2023年九年级学业水平模拟考试

数学试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑.）

1. 下列各数比-2小的数是（　　）

A. 0　　B. -1　　C. -1.5　　D. -2.5

【答案】D

【解析】

【分析】根据有理数的大小比较法则比较即可.

【详解】解：$\because$ $-2.5<-2<-1.5<-1<0$，

$\therefore$比-2小的数是-2.5，

故选：D.

【点睛】本题考查了有理数的比较大小，注意绝对值越大的负数的值越小是解题的关键.

2. 函数 $y=\sqrt{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x>3$　　B. $x\neq3$　　C. $x\geq3$　　D. $x\geq0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件：被开方数大于或等于 0，可以求出 x 的范围.

【详解】由题意得：x-3⩾0，

解得：x⩾3，

故选 C.

【点睛】本题考查了求函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：(1)当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；(2)当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；(3)当函数表达式是二次根式时，被开方数为非负数.

3. 下列运算正确的是（　　）

A. $\left(x^2\right)^3=x^8$　　B. $x^2\times x^3=x^5$　　C. $x^2+x^3=x^5$　　D. $x^8\div x^2=x^4$

【答案】B

【解析】

【分析】根据幂的乘方运算、同底数幂的乘除法运算、合并同类项法则，即可一一判定.

【详解】解：A.$\left(x^2\right)^3=x^6$，故该选项错误，不符合题意；

B. $x^2\times x^3=x^5$，故该选项正确，符合题意；

C. x^2与x^3不是同类项，不能进行加法运算，故该选项错误，不符合题意；

D. $x^8\div x^2=x^6$，故该选项错误，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了幂的乘方运算、同底数幂的乘除法运算、合并同类项法则，熟练掌握和运用各运算法则是解决本题的关键．

4. 计算 $a-1+\frac{1}{a+1}$ 的结果是（　　）

A. $\frac{a^2}{a+1}$　　B. $\frac{a}{a+1}$　　C. $a+1$　　D. a^2

【答案】A

【解析】

【分析】先通分，再进行分式的加减运算．

【详解】解： $a-1+\frac{1}{a+1}$

$=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}+\frac{1}{a+1}$

$=\frac{a^2-1+1}{a+1}$

$=\frac{a^2}{a+1}$．

故选：A．

【点睛】本题考查分式的加减运算．掌握分式加减运算法则是解题的关键．也考查了平方差公式．

5. 点 P 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像上， PA 垂直于 x 轴，垂足为 A， PB 垂直于 y 轴，垂足为 B．则矩形 $OAPB$ 的面积是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】设点 P 的坐标为 (a,b)，可求得 $PA=|b|$， $PB=|a|$，再根据矩形的面积公式，即可求解．

【详解】解：设点 P 的坐标为 (a,b)，

则 $PA=|b|$， $PB=|a|$，

把点 P 的坐标代入函数解析式，得： $ab=6$，

$\therefore$ 矩形 $OAPB$ 的面积是： $PA\cdot PB=|b|\cdot|a|=|ab|=6$，

故选：C．

【点睛】本题考查了利用反比例函数的系数求面积，熟练掌握和运用利用反比例函数的系数求面积的方法是解决本题的关键．

6. 下列调查适合用普查方式的是（　　）

A. 某品牌灯泡的使用寿命　　B. 全班学生最喜爱的体育运动项目

C. 长江中现有鱼的种类　　D. 全市学生的家庭 1 周内丢弃塑料袋的数量

【答案】B

【解析】

【分析】由普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似．

【详解】解：A．该选项如果进行普查，那么全部灯泡作废，所以只适宜抽样调查，故此选项不符合题意；

B． 该选项适宜普查；

C． 该选项如果进行普查，所需人力、物力、时间和经费较多，难度大，所以只适宜抽样调查，故此选项不符合题意；

D． 该选项如果进行普查，所需人力、物力和时间较多，所以只适宜抽样调查，，故此选项不符合题意．故选：B．

【点睛】本题考查的是普查和抽样调查的选择．调查方式的选择需要将普查的局限性和抽样调查的必要性结合起来，具体问题具体分析，普查结果准确，所以在要求精确、难度相对不大，实验无破坏性的情况下应选择普查方式，当考查的对象很多或考查会给被调查对象带来损伤破坏，以及考查经费和时间都非常有限时，普查就受到限制，这时就应选择抽样调查．掌握普查和抽样调查是解题的关键．

7. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）

A. 平行四边形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 菱形

【答案】D

【解析】

【分析】把一个图形绕某一点旋转$180°$，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形．根据轴对称图形和中心对称图形的概念，对各选项分析判断即可得解．

【详解】解：A、平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B、等腰三角形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

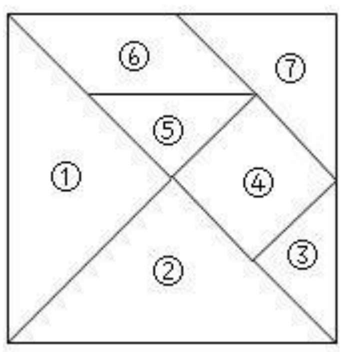
C、直角三角形可能是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D、菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意．

故选：D．

【点睛】本题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，熟练掌握相关概念是解本题的关键．

8. 如图，七巧板是我国民间流传最广的一种传统智力玩具，也被西方称为“东方魔板”，它是由正方形分割成七块板组成．若这个正方形的面积为 16，则图中两块面积之和为 5 的是（　　）



A. ①⑦　　B. ②④　　C. ①③　　D. ④⑥

【答案】C

【解析】

【分析】分别求出各部分的面积即可求解.

【详解】解：∵正方形的面积为 16，

∴正方形的边长为 $\sqrt{16}=4$.

∴对角线的长为 $\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

∴①、②的直角边长为 $2\sqrt{2}$，

③、④、⑤、⑥在对角线上的边长为 $\sqrt{2}$，

③的斜边为 $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$，

⑦的直角边长为 2，

∴ $S_{①}=S_{②}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

$S_{③}=S_{⑤}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，

$S_{⑥}=S_{④}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，

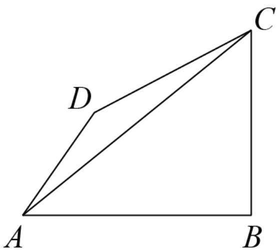
$S_{⑦}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

∴面积之和为 5 的是①③，①⑤，②③，

②⑤．故选 C.

【点睛】本题考查了正方形的性质，算术平方根的意义，以及勾股定理等知识，求出各部分的面积是解答本题的关键.

9. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=150^{\circ}$，$\angle DCB=60^{\circ}$，$DC=CB$．若 $AB=4$，则 AC 的最大值是（　　）



A. $2+2\sqrt{3}$　　B. $2+4\sqrt{3}$　　C. $4+\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得 $\angle ADB=90^{\circ}$，再根据直角三角形斜边中线的性质解得 $DF=\frac{1}{2}AB=2$，以 AB 为边作等边 ABE，连接 EF,DE，由勾股定理解得 EF 的长，继而证明 $DBE\cong$ CBA，由全等三角形对应边相等得到 $DE=AC$，最后根据三角形三边关系即可求解.

