2023-2024 学年江苏省盐城市建湖高级中学竞赛班高一（下）期初数学试卷

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

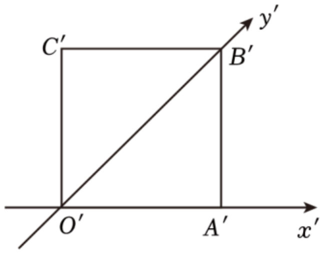
1．（5 分）某地有 8 个快递收件点，在某天接收到的快递个数分别为 360，284，290，300，188，240，260，288，则这组数据的百分位数为 75 的快递个数为（　　）

A．290　　B．295　　C．300　　D．330

2．（5 分）已知向量 $\vec{a}=(2,4)$，$\vec{b}=(m,3)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 m＝（　　）

A．－6　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．6

3．（5 分）一个平面图形用斜二测画法画出的直观图如图所示，此直观图恰好是一个边长为 2 的正方形，则原平面图形的面积为（　　）



A．4　　B．$8\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．3

4．（5 分）设 θ∈**R**，则“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的（　　）

A．充分而不必要条件

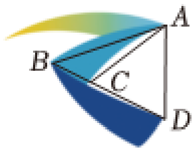
B．必要而不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

5．（5 分）冬奥会会徽以汉字“冬”（如图 1 甲）为灵感来源，结合中国书法的艺术形态，将悠久的中国传统文化底蕴与国际化风格融为一体，呈现出中国在新时代的新形象、新梦想．某同学查阅资料得知，书法中的一些特殊画笔都有固定的角度，比如弯折位置通常采用 30°，45°，60°，90°，120°，150°等特殊角度．为了判断“冬”的弯折角度是否符合书法中的美学要求．该同学取端点绘制了△ABD（如图乙），测得 AB＝3，BD＝4，AC＝AD＝2，若点 C 恰好在边 BD 上，请帮忙计算 $\sin\angle ACD$ 的值（　　）


甲



乙

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{11}{14}$　　C．$\frac{3\sqrt{15}}{16}$　　D．$\frac{11}{16}$

6．（5 分）四名同学各投掷质地均匀的骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数，根据四名同学的统计结果，可以判断一定没有出现点数 6 的是（　　）

A．众数为 3，极差为 3

B．平均数为 2，中位数为 2

C．平均数为 2，标准差为 2

D．中位数为 3，众数为 3

7．（5 分）若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{5}{13}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$ ＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{56}{65}$　　D．$\frac{36}{65}$

8．（5 分）已知正三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=1$，$AB=\sqrt{2}$，该三棱锥的外接球球心 O 到侧面距离为 h_1，到底面距离为 h_2，则 $\frac{h_1}{h_2}$＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（6 分）已知复数 z_1，z_2，下列结论正确的有（　　）

A．$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　　B．若 $z_1z_2=0$，则 $z_1=z_2=0$

C．$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$　　D．$z_1=|z_1|$

（多选）10．（6 分）香囊，又名香袋、花囊，是我国古代常见的一种民间刺绣工艺品，香囊形状多样，如图 1 所示的六面体就是其中一种，已知该六面体的所有棱长均为 2，其平面展开图如图 2 所示，则下列说法正确的是（　　）

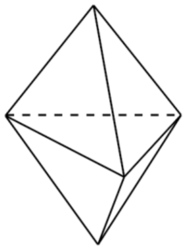


图1

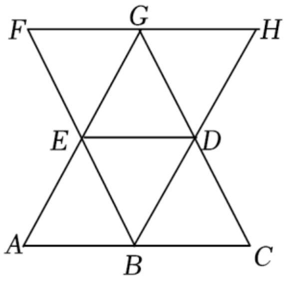


图2

A．$AB\perp DE$

B．直线 CD 与直线 EF 所成的角为 45°

C．该六面体的体积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D．该六面体内切球的表面积是$\frac{32\pi}{27}$

（多选）11．（6 分）已知采用分层抽样得到的样本数据由两部分组成，第一部分样本数据 x_i（i＝1，2，⋯，m）的平均数为$\overline{x}$，方差为s_x^2；第二部分样本数据 y_i（i＝1，2，⋯，n）的平均数为$\overline{y}$，方差为s_y^2，设$\overline{x}\leqslant\overline{y}$，$s_x^2\leqslant s_y^2$，则以下命题正确的是（　　）

A．设总样本的平均数为$\overline{z}$，则$\overline{x}\leqslant\overline{z}\leqslant\overline{y}$

B．设总样本的平均数为$\overline{z}$，则$\overline{z}^2\geqslant\overline{x}\cdot\overline{y}$

C．设总样本的方差为 s^2，则 $s_x^2\leqslant s^2\leqslant s_y^2$

D．若$m=n$，$\overline{x}=\overline{y}$，则$s^2=\frac{s_x^2+s_y^2}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．（5 分）某创业公司共有 36 名职工，为了解该公司职工的年龄构成情况，随机采访了 9 位代表，得到的数据分别为 36，36，37，37，40，43，43，44，44，若用样本估计总体，年龄在（$\overline{x}-s$，$\overline{x}+s$）内的人数

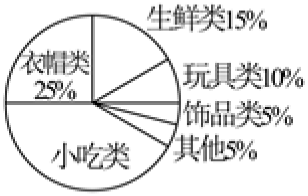
占公司总人数的百分比是 ＿＿＿＿＿＿．（其中$\overline{x}$是平均数，s 为标准差，结果精确到 1%）

