方程为 $y=\sqrt{3}$（$x-\frac{1}{2}$），与抛物线方程联立，可得 $3x^2-5x+\frac{3}{4}=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{5}{3}$，可得$|MN|=x_1+x_2+1=\frac{8}{3}$，故 B 正确．

故选：ABC．

10．【答案】ABD

【解答】解：当 $n\geqslant 2$ 时，因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$，

所以$S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，

即$S_n^2-S_{n-1}^2=1$，

所以数列$\{S_n^2\}$为等差数列，公差为 1，首项为$S_1^2=1$，

所以$S_n^2=n$，又$\{a_n\}$为正项数列，则$S_n=\sqrt{n}$，A 正确；

则 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，$a_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，

故 $a_n>a_{n+1}$，B 正确；

因为 $S_n+S_{n+2}=\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$，$2S_{n+1}=2\sqrt{n+1}$，

因为（$\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$）$^2-4$（$n+1$）$=n+n+2+2\sqrt{n(n+2)}-4n-4=2[\sqrt{n(n+2)}-(n+1)]$

$=2[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{(n+1)^2}]<0$，

所以 $S_n+S_{n+2}<2S_{n+1}$，C 错误；

令$f(x)=x-\frac{1}{x}-2lnx$，$x\geq 1$，则′ f（x）$=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$，

所以 f（x）在$[1，+\infty)$上单调递增，f（x）$\geqslant f$（1）$=0$，

则$f(\sqrt{n})=\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}-lnn\geq 0$，即$S_n-\frac{1}{S_n}\geq lnn$，$D$ 正确．

故选：ABD．

11．【答案】BCD

【解答】解：函数$f(x)=lnx-\frac{x+1}{x-1}$，

则$\begin{cases}x>0\\x-1\neq 0\end{cases}$，可得 $x>0$ 且 $x\neq1$，即函数 $f(x)$ 的定义域为（0，1）∪（1，+∞），故 A 错误；

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}$，

则$f'(2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{(2-1)^2}=\frac{5}{2}$，即 $f(x)$ 的图象在点（2，f（2））处的切线斜率为$\frac{5}{2}$，故 B 正确；

$f(\frac{1}{x})+f(x)=ln\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}+lnx-\frac{x+1}{x-1}=-lnx+\frac{1+x}{x-1}+lnx-\frac{x+1}{x-1}=0$，故 C 正确；

由$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，可得 $f(x)$ 在（0，1）和（1，+∞）上单调递增，

又$f(e)=lne-\frac{e+1}{e-1}=1-\frac{e+1}{e-1}=\frac{-2}{e-1}<0$，

$f(e^2)=lne^2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$，

所以函数 $f(x)$ 在（e，e^2）存在 x_0，使$f(x_0)=lnx_0-\frac{x_0+1}{x_0-1}=0$，

由 C 可得 $f(\frac{1}{x_0})=-f(x_0)=0$，

所以 $f(x)$ 在定义域内有两个零点，$x_1=\frac{1}{x_0}$，$x_2=x_0$，所以 $x_1x_2=1$，故 D 正确．

故选：BCD．

三．填空题（共 3 小题）

12．【答案】3．

【解答】解：多项式的展开式中含 x^2 的项为$2x\times C_5^4x\cdot(-1)^4-m\times C_5^3x^2\cdot(-1)^3=(10+10m)x^2$，

则 $10+10m=40$，解得 $m=3$．

故答案为：3．

13．【答案】$\sqrt{3}+1$．

【解答】解：双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的左焦点为 F_1，O 为坐标原点，$D(a，\sqrt{3}a)$，

线段 OD 的垂直平分线与 C 交于 A，B 两点，且与 C 的一条渐近线交于第二象限的点

E，若$|DE|=\frac{2}{3}$，

记 C 的右焦点为 F_2，由题意得 D 在 C 的渐近线上，

$c=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$，$|OD|=|OF_2|$，$tan\angle DOF_2=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$，故$\angle DOF_2=\frac{\pi}{3}$.

由几何知识得，$\triangle DOF_2$ 和$\triangle DOE$ 均为等边三角形，

$|DE|=|OD|=2a=\frac{2}{3}$，故$a=\frac{1}{3}$，得到 C 的方程为 $9x^2-3y^2=1$.

不妨设 A 在 B 上方，则$\triangle ABF_1$ 的周长为$|AF_1|+|BF_1|+|AB|=|AF_2|-2a+|BF_2|+2a+|AB|=2|AF_2|$.

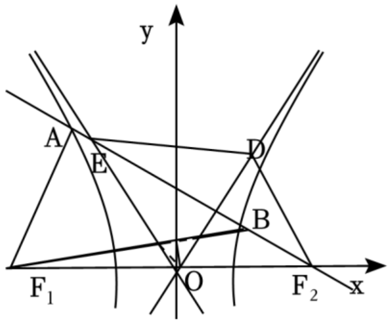
下面求解$|AF_2|$.