【详解】解：取 AB 的中点 F，连接 DF，

$\angle DCB = 60°, BC = CD$，

∴ BCD 为等边三角形，

$\therefore \angle BDC = \angle DBC = \angle BCD = 60°$， $BC = BD = CD$，

$\angle ADC = 150°, AB = 4$，

$\therefore \angle ADB = 90°, DF = \frac{1}{2}AB = 2$，

以 AB 为边作等边 ABE，如图，连接 EF, DE，则 $AE = BE = AB = 4$，

∵F 为 AB 中点，

$\therefore EF \perp AB, BF = \frac{1}{2}AB = 2$，

∴ $EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$，

$\angle ABE = 60°$，

$\therefore \angle DBE = \angle ABD + 60° = \angle ABC$，

$BD = BC, BE = AB$，

$BD = BC, BE = AB$，

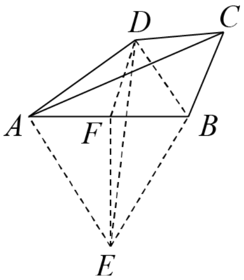
$\therefore$ $DBE \cong$ CBA(SAS)，

$\therefore DE = AC$，

$DF + EF \geq DE$，

∴当且仅当 DE 过点 F 时，AC 最长，此时 $AC = DF + EF = 2 + 2\sqrt{3}$，故 A 正确.

故选：A.



【点睛】本题考查直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质，涉及直角三角形斜边的中线、 勾股股定理、三角形三边关系等知识，掌握相关知识是解题关键.

10. 小明在数学实践活动中尝试做一个无盖的长方体纸盒．他把一张长为18cm，宽为12cm 的矩形纸板分割成 5 个矩形纸板，他用其中 1 个作为底面，其余 4 个作为侧面，恰好能做成这个纸盒，则这个纸盒的侧面高不可能是(　　)

A. 1cm　　B. 2cm　　C. 3cm　　D. 4cm

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可画出草图，将大矩形分为 5 个小矩形， 其中 1 个为底面，其余 4 个为侧面，要求满足可拼成一个无盖的长方体， 经分析绘图，发现有 4 种情况，设侧面的高为 x 厘米，底面的长为 a 厘米，底面的宽为 b 厘米， 根据草图分别列出三元一次方程据，解出侧面高可能的值，即可得到答案.

【详解】根据题意可得，有 4 种分割方法，

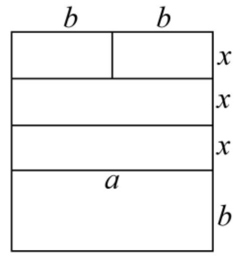


图1

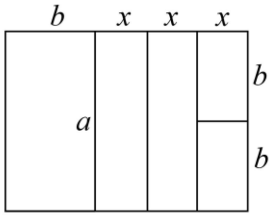


图2

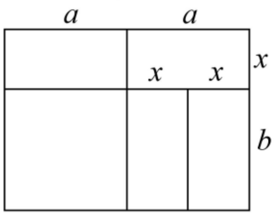


图3

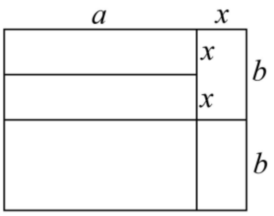


图4

设侧面的高为 x 厘米，底面的长为 a 厘米，底面的宽为 b 厘米，

如图 1，$\begin{cases} a=18 \\ b+3x=12 \\ 2b=18 \end{cases}$，解得 $a=18, b=9, x=1$；

如图 2，$\begin{cases} a=12 \\ b+3x=18 \\ 2b=12 \end{cases}$，解得 $a=12, b=6, x=4$；

如图 3，$\begin{cases} 2a=18 \\ b+x=12 \\ a+2x=18 \end{cases}$，解得 $a=9$，$b=\dfrac{15}{2}, x=\dfrac{9}{2}$；

如图 4，$\begin{cases} a+x=18 \\ b+2x=12 \\ 2b=12 \end{cases}$，解得 $a=15, b=6, x=3$.

∴侧面高不可能是

2cm．故选 B.

【点睛】本题考查了三元一次方程组的应用，分类讨论是解答本题的关键.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分，其中 17、18 题第一空 1 分，第二空 2 分．不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置.）

11. 分解因式：$ab+ac-ad=$______.

【答案】 $a(b+c-d)$

【解析】

【分析】提取公因式a，即可完成因式分解.

【详解】解： $ab+ac-ad=a(b+c-d)$.

【点睛】本题主要考查了提公因式法因式分解，正确提取公因式a 是解题关键.