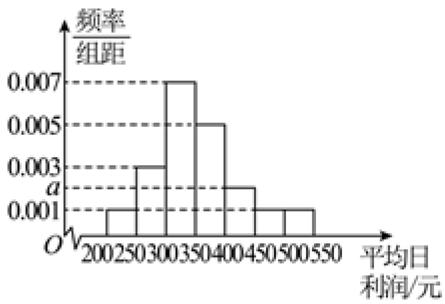
13．（5 分）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对应的边分别是 a，b，c，c＝4，$\tan C=\frac{\sqrt{7}}{3}$，且△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{7}$，则 $a+b$＝＿＿＿＿＿．

14．（5 分）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面 $A_1B_1C_1D_1$是边长为 4 的正方形，其余各棱长均为 2，设直线 AA_1与直线 BB_1的交点为 P，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 ＿＿＿＿＿．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）近年来,“直播带货”受到越来越多人的喜爱，目前已经成为推动消费的一种流行的营销形式. 某直播平台 800 个直播商家，对其进行调查统计，发现所售商品多为小吃、衣帽、生鲜、玩具、饰品类等，各类直播商家所占比例如图 1 所示.





（1）该直播平台为了更好地服务买卖双方，打算随机抽取 40 个直播商家进行问询交流. 如果按照分层抽样的方式抽取，则应抽取小吃类、玩具类商家各多少家？

（2）在问询了解直播商家的利润状况时，工作人员对抽取的 40 个商家的平均日利润进行了统计（单位：元），所得频率分布直方图如图 2 所示. 请根据频率分布直方图计算下面的问题；

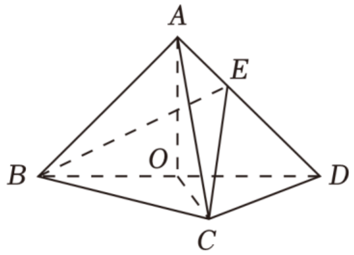
（ⅰ）估计该直播平台商家平均日利润的中位数与平均数（结果保留一位小数，求平均数时同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（ⅱ）若将平均日利润超过 420 元的商家成为“优秀商家”，估计该直播平台“优秀商家”的个数.

16.（15 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

（1）证明：$OA\perp CD$；

（2）若△OCD 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且三棱锥 $A-BCD$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，求二面角 $E-BC-D$ 的大小.



17.（15 分）在锐角△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若$\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=2$，求中线 AD 长的范围（点 D 是边 BC 中点）.

18.（17 分）已知函数 $f(x)=\log_a x+\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$（$a>0$，且 $a\neq1$）满足 $f(4)=f(2)-\frac{1}{2}$.

（1）求 a 的值；

（2）求证：f（x）在定义域内有且只有一个零点 x_0，且 $x_0+2^{2\sin(\frac{\pi}{4}x_0)}<\frac{5}{2}$.

19．（17 分）已知函数 $y=f$（x），若存在实数 m、k（$m\neq 0$），使得对于定义域内的任意实数 x，均有 $m\bullet f$（x）$=f$（$x+k$）$+f$（$x-k$）成立，则称函数 f（x）为“可平衡”函数；有序数对（m，k）称为函数 f（x）的“平衡”数对.

（1）若 f（x）$=x^2$，求函数 f（x）的“平衡”数对；

（2）若 $m=1$，判断 f（x）$=\sin x$ 是否为“可平衡”函数，并说明理由；

（3）若 m_1、$m_2\in\mathbf{R}$，且 $(m_1,\ \frac{\pi}{2})$、$(m_2,\ \frac{\pi}{4})$ 均为函数 $f(x)=\cos^2x\ (0<x\leqslant\frac{\pi}{4})$ 的“平衡”数对，求 $m_1^2+m_2^2$ 的取值范围.

2023-2024学年江苏省盐城市建湖高级中学竞赛班高一（下）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.（5分）某地有8个快递收件点，在某天接收到的快递个数分别为360，284，290，300，188，240，260，288，则这组数据的百分位数为75的快递个数为（　　）

A．290　　B．295　　C．300　　D．330

【答案】*B*

【分析】根据百分位数的知识求得正确答案．

【解答】解：将数据从小到大排序为：188，240，260，284，288，290，300，360，

8×75%＝6，所以75%分位数为$\frac{290+300}{2}$=295.

故选：*B*．

2.（5分）已知向量$\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(m,\ 3)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则*m*＝（　　）

A．﹣6　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．6

【答案】*A*

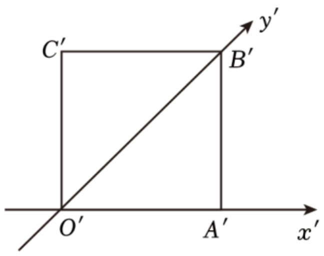
【分析】根据题意，由向量数量积的坐标计算公式可得$\vec{a}\cdot\vec{b}$＝2*m*+12＝0，解可得答案．

【解答】解：根据题意，向量$\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(m,\ 3)$，

若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$＝2*m*+12＝0，解可得*m*＝﹣6．

故选：*A*．

3.（5分）一个平面图形用斜二测画法画出的直观图如图所示，此直观图恰好是一个边长为2的正方形，则原平面图形的面积为（　　）



A．4　　B．$8\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．3

【答案】*B*

【分析】利用斜二测画法的过程把给出的直观图还原回原图形，找到直观图中正方形的四个顶点在原图形中对应的点，用直线段连结后得到原四边形，再计算平行四边形的面积即可．

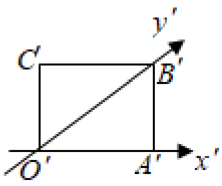
【解答】解：还原直观图为原图形如图所示，

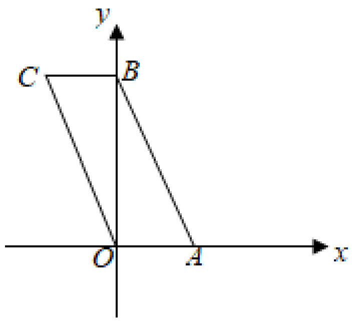
因为 $O'A'=2$，所以 $O'B'=2\sqrt{2}$，还原回原图形后，