AF_2 的直线方程为$x=-\sqrt{3}y+\frac{2}{3}$，与双曲线方程联立得$\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+\frac{2}{3},\\9x^2-3y^2=1,\end{cases}$

整理得$8y^2-4\sqrt{3}y+1=0$，解得$y_A=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$，

$|AF_2|=2y_A=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，故$\triangle ABF_1$ 的周长为$\sqrt{3}+1$.

故答案为：$\sqrt{3}+1$.



14.【答案】$\frac{64}{9}$；$\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.

【解答】解：由题意可知：$l_1=3$，$l_2=3\times4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}l_1$，$l_3=3\times4\times4\times(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{3}l_2$，$l_4=\frac{4}{3}l_3=(\frac{4}{3})^3\times3=\frac{64}{9}$，

易知第 n 个图形的边长为$(\frac{1}{3})^{n-1}$，边数为 $3\times4^{n-1}$，

故$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$S_n-S_{n-1}=3\times4^{n-2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times[(\frac{1}{3})^{n-1}]^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times(\frac{4}{9})^{n-1}(n\geq2，n\in N^*)$，

由累加法得$S_n-S_1=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times(\frac{4}{9})^{n-1}+\cdots+\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}\times\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{20}\times(1-(\frac{4}{9})^{n-1})$

$\Rightarrow S_n=\frac{3\sqrt{3}}{20}\times(1-(\frac{4}{9})^{n-1})+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}(\frac{4}{9})^{n-1}$.

故答案为：$\frac{64}{9}$；$\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}(\frac{4}{9})^{n-1}$．

四．解答题（共 5 小题）

15．【答案】（1）0.005；64.5；

（2）分布列见解答；E（X）＝2．

【解答】解：（1）由图可知，10（$3a$+0.01+0.015+0.03×2）＝1，解得 a＝0.005．

该村村民成绩的平均数约为（35+45+95）×0.05+（55+65）×0.3+75×0.15+85×0.1＝64.5．

（2）从成绩在[30，40），[80，90）内的村民中用分层抽样的方法选取 6 人，

其中成绩在[30，40）内的村民有$\frac{0.05}{0.05+0.1}\times 6=2$人，

则成绩在[80，90）内的村民有 4 人．

从中任选 3 人，则 X 的取值可能为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_2^2C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，

则 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故$E(X)=3\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times 1=2$．

16．【答案】（Ⅰ）$\sqrt{5}$；

（Ⅱ）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

（Ⅲ）$\frac{7\sqrt{2}}{10}$．

【解答】解：（Ⅰ） 因为$a=3$，$b=2\sqrt{2}$，$\triangle ABC$的面积为 3．

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}absinC=3\sqrt{2}sinC=3$，

所以$sinC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又△ABC 是锐角三角形，

可得$C=\frac{\pi}{4}$，又由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=9+8-2\times 3\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$，

解得$c=\sqrt{5}$．

（Ⅱ）由正弦定理可得：$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，

由（Ⅰ）可得$sinB=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅲ）因为 $B\in$（0，$\frac{\pi}{2}$），

所以$cosB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以$sin2B=2sinBcosB=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$，$cos2B=cos\ {}^2B-sin\ {}^2B=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$，

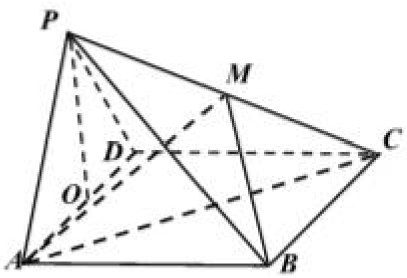
sin$C$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，cos$C$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$sin(2B-C)=sin2BcosC-cos2BsinC=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{3}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

17.【答案】（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{\sqrt{33}}{11}$.

【解答】解：（1）如图所示，取 AD 的中点 O，连接 PO，

因为△PAD 是正三角形，所以 $PO\perp AD$，



又因为平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，$PO\subset$平面 PAD，

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，且$PO=\sqrt{3}$，

又因为 M 是 PC 的中点，M 到平面 $ABCD$ 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$，

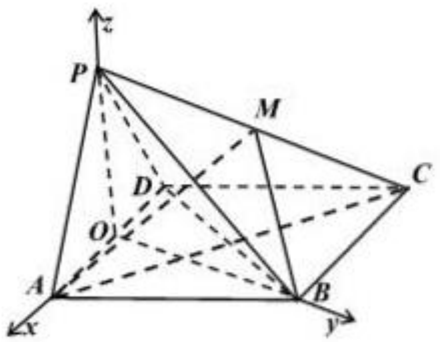
所以三棱锥 M - ABC 的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

（2）连接 BO，BD，因为$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

所以△ABD 为等边三角形，

所以 $BO\perp AD$，

以 O 为原点，OA，OB，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$P(0,\ 0,\ \sqrt{3})$，A（1，0，0），$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$C(-2,\ \sqrt{3},\ 0)$，

所以$M(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AM}=(-2,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,\ 0,\ 0)$，

设平面 PBC 的法向量为$\vec{n}=$（x，y，z），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ -2x=0\end{cases}$，

取 $z=1$，则 $y=1$，

所以$\vec{n}=$（0，1，1），

设 AM 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\ \overrightarrow{AM}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{22}}{2}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$，

即 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{33}}{11}$.