12. 福建舰（舷号：18）是我国完全自主设计建造的首艘弹射型航空母舰，满载排水量约为 87000 吨．数据 87000 用科学记数法表示是______．

【答案】8.7×10^{4}

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．

【详解】解：87000 用科学记数法表示为8.7×10^{4}．故答案为：8.7×10^{4}．

【点睛】本题考查了科学记数法的表示方法，掌握形式为$a\times10^{n}$，其中$1\le|a|<10$是关键．

13. 把一次函数$y=-2x+3$的图象沿y轴向下平移 2 个单位长度后，得到的新图像对应的函数表达式是______．

【答案】$y=-2x+1$

【解析】

【分析】根据函数图象上下平移的规律可求得答案．

【详解】解：将一次函数$y=-2x+3$的图象沿y轴向下平移 2 个单位长度，所得图象对应的函数关系式为

$y=-2x+3-2=-2x+1$，

故答案为：$y=-2x+1$．

【点睛】本题主要考查函数图象的平移，掌握函数图象平移的规律是解题的关键，即“左加右减，上加下减”．

14. 有些真命题的逆命题也是真命题，在你学过的命题中，请写出一个这样的命题：______．

【答案】两直线平行，同位角相等（答案不唯一）．

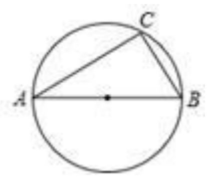
【解析】

【分析】根据学过的真命题解答即可．

【详解】两直线平行，同位角相等是真命题，它的逆命题为：同位角相等，两直线平行也是真命题．故答案为：两直线平行，同位角相等（答案不唯一）．

【点睛】本题考查了逆命题与真命题的知识，如果一个命题的题设和结论分别是另一个命题的结论和题设，那么这两个命题叫做互逆命题，其中一个命题叫做另一个命题的逆命题．

15. 如图，已知 AB 是△ABC 外接圆的直径，∠A＝35°，则∠B 的度数是______．



【答案】55°．

【解析】

【详解】解：∵AB 是△ABC 外接圆的直径，

∴∠C=90°，

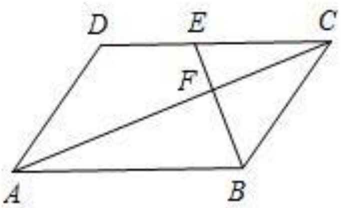
∵∠A=35°，

∴∠B=90°－

∠A=55°．故答案是：

55°．

16．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$CE=ED$，BE 交 AC 于点 F，则 $EF:FB$ 的比值是______．



【答案】$1:2$

【解析】

【分析】证明$\triangle CEF \backsim \triangle ABF$，然后利用相似三角形的性质即可求解．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CE \parallel AB$，$CD=AB$，

∴$\triangle CEF \backsim \triangle ABF$，

∴ $EF:FB=CE:AB$．

∵ $CE=ED$，

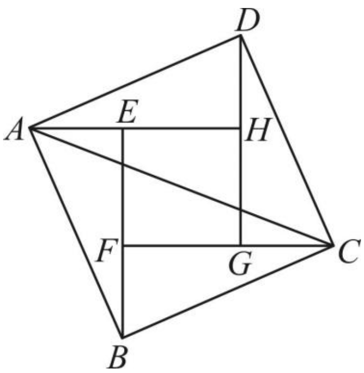
∴ $CE:CD=1:2$，

∴ $EF:FB=1:2$．

故答案为：$1:2$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定与性质，证明$\triangle CEF \backsim \triangle ABF$ 是解答本题的关键．

17．如图，这是著名的“赵爽弦图”，我国古代数学家赵爽利用它证明了勾股定理．它是由四个全等的直角三角形拼成得到正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$．连接 AC，若$\angle DAC$ 恰好被 AH 平分，已知 $EF=3$，则正方形 $EFGH$ 的面积是______，正方形 $ABCD$ 的面积是______．