$OA=O'A'=2$，$OB=2O'B'=4\sqrt{2}$；

所以原图形的面积为 $2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$．

故选：*B*．





4．（5 分）设 θ∈**R**，则“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的（　　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

【答案】*A*

【分析】运用绝对值不等式的解法和正弦函数的图象和性质，化简两已知不等式，结合充分必要条件的定义，即可得到结论．

【解答】解：$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{12}<\theta-\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow0<\theta<\frac{\pi}{6}$，

$\sin\theta<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<\theta<\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $(0,\frac{\pi}{6})\subsetneqq(-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$，

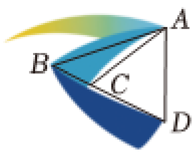
可得“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的充分不必要条件．

故选：*A*．

5．（5 分）冬奥会会徽以汉字“冬”（如图 1 甲）为灵感来源，结合中国书法的艺术形态，将悠久的中国传

统文化底蕴与国际化风格融为一体，呈现出中国在新时代的新形象、新梦想．某同学查阅资料得知，书法中的一些特殊画笔都有固定的角度，比如弯折位置通常采用 30°，45°，60°，90°，120°，150°等特殊角度．为了判断“冬”的弯折角度是否符合书法中的美学要求．该同学取端点绘制了△*ABD*（如图乙），测得 *AB*＝3，*BD*＝4，*AC*＝*AD*＝2，若点 *C* 恰好在边 *BD* 上，请帮忙计算 sin∠*ACD* 的值（　　）

甲



乙

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{11}{14}$　　　　C．$\frac{3\sqrt{15}}{16}$　　　　D．$\frac{11}{16}$

【答案】*C*

【分析】先根据三条边求出 cos∠*ADB*，利用平方关系得到 sin∠*ADB*，即可根据等腰三角形求解．

【解答】解：在△*ABD* 中，由余弦定理可得，$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2ADDB}=\frac{4+16-9}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}$，

因为∠*ADB*∈（0，π），所以$\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\sqrt{1-16}^{\,2}=\frac{3\sqrt{11}}{16}$，

在△*ACD* 中，由 *AC*＝*AD*＝2 得$\sin\angle ACD=\sin\angle ADB=\frac{3\sqrt{15}}{16}$．

故选：*C*．

6．（5 分）四名同学各投掷质地均匀的骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数，根据四名同学的统计结果，可以判断一定没有出现点数 6 的是（　　）

A．众数为 3，极差为 3

B．平均数为 2，中位数为 2

C．平均数为 2，标准差为 2

D．中位数为 3，众数为 3

【答案】*B*

【分析】根据各项的数据特征分析投掷 5 次对应数据是否可能出现点数 6 即可．

【解答】解：*A*：若众数为数据中的最小值，结合极差为 3，则数据中最大值为 6，故可能出现点数 6；

B：由平均数为 2，则所有数据之和为 2×5＝10，

又中位数为 2，将数据从小到大排列，

则前 3 个数据之和最小的情况为 1，1，2，

故后 2 个数据之和最大为 10﹣1﹣1﹣2＝6，

所以不可能出现数据 6；

C：若出现点数 6，平均数为 2，满足条件的情况有 *l*，1，1，1，6，

则方差为$\frac{4x(1-2)^2+(6-2)^2}{5}=4$，即标准差为 2，故可能出现点数 6；

D：如 1，3，3，3.6 满足中位数为 3，众数为 3，故可能出现点数 6．

故选：*B*．

7．（5 分）若$0<α<\frac{π}{2}$，$0<β<\frac{π}{2}$，$cos(α+β)=\frac{3}{5}$，$sin(β-\frac{π}{4})=\frac{5}{13}$，则$cos(α+\frac{π}{4})$＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．$\frac{56}{65}$　　　　D．$\frac{36}{65}$

【答案】*C*

【分析】由已知，结合角的范围，即可得出$sin(α+β)=\frac{4}{5}$，$cos(β-\frac{π}{4})=\frac{12}{13}$．然后根据两角差余弦公式，即可得出答案．

【解答】解：因为$0<α<\frac{π}{2}$，$0<β<\frac{π}{2}$，所以 0＜α+β＜π，

所以，$sin(α+β)=\sqrt{1-cos^2(α+β)}=\frac{4}{5}$．

又$-\frac{π}{4}<β-\frac{π}{4}<\frac{π}{4}$，所以$cos(β-\frac{π}{4})=\sqrt{1-sin^2(β-\frac{π}{4})}=\frac{12}{13}$．

所以，$cos(α+\frac{π}{4})=cos[(α+β)-(β-\frac{π}{4})]$＝$cos(α+β)cos(β-\frac{π}{4})+sin(α+β)sin(β-\frac{π}{4})$＝$\frac{3}{5}×\frac{12}{13}+\frac{4}{5}×\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$．

故选：*C*．

8．（5 分）已知正三棱锥 *P* - *ABC* 中，*PA*＝1，$AB=\sqrt{2}$，该三棱锥的外接球球心 *O* 到侧面距离为 h_1，到底面距离为 h_2，则$\frac{h_1}{h_2}$＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【答案】*C*

【分析】由题意可得 *PA*，*PB*，*PC* 两两垂直，可将正三棱锥 *P* - *ABC* 扩充为以 *PA*，*PB*，*PC* 为棱的正方体，则该三棱锥的外接球球心 *O* 即为正方体的中心，结合球的截面性质求得 h_1，h_2，可得结论．

【解答】解：正三棱锥 *P* - *ABC* 中，*PA*＝1，$AB=\sqrt{2}$，

可得 *PA*，*PB*，*PC* 两两垂直，

可将正三棱锥 $P-ABC$ 扩充为以 PA，PB，PC 为棱的正方体，

则该三棱锥的外接球球心 O 即为正方体的中心，可得 O 到侧面的距离 $h_1=\frac{1}{2}$.