18.【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）证明见解析.

【解答】解：（1）由椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且点$(1,\ -\frac{3}{2})$在椭圆上，

可得$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$，

又点$(1,\ -\frac{3}{2})$在该椭圆上，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，所以 $a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）证明：设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），由于该直线斜率不为 0，可设 L_{MN}：$x=my-1$，

联立方程 $x=my-1$ 和$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得（$3m^2+4$）$y^2-6my-9=0$，

△＞0 恒成立，根据韦达定理可知，

$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1\cdot y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，$my_1\cdot y_2=-\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，

$k_1=\frac{y_2}{x_2-2}$，$k_2=\frac{y_1}{x_1+2}$，

$\frac{k_2}{k_1}=\frac{y_1(x_2-2)}{(x_1+2)y_2}=\frac{y_1(my_2-3)}{(my_1+1)y_2}=\frac{my_1y_2-3y_1}{my_1y_2+y_2}$，

$\therefore\frac{k_2}{k_1}=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+y_2}=3$，$\therefore\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1\cdot k_2}=\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}=\frac{10}{3}$.

19.【答案】（1）证明详情见解答.

（2）（*i*）证明详情见解答.

（*ii*）[1，+∞）.

【解答】解：（1）证明：在曲线 $y=\frac{1}{x}$取一点 $M\left(\frac{a+b}{2}，\frac{2}{a+b}\right)$，

过点 $M\left(\frac{a+b}{2}，\frac{2}{a+b}\right)$ 作 $f(x)$ 的切线分别交 AP，BQ 于 M_1，M_2，

因为 $S_{曲边梯形ABQP}>S_{梯形ABM_2M_1}$，

所以 $lnb-lna>\frac{1}{2}(|AM_1|+|BM_2|)\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(b-a)$，

即$\frac{a-b}{lna-lnb}<\frac{a+b}{2}$.

（2）（*i*）证明：由题意可得 $f'(x)=2ax+lnx+b+1$，

不妨设 $0<x_1<x_2$，曲线 $y=f(x)$ 在（x_1，$f(x_1)$）处的切线 l_1 方程：

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，即 $y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)$，

同理曲线 $y=f(x)$ 在（x_2，$f(x_2)$）处的切线 l_2 的方程：$y=f'(x_2)x+f(x_2)-x_2f'(x_2)$，

假设 l_1 与 l_2 重合，则$\begin{cases}f'(x_1)=f'(x_2)\\f(x_1)-x_1f'(x_1)=f(x_2)-x_2f'(x_2)\end{cases}$，

代入化简得$\begin{cases}lnx_2-lnx_1+2a(x_2-x_1)=0\\a(x_2+x_1)=-1(a<0)\end{cases}$，

两式消去 a 得 $lnx_2-lnx_1-2\frac{x_2-x_1}{x_2+x_1}=0$，得$\frac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}=\frac{x_1+x_2}{2}$，

由（1）的结论可知$\frac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$，与上式矛盾，

即对任意实数 a，b 及任意不相等的正数 x_1，x_2，l_1 与 l_2 均不重合.

（*ii*）当 $b=-1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant2\sin(x-1)$ 恒成立，

所以 $h(x)=ax^2-x+x\ln x-2\sin(x-1)\geqslant 0$ 在（0，+∞）上恒成立，

所以 $h(1)\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$，

下证：当 $a\geqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，

因为 $a\geqslant 1$，

所以 $h(x)\geqslant x^2-x+x\ln x-2\sin(x-1)$，

设 $H(x)=x^2-x+x\ln x-2\sin(x-1)$，$H'(x)=2x+\ln x-2\cos(x-1)$，

①当 $x\in[1,+\infty)$ 时，由 $2x\geqslant 2$，$\ln x\geqslant 0$，$-2\cos(x-1)\geqslant -2$ 知 $H'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $H(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $H(x)\geqslant H(1)=0$ 成立，

②当 $x\in(0,1)$ 时，设 $G(x)=2x+\ln x-2\cos(x-1)$，

$G'(x)=2+\frac{1}{x}+2\sin(x-1)$，

由 $2\sin(x-1)\geqslant -2$，$\frac{1}{x}>0$ 知 $G'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $G(x)=H'(x)$ 在（0，1）为增函数，

所以 $H'(x)<H'(1)=0$，即 $H(x)$ 在（0，1）为减函数，

所以 $H(x)>H(1)=0$ 成立，

综上所述，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$。