【答案】　①. 9　②. $18+9\sqrt{2}$ ##$9\sqrt{2}+18$

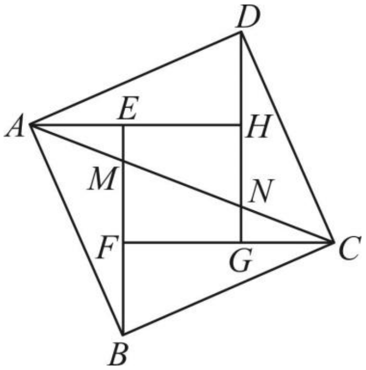
【解析】

【分析】根据正方形的面积公式可求得正方形 $EFGH$ 的面积；结合题意，证明 $AEM\cong CGN$，$ADH\cong ANH$，

由全等三角形的性质可得 $EM=GN$， $DH=NH$，设 $DH=NH=AE=x$， 则 $GN=EM=3-x$，证明

$AEM \backsim \quad AHN$，可得$\dfrac{EM}{HN}=\dfrac{AE}{AH}$，代入并求值，然后在Rt $\quad ADH$ 中由勾股定理可得 $AD^2=DH^2+AH^2=18+9\sqrt{2}$，即可获得答案.

【详解】解：设 AC 交 EF、HG 于点 M、N，如下图，



∵四边形 $EFGH$ 为正方形，

∴ $EF \parallel GH$， $EH \parallel FG$， $EF=FG=GH=HE$，

∵ $EF=3$，

∴ $S_{正方形EFGH}=3\times3=9$；

∵根据题意， $\quad ADH$ 、 $\quad BAE$ 、$\vee CBF$ 与$\triangle DCG$为四个全等的直角三角形，

∴ $AE=BF=CG=DH$， $\angle AEB=\angle BFC=\angle CGD=\angle DHA=90^\circ$，

∵ $EH \parallel FG$，

∴ $\angle EAM=\angle GCN$，

∴ $\quad AEM\cong \quad CGN(\text{ASA})$，

∴ $EM=\ GN$，

∵ AH 平分$\angle DAC$，

∴ $\angle DAH=\angle NAH$，

又∵ $\angle AHD=\angle AHN=90^\circ$， $AH=AH$，

∴ $\quad ADH\cong \quad ANH(\text{ASA})$，

∴ $DH=NH$，

设 $DH=NH=AE=x$，则$GN=EM=3-x$，

∵ $EF \parallel GH$，

∴ $\angle AEM=\angle AHN$， $\angle AME=\angle ANH$，

∴ $\quad AEM \backsim \quad AHN$，

∴ $\dfrac{EM}{HN}=\dfrac{AE}{AH}$，即 $\dfrac{3-x}{x}=\dfrac{x}{3+x}$，

解得 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ （舍去），

经检验， $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 是该分式方程的解，

$\therefore DH = AE = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$在 Rt $\triangle ADH$ 中，$AD^2 = DH^2 + AH^2 = (\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 3)^2 = 18 + 9\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = AD^2 = 18 + 9\sqrt{2}$．

故答案为：9，$18 + 9\sqrt{2}$．

【点睛】本题主要考查了勾股定理、全等三角形的判定与性质、正方形的性质、角平分线的定义、相似三角形的判定与性质等知识，熟练掌握相关知识并灵活运用是解题关键．

18. 已知点$(-3, p)$，$(1, q)$都在二次函数 $y = ax^2 + bx + c\,(a<0)$ 的图象上．设函数图象的顶点横坐标为 m，当 $p = q$ 时，m 的值是______；当 $p < q < c$ 时，m 的取值范围是______．

【答案】 ①. -1 ②. $-1 < m < \dfrac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据到对称轴距离相等的点的纵坐标相等，进行计算即可；分别表示出 p 、q，根据 $p < q < c$ 进行计算即可．

【详解】解：当 $p = q$ 时，

$m - (-3) = 1 - m$，

解得：$m = -1$；

当 $p < q < c$ 时，

点$(-3, p)$，$(1, q)$在图象上，

$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + c = p① \\ a + b + c = q② \end{cases}$，

$p < q < c$，

$\therefore 9a - 3b + c < a + b + c$，

整理得：$2a < b$，

$\therefore \dfrac{b}{2a} < 1$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a} > -1$，