设外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{3}$，即 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又等边三角形 ABC 的外接圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则 O 到底面距离为 $h_2=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以$\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{3}$.

故选：C.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（6 分）已知复数 z_1，z_2，下列结论正确的有（　　）

A．$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　　　　B．若 $z_1z_2=0$，则 $z_1=z_2=0$

C．$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$　　　　D．$z_1=|z_1|$

【答案】AC

【分析】设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），根据复数的运算与模的定义计算后判断 AC，根据复数乘法判断 B，由复数的模的定义和复数相等的定义判断 D.

【解答】解：设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），

则 $z_1+z_2=a+c+$（$b+d$）i，$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，$A$ 正确；

当 $z_1=0$，$z_2=2+i$ 时，$z_1z_2=0$，因此 B 错误；

$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$，

$|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=|z_1||z_2|$

，C 正确；

$z_1=2+i$ 时，$|z_1|=\sqrt{5}$，$z_1\neq|z_1|$，D 错.

故选：AC.

（多选）10．（6 分）香囊，又名香袋、花囊，是我国古代常见的一种民间刺绣工艺品，香囊形状多样，如图 1 所示的六面体就是其中一种，已知该六面体的所有棱长均为 2，其平面展开图如图 2 所示，则下列说法正确的是（　　）

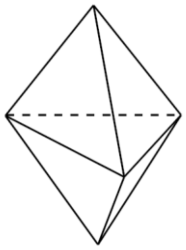


图1

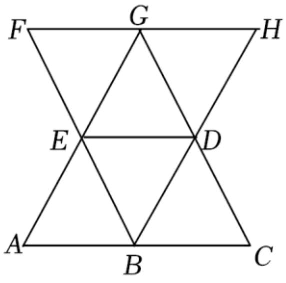


图2

A．$AB\perp DE$

B．直线 CD 与直线 EF 所成的角为 45°

C．该六面体的体积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D．该六面体内切球的表面积是$\frac{32\pi}{27}$

【答案】AD

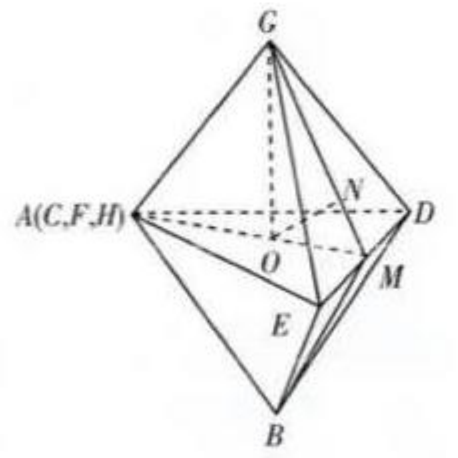
【分析】根据条件证明 $DE\perp$平面 ABM，根据线面垂直的定义可证明 A；

根据正四面体的性质可知直线 CD 与 EF 成 60°角，可判断 B；

连接 GM，过点 G 作 $GO\perp$平面 ADE，计算可得正四面体的高，六面体体积为 2 个正四面体体积之和，计算可得结果，从而判断 C；

过点 O 作 $ON\perp GM$，则 ON 就是内切球的半径，Rt△GOM 中计算得 ON 的长度，代入球的表面积公式计算可判断 D.

【解答】解：由题知，所给六面体由两个同底面的正四面体组成，将题图 2 的平面展开图还原为直观图后如图所示，



其中 A，C，F，H 四点重合；

取 DE 的中点 M，连接 AM，BM，

则 $AM\perp DE$，$BM\perp DE$，

又 $AM\cap BM=M$，

所以 $DE\perp$ 平面 ABM，

又 $AB\subset$ 平面 ABM，所以 $AB\perp DE$，故 A 正确；

由图可知，CD 与 EF 分别为正三角形 ADE 的边 CD，AE，其所成的角为 60°，故 B 错误；

连接 GM，过点 G 作 $GO\perp$ 平面 ADE，则垂足 O 在 AM 上，且 $AM=GM=\sqrt{3}$，$OM=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $GO=\sqrt{GM^2-OM^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以该六面体的体积 $V=2V_{G-AED}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，故 C 错误.

因为该六面体的各棱长相等，所以其内切球的球心必在公共面 ADE 上，

又△ADE 为正三角形，所以点 O 即为该六面体内切球的球心，且该球与 GM 相切，

过点 O 作 $ON\perp GM$，则 ON 就是内切球的半径，

在 Rt△GOM 中，因为 $GO\bullet OM=GM\bullet ON$，

所以 $ON=\frac{GO\bullet OM}{GM}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$，

所以该内切球的表面积为 $4\pi\times(\frac{2\sqrt{6}}{9})^2=\frac{32\pi}{27}$，故 D 正确；

故选：AD．

（多选）11．（6 分）已知采用分层抽样得到的样本数据由两部分组成，第一部分样本数据 x_i（$i=1$，2，…，m）的平均数为$\overline{x}$，方差为s_x^2；第二部分样本数据 y_i（$i=1$，2，…，n）的平均数为$\overline{y}$，方差为s_y^2，设$\overline{x}\leqslant\overline{y}$，$s_x^2\leqslant s_y^2$，则以下命题正确的是（　　）

A．设总样本的平均数为$\overline{z}$，则$\overline{x}\leqslant\overline{z}\leqslant\overline{y}$

B．设总样本的平均数为$\overline{z}$，则$\overline{z}^2\geqslant\overline{x}\bullet\overline{y}$

C．设总样本的方差为 s^2，则 $s_x^2\leqslant s^2\leqslant s_y^2$

D．若$m=n$，$\overline{x}=\overline{y}$，则 $s^2=\frac{s_x^2+s_y^2}{2}$

【答案】AD

【分析】对于 A 选项，因为$\overline{x}\leqslant\overline{y}$，由$\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$放缩，可得$\overline{x}\leqslant\overline{z}\leqslant\overline{y}$；

对于 B 选项，举例说明 B 不正确；

对于 C 选项，举例说明 C 不正确；

对于 D 选项，若 $m=n$，$\overline{x}=\overline{y}$，代入总体方差计算公式，可得 $s^2=\frac{s_x^2+s_y^2}{2}$.

【解答】解：对于 A 选项，因为 $\overline{x}\leqslant\overline{y}$，所以 $\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}\leqslant\frac{m}{m+n}\overline{y}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\overline{y}$，

$\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}\geqslant\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{x}=\overline{x}$，即 $\overline{x}\leqslant\overline{z}\leqslant\overline{y}$，$A$ 正确；

对于 B 选项，取第一部分数据为 1，1，1，1，1，则 $\overline{x}=1$，$s_x^2=0$，取第二部分数据为 -3，9，则 $\overline{y}=3$，$s_y^2=36$，则 $\overline{z}^2=\frac{121}{49}<3$，$B$ 不正确；

对于 C 选项，取第一部分数据为 -2，-1，0，1，2，则 $\overline{x}=0$，$s_x^2=2$，

取第二部分数据为 1，2，3，4，5，则 $\overline{y}=3$，$s_y^2=2$，则 $\overline{z}=\frac{3}{2}$，$s^2=\frac{17}{4}>2=s_y^2$，C 不正确；

对于 D 选项，若 $m=n$，$\overline{x}=\overline{y}$，则 $\overline{z}=\overline{x}=\overline{y}$，$s^2=\frac{m}{m+n}[s_x^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+\frac{n}{m+n}[s_y^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]=\frac{s_x^2+s_y^2}{2}$，

D 正确．

故选：AD．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.（5 分）某创业公司共有 36 名职工，为了解该公司职工的年龄构成情况，随机采访了 9 位代表，得到的数据分别为 36，36，37，37，40，43，43，44，44，若用样本估计总体，年龄在（$\overline{x}-s$，$\overline{x}+s$）内的人数

占公司总人数的百分比是 __56%__．（其中 $\overline{x}$ 是平均数，s 为标准差，结果精确到 1%）

【答案】56%．

【分析】先求出平均数和标准差，再结合题意，即可求解．

【解答】解：由题意可知，$\overline{x}=\frac{1}{9}\times(36+36+37+37+40+43+43+44+44)=40$，

则 $s=\sqrt{\frac{1}{9}\times(4^2\times4+3^2\times4+0)}=\frac{10}{3}$，

故年龄在（$\overline{x}-s$，$\overline{x}+s$）内的人数，即在 $(\frac{110}{3},\frac{130}{3})$ 内的人数为 5，

故年龄在（$\overline{x}-s$，$\overline{x}+s$）内的人数占公司总人数的百分比是 $\frac{5}{9}\times100\%\approx56\%$.

故答案为：56%．

13.（5 分）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对应的边分别是 a，b，c，$c=4$，$\tan C=\frac{\sqrt{7}}{3}$，且△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{7}$，则 $a+b=$ __10__．

【答案】10．

【分析】根据三角形面积公式求出 ab，再由余弦定理的变形即可得出 $a+b$．

【解答】解：由 $\begin{cases}\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}\\ \sin^2C+\cos^2C=1\end{cases}$，且 $0<C<\pi$，

可得 $\cos C=\dfrac{3}{4}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{8}ab=3\sqrt{7}$，解得 $ab=24$，

$\because c=4$，

$\therefore 4^2=a^2+b^2-2\times\dfrac{3}{4}ab$，可得 $4^2=a^2+b^2-\dfrac{3}{2}ab=(a+b)^2-\dfrac{7}{2}ab$，

代入 $ab=24$，即 $(a+b)^2=16+12\times7=100$，

$\therefore a+b=10$．

故答案为：10．

14．（5 分）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面 $A_1B_1C_1D_1$是边长为 4 的正方形，其余各棱长均为 2，设直线 AA_1与直线 BB_1的交点为 P，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 __8π__．

【答案】8π．

【分析】先确定四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥，从而得出外接球的球心 O 在直线 PO_1 上，再由勾股定理确定半径，进而得出四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积．

【解答】解：设 AC 与 BD 相交于点 O_1 因为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台，