$m = -\dfrac{b}{2a}$，

$\therefore m > -1$；

$a + b + c < c$，

$\therefore a + b < 0$，

$m=-\dfrac{b}{2a}$，

$\therefore b=-2ma$，

$\therefore a-2ma<0$，

解得：$m<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore -1<m<\dfrac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了二次函数的基本性质，理解其基本性质是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤等．）

19. 计算：

（1）$\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\tan 60°$；

（2）$(2x-y)^2-x(x+y)$．

【答案】（1）$-1+\sqrt{3}$

（2）$3x^2-5xy+y^2$

【解析】

【分析】（1）先根据二次根式的性质、负整数指数幂和特殊角三角函数值将原式化简，再进行加减运算即可；

（2）先用完全平方公式、单项式乘多项式的法则将原式展开，再合并同类项即可.

【小问 1 详解】

解：$\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\tan 60°$

$=3-4+\sqrt{3}$

$=-1+\sqrt{3}$；

【小问 2 详解】

$(2x-y)^2-x(x+y)$

$=4x^2-4xy+y^2-x^2-xy$

$=3x^2-5xy+y^2$．

【点睛】本题考查实数的运算和整式的混合运算．掌握二次根式的性质、负整数指数幂、特殊角三角函数值、完全平方公式和单项式乘多项式运算法则是解题的关键.

20. （1）解方程：$x^2-5x+3=0$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}2x+5\geq 3\\ \dfrac{x}{2}<\dfrac{x+1}{3}\end{cases}$．

【答案】（1）$x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ （2）$-1\le x<2$

【解析】

【分析】（1）利用公式法解该一元二次方程即可；

（2）分别解两个不等式，然后按照“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到”的原则确定解不等式组的解集即可．

【详解】解：（1）$x^2-5x+3=0$，

∵ $a=1,b=-5,c=3$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times3=13>0$，

∴ $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2\times1}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$，

∴该方程的解为 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$；

（2）$\begin{cases}2x+5\ge3①\\ \dfrac{x}{2}<\dfrac{x+1}{3}②\end{cases}$，

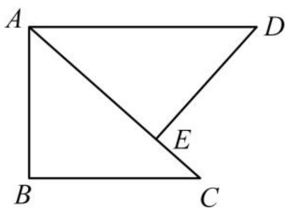
解不等式①，可得 $x\ge-1$，

解不等式②，可得 $x<2$，

所以，该不等式组的解集为$-1\le x<2$．

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程以及解一元一次不等式组，熟练掌握相关运算方法和步骤是解题关键．

21．如图， ABC 中，Ð$B=90^\circ$ ，$AD\parallel BC$， $DE\perp AC$，垂足为 E.



（1）若$\angle C=40^\circ$，求$\angle D$的度数；

（2）若 $AD=AC$，求证： $\triangle DEA\cong\triangle ABC$．

【答案】（1）50°

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）首先根据平行线的性质得到$\angle DAC=\angle C=40^\circ$，然后利用直角三角形两锐角互余即可求出$\angle D$的度数；

（2）直接利用AAS 证明即可．

【小问 1 详解】

∵ $AD\parallel BC$， $\angle C=40^\circ$

$\therefore \angle DAC = \angle C = 40°$

$\because DE \perp AC$

$\therefore \angle D = 90° - \angle DAC = 50°$；

【小问 2 详解】

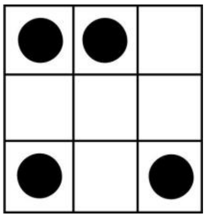
在$\triangle DEA$和　ABC中

$$\begin{cases} \angle DEA = \angle B = 90° \\ \angle DAE = \angle C \\ AD = AC \end{cases}$$

$\therefore$　$DEA \cong$　$ABC(\text{AAS})$.