直线 AA_1 与直线 BB_1 的交点为 P，

所以四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥，

所以 $PO_1\perp$平面 $ABCD$．

四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心 O 在直线 PO_1 上，连接 BO，

设该外接球的半径为 R．

因为 $AB=\dfrac{1}{2}A_1B_1=2$，AB 平行于 A_1B_1，

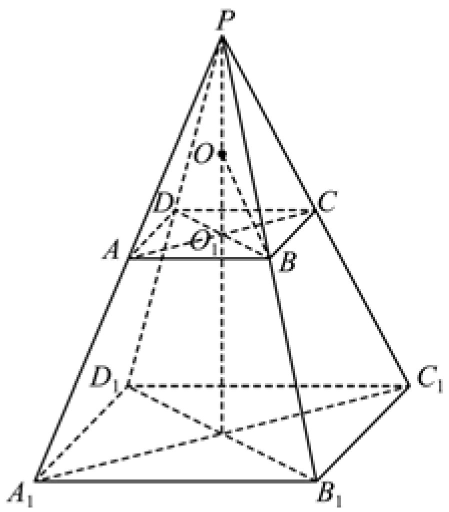
所以 $PB=BB_1=2$，$BO_1=\sqrt{2}$，$PO_1=\sqrt{2}$．

所以$|BO|2=|O1O|2+|BO1|2$，即 $R^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-R)^2$，

解得 $R=\sqrt{2}$，

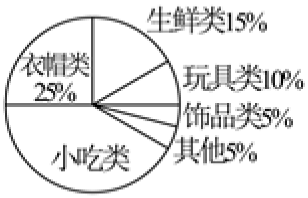
则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi r^2=8\pi$．

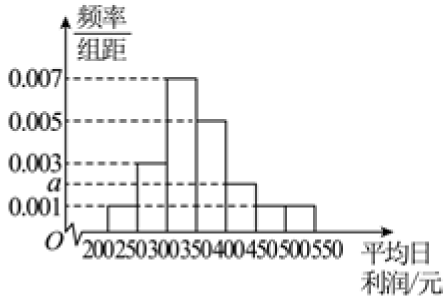
故答案为：8π．



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）近年来，“直播带货”受到越来越多人的喜爱，目前已经成为推动消费的一种流行的营销形式．某直播平台 800 个直播商家，对其进行调查统计，发现所售商品多为小吃、衣帽、生鲜、玩具、饰品类等，各类直播商家所占比例如图 1 所示．





（1）该直播平台为了更好地服务买卖双方，打算随机抽取 40 个直播商家进行问询交流．如果按照分层抽样的方式抽取，则应抽取小吃类、玩具类商家各多少家？

（2）在问询了解直播商家的利润状况时，工作人员对抽取的 40 个商家的平均日利润进行了统计（单位：元），所得频率分布直方图如图 2 所示．请根据频率分布直方图计算下面的问题；

（ⅰ）估计该直播平台商家平均日利润的中位数与平均数（结果保留一位小数，求平均数时同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（ⅱ）若将平均日利润超过 420 元的商家成为“优秀商家”，估计该直播平台“优秀商家”的个数．

【答案】（1）小吃类 16 家，玩具类 4 家；

（2）（i）中位数为 342.9，平均数为 352.5；

（2）128．

【分析】（1）根据分层抽样的定义计算即可；

（2）（i）根据中位数和平均数的定义计算即可；

（*ii*）根据样本中“优秀商家”的个数来估计总体中“优秀商家”的个数即可．

【解答】解：（1）40×（1﹣25%﹣15%﹣10%﹣5%﹣5%）＝16，40×10%＝4，

所以应抽取小吃类 16 家，玩具类 4 家．

（2）（*i*）根据题意，可得（0.001×3+a+0.003+0.005+0.007）×50＝1，解得 a＝0.002，

设中位数为 x，因为（0.001+0.003）×50＝0.2，（0.001+0.003+0.007）×50＝0.55，

所以（x﹣300）×0.007+0.2＝0.5，解得 x≈342.9，

平均数为（225×0.001+275×0.003+325×0.007+375×0.005+425×0.002+475×0.001+525×0.001）×50＝352.5，

所以该直播平台商家平均日利润的中位数为 342.9，平均数为 352.5．

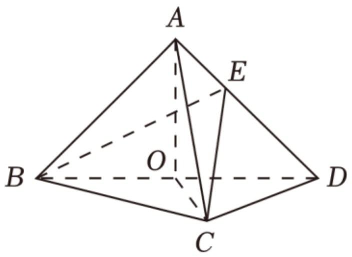
（*ii*）$\left(\frac{450-420}{50}\times 0.002+0.001+0.001\right)$×50×800＝128，

所以估计该直播平台“优秀商家”的个数为 128．

16．（15 分）如图，在三棱锥 A﹣BCD 中，平面 ABD⊥平面 BCD，AB＝AD，O 为 BD 的中点．

（1）证明：OA⊥CD；

（2）若△OCD 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，DE＝2EA，且三棱锥 A﹣BCD 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，求二面角 E﹣BC﹣D 的大小．



【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\pi}{4}$．

【分析】（1）根据给定条件证得 OA⊥平面 BCD 即可得解；（2）根据三棱锥 A﹣BCD 的体积求得 AO，可得 CD⊥CB，作辅助线作 EF⊥BD 于 F，作 FM⊥BC 于 M，连 EM，利用定义法找到二面角 E﹣BC﹣D 的平面角，再求得相关线段长，解三角形可得答案．

【解答】解：（1）在三棱锥 A﹣BCD 中，因为 O 为 BD 的中点，且 AB＝AD，

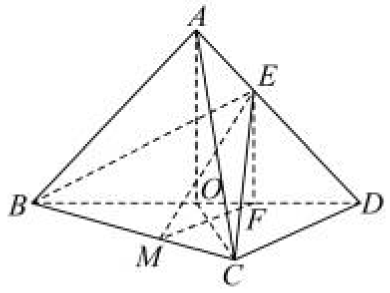
则 OA⊥BD，又平面 ABD⊥平面 BCD，平面 ABD∩平面 BCD＝BD，

OA⊂平面 ABD，所以 OA⊥平面 BCD，而 CD⊂平面 BCD，所以 OA⊥CD；

（2）因△OCD 是边长为 1 的等边三角形，所以 $S_{\triangle OCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因 AO⊥平面 BCD，所以 AO 为三棱锥 A﹣BCD 的高，

设为 h，所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}hS_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{6}h=\frac{\sqrt{3}}{6}$，∴$h=1$，



所以 $OA=OB=OC=OD=CD=1$，即有 $OC=\frac{1}{2}BD$，

所以 $CD\perp CB$，作 $EF\perp BD$ 于 F，作 $FM\perp BC$ 于 M，连 EM，

则 $AO\parallel EF$，因为 $AO\perp$平面 BCD，所以 $EF\perp$平面 BCD，$BC\subset$平面 BCD，

则 $EF\perp BC$，因为 $FM\perp BC$，$FM\cap EF=F$，FM，$EF\subset$平面 EFM，

所以 $BC\perp$平面 EFM，而 $ME\subset$平面 EFM，故 $BC\perp ME$，

则 $\angle EMF$ 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角．

又 $DE=2EA$，所以 $EF=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}$，

在△BCD 中，$FM\perp BC$，$CD\perp CB$，所以 $FM\parallel CD$，

由 $OA=OD$ 知 $\angle ODA=\frac{\pi}{4}$，故 $DF=EF=\frac{2}{3}$，

所以 $BF=\frac{4}{3}$，即 $\frac{BF}{BD}=\frac{2}{3}$，∴$FM=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3}$，从而 $EF=FM=\frac{2}{3}$，

又因为在△EMF 中，$EF\perp FM$，所以△EMF 为等腰直角三角形，

所以 $\angle EMF=\frac{\pi}{4}$，即二面角 $E-BC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

17．（15 分）在锐角△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=2$，求中线 AD 长的范围（点 D 是边 BC 中点）.

【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$.

（2）$(\frac{\sqrt{21}}{3}，\sqrt{3}]$

【分析】（1）利用正弦定理结合两角和的正弦公式可求 $\cos A$ 的值，结合 A 的范围即可求出结果；

（2）利用平面向量关系，正弦定理，三角函数恒等变换以及正弦函数的图象即可求解.

【解答】解：（1）因为 $\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$，

由正弦定理可得：$\frac{2\sin C-\sin B}{\sin A}=\frac{\cos B}{\cos A}$，即（2sin$C$﹣sin$B$）cos$A$＝sin$AcosB$，

可得 2sin$C$cos$A$＝sin（A+B）＝sin（π﹣C）＝sin$C$，

因为 C 为锐角，所以 sin$C$＞0，

所以$\cos A=\frac{1}{2}$，

因为 A 为锐角，

所以$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）得$A=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

可得 $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$，$c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\cos B+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$，

因为点 D 是边 BC 中点，

所以$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

两边平方可得：$4|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=b^2+c^2+bc$

$=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\right)^2+\left(2\cos B+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\right)^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\times\left(2\cos B+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\right)$

$=\frac{28}{3}\sin^2B+4\cos^2B+\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin B\cos B$

$=\frac{20}{3}+\frac{16}{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为锐角△ABC 中，$A=\frac{\pi}{3}$，可得 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $2B-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $4|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{20}{3}+\frac{16}{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{28}{3},12\right]$，

可得$|\overrightarrow{AD}|\in\left(\frac{\sqrt{21}}{3},\sqrt{3}\right]$，

所以中线 AD 长的范围为$\left(\frac{\sqrt{21}}{3},\sqrt{3}\right]$.

18.（17 分）已知函数 $f(x)=\log_a x+\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$（$a$＞0，且 a≠1）满足 $f(4)=f(2)-\frac{1}{2}$.

（1）求 a 的值；

（2）求证：f（x）在定义域内有且只有一个零点 x_0，且 $x_0+2^{2\sin\left(\frac{\pi}{4}x_0\right)}<\frac{5}{2}$.

【答案】（1）$a=4$；

（2）证明见解析．

【分析】（1）根据题意，由函数的解析式可得 $\log_a 4+\sin\pi=\log_a 2+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$，即 $\log_a 4=\log_a 2+\frac{1}{2}$，解可得 a 的值；

（2）根据题意，先分析函数的单调性，由函数零点判定定理可得结论，结合对数的运算性质和基本不等式的性质可得证明．

【解答】解：（1）根据题意，函数 $f(x)$ 满足 $f(4)=f(2)-\frac{1}{2}$，

所以 $\log_a 4+\sin\pi=\log_a 2+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$，即 $\log_a 4=\log_a 2+\frac{1}{2}$，

解得 $a=4$；

（2）证明：由题意可知函数 $f(x)=\log_4 x+\sin\frac{\pi}{4}x$ 的图象在（0，+∞）上连续不断．

①当 $x\in(0，2]$时，因为 $y=\log_4 x$ 与 $y=\sin\frac{\pi}{4}x$ 在（0，2]上单调递增，

所以 $f(x)$ 在（0，2]上单调递增．

又因为 $f(\frac{1}{2})<0$，$f(1)>0$，则有 $f(\frac{1}{2})f(1)<0$．

根据函数零点存在定理，存在 $x_0\in(\frac{1}{2}，1)$，使得 $f(x_0)=0$．

所以 $f(x)$ 在（0，2]上有且只有一个零点 x_0．

②当 $x\in(2，4]$时，$\log_4 x>0$，$\sin\frac{\pi}{4}x\geqslant 0$，所以 $f(x)=\log_4 x+\sin\frac{\pi}{4}x>0$，