【点睛】此题考查了平行线的性质，直角三角形的性质，全等三角形的判定，解题的关键是熟练掌握以上知识点．

22. 如图，在一个3×3的棋盘内已有四枚棋子，在剩余的方格内继续随机放入棋子（每一方格内最多放入一枚棋子），如果有三枚棋子在同一条直线上，我们称之为“三连珠”



（1） 如果随机放入1枚棋子，出现“三连珠”的概率是_______．

（2） 如果随机放入2枚棋子，求棋盘内同时出现三个“三连珠”的概率．（请用“画树状图”或“列表”等方法写出分析过程）

【答案】（1） $\frac{4}{5}$

（2） $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】（1）直接由概率公式求解即可；

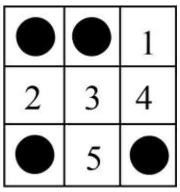
（2）画树状图，共有 20 个等可能的结果，棋盘内同时出现三个“三连珠”的结果有4个，再由概率公式求解即可．

【小问 1 详解】

解：棋盘内已有四枚棋子，在剩余的5个方格内随机放入一枚棋子，能出现“三连珠”的位置是 1、2、3、5 四个位置，

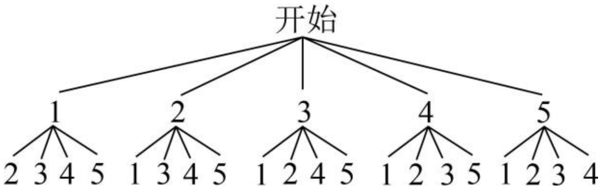
$\therefore$出现“三连珠”的概率是$\frac{4}{5}$．

故答案为：$\frac{4}{5}$．



【小问 2 详解】

画树状图如图：



共有 20 个等可能的结果，棋盘内同时出现三个“三连珠”的有$(1，3)$、$(3，1)$、$(3，5)$、$(5，3)$，共4个结果，

∴棋盘内同时出现三个“三连珠”的概率为 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$．

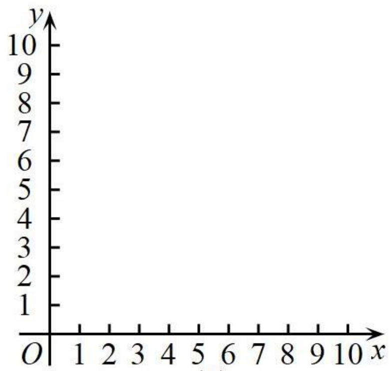
∴棋盘内同时出现三个“三连珠”的概率为 $\frac{1}{5}$．

【点睛】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

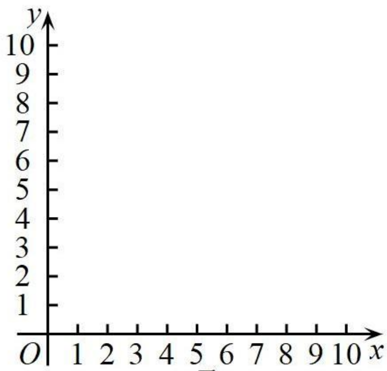
23. 甲、乙两名射箭爱好者进行了一次射箭比赛，他们 10 次射箭的成绩如下（单位：环）：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
甲	8	7	7	6	9	8	7	7	8	7
乙	8	9	9	2	9	7	10	4	8	9