所以 $f(x)$ 在（2，4]上没有零点．

③当 $x\in(4，+\infty)$ 时，$\log_4 x>1$，$\sin\frac{\pi}{4}x\geqslant -1$，所以 $f(x)=\log_4 x+\sin\frac{\pi}{4}x>0$，

所以 $f(x)$ 在（4，+∞）上没有零点．

综上所述，$f(x)$ 在定义域（0，+∞）上有且只有一个零点 x_0．

因为 $f(x_0)=\log_4 x_0+\sin\frac{\pi}{4}x_0=0$，即 $\sin\frac{\pi x_0}{4}=-\log_4 x_0$．

则 $x_0+2^{2\sin(\frac{\pi}{4}+x_0)}=x_0+4^{-\log_4 x_0}=x_0+\frac{1}{x_0}$，$x_0\in(\frac{1}{2}，1)$，

又因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}，1)$ 上单调递减，

所以 $x_0+\frac{1}{x_0}<2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$．

19．（17 分）已知函数 $y=f(x)$，若存在实数 m、k（$m\neq 0$），使得对于定义域内的任意实数 x，均有 $m\cdot f(x)=f(x+k)+f(x-k)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为“可平衡”函数；有序数对（m，k）称为函数 $f(x)$ 的“平衡”数对．

（1）若 $f(x)=x^2$，求函数 $f(x)$ 的“平衡”数对；

（2）若 $m=1$，判断 $f(x)=\sin x$ 是否为“可平衡”函数，并说明理由；

（3）若 m_1、$m_2\in\mathbf{R}$，且 $(m_1,\frac{\pi}{2})$、$(m_2,\frac{\pi}{4})$ 均为函数 $f(x)=\cos^2x\ (0<x\leqslant\frac{\pi}{4})$ 的“平衡”数对，求 $m_1^2+m_2^2$ 的取值范围．

【答案】（1）（2，0）；

（2）是；

（3）（1，8]．

【分析】（1）根据“平衡数对”定义建立方程，根据恒成立求解即可；

（2）$m=1$ 时，判断是否存在 k 使等式恒成立，利用三角函数化简求解即可；

（3）根据“平衡数对”的定义将 m_1，m_2 用关于 x 的三角函数表达，再利用三角函数的取值范围求解即可．

【解答】解：（1）根据题意可知，对于任意实数 x，$mx^2=(x+k)^2+(x-k)^2=2x^2+2k^2$，

即 $mx^2=2x^2+2k^2$，即 $(m-2)x^2-2k^2=0$ 对于任意实数 x 恒成立，

只有 $m=2$，$k=0$，

故函数 $f(x)=x^2$ 的“平衡”数对为（2，0）；

（2）若 $m=1$，则 $m\cdot f(x)=\sin x$，

$f(x+k)+f(x-k)=\sin(x+k)+\sin(x-k)=2\sin x\cos k$，

要使得 $f(x)$ 为“可平衡”函数，需使 $(1-2\cos k)\cdot\sin x=0$ 对于任意实数 x 均成立，只有 $\cos k=\frac{1}{2}$，

此时 $k=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$n\in\mathbf{Z}$，故 k 存在，

所以 $f(x)=\sin x$ 是“可平衡”函数；

（3）假设存在实数 m、k（$k\neq 0$），对于定义域内的任意 x 均有 $m\cdot f(x)=f(x+k)+f(x-k)$ 成立，

则 $m\cos^2x=\cos^2(x+k)+\cos^2(x-k)=\frac{1}{2}[1+\cos2(x+k)]+\frac{1}{2}[1+\cos2(x-k)]$，

$\therefore\frac{1}{2}m(1+\cos2x)=\frac{1}{2}[1+\cos2(x+k)]+\frac{1}{2}[1+\cos2(x-k)]$，

$\therefore m+m\cos2x=1+\cos2x\cos2k-\sin2x\sin2k+1+\cos2x\cos2k+\sin2x\sin2k$，

$\therefore m(1+\cos2x)=2+2\cos2x\cos2k$，

∵$(m_1,\frac{\pi}{2})$，$(m_2,\frac{\pi}{4})$均为函数$f(x)=\cos^2x(0<x\leqslant\frac{\pi}{4})$的“平衡”数对，

∴$m_1(1+\cos2x)=2+2\cos2x\cos\pi=2-2\cos2x$，$m_2(1+\cos2x)=2+2\cos2x\cos\frac{\pi}{2}=2$，

∵$0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$，∴$0<2x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0<\cos2x\leqslant1$，

∴$m_1=\frac{2-2\cos2x}{1+\cos2x}=\frac{2-2(1-2\sin^2x)}{1+2\cos^2x-1}=\frac{2\sin^2x}{\cos^2x}=2\tan^2x$，$m_2=\frac{2}{1+\cos2x}=\frac{1}{\cos^2x}$，

∴$m_1^2+m_2^2=4\tan^4x+\frac{1}{\cos^4x}$，设$h(x)=4\tan^4x+\frac{1}{\cos^4x}$，$(0<x\leqslant\frac{\pi}{4})$，函数单调递增，

∴$h(0)<h(x)\leqslant h(\frac{\pi}{4})$，即 $1<h(x)\leqslant8$，

∴$m_1^2+m_2^2$的取值范围为（1，8].