（1） 将上面的两组数据分别绘制成折线统计图：



甲



乙

（2） 根据你所学的统计知识，请你利用数据对甲、乙的射箭成绩做出比较与评价．

【答案】（1）见解析　　（2）从中位数、众数和平均数看乙的成绩比甲的成绩好，从方差看甲的成绩比乙的成绩稳定．

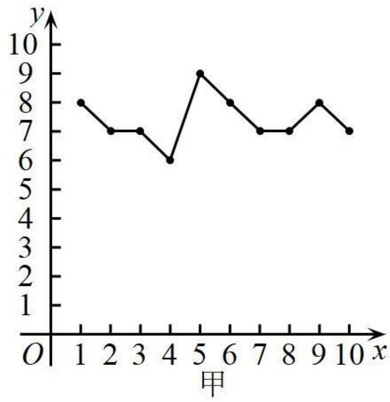
【解析】

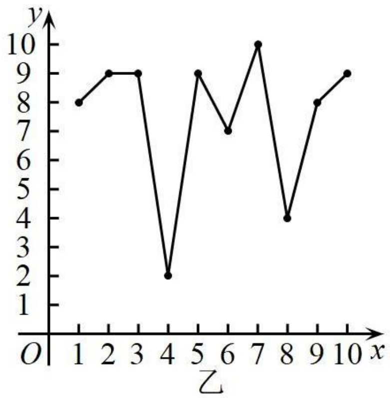
【分析】（1）根据描点，连线的步骤画图即可；

（2）分别求出中位数、众数、平均数、方差，然后比较即可．

【小问 1 详解】

如图，





【小问 2 详解】

甲的中位数是$\left(7+7\right)\div2=7$，

甲的众数是 7，

甲的平均数是$\left(8+7+7+6+9+8+7+7+8+7\right)\div10=7.4$，

甲的方差是$\dfrac{(8-7.4)^2\times3+(7-7.4)^2\times5+(6-7.4)^2+(9-7.4)^2}{10}=0.82$．

乙的中位数是$\left(8+9\right)\div2=8.5$，

乙的众数是 9，

乙的平均数是$\left(8+9+9+2+9+7+10+4+8+9\right)\div10=7.5$，

乙的方差是$\dfrac{(8-7.5)^2\times2+(9-7.5)^2\times4+(2-7.5)^2+(4-7.5)^2+(7-7.5)^2+(10-7.5)^2}{10}=5.85$．

从中位数、众数和平均数看乙的成绩比甲的成绩好，从方差看甲的成绩比乙的成绩稳定．

【点睛】本题考查了折线统计图，中位数，众数，平均数，方差的知识，求出甲和乙的中位数、众数、平均数、方差是解答本题的关键．

24. 已知函数 $y=mx^2+\left(m-1\right)x-1$（$m$ 为常数）.

（1） 当$m=1$时，设函数图像与 x 轴交于A，B两点（A 在B左侧），与 y 轴交于点C． 请判断 ABC 的形状并说明理由；

（2） 证明：无论m 取何值，函数图像与 x 轴一定有交点．

【答案】（1）等腰直角三角形

（2）见详解

【解析】

【分析】（1）当$m=1$时，分别求得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,-1)$，借助勾股定理可得 $AC=BC$，再证明$\angle ACB=90°$，即可获得答案；

（2）分情况讨论：①当 $m=0$ 时，此时函数为 $y=-x-1$，为一次函数，与 x 轴交点为$(-1,0)$；②当 $m\neq0$ 时，此时函数为二次函数，令 $y=0$ 时，可有 $mx^2+\left(m-1\right)x-1=0$，由一元二次方程的根的判别式分析判断即可．

【小问 1 详解】

解： ABC 为等腰直角三角形，理由如下：

对于函数 $y=mx^2+(m-1)x-1$，当 $m=1$时，

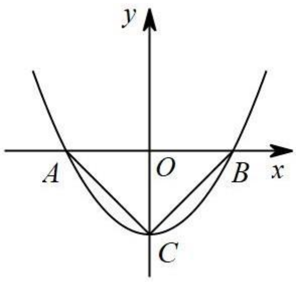
可有 $y=x^2-1$，

∴当 $x=0$时， $y=-1$，即$C(0,-1)$，

当$y=0$时，有 $x^2-1=0$，解得 $x_1=-1,x_2=1$，

又∵ A 在 B 左侧，

∴ $A(-1,0),B(1,0)$，



∴ $OA=OB=OC=1$， $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2}$， $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{2}$，

∴ $AC=BC$，

∵ $OA=OC,\angle AOC=90°$，

∴ $\angle OAC=\angle OCA=45°$，

同理$\angle OBC=\angle OCB=45°$，

∴ $\angle ACB=\angle OCA+\angle OCB=90°$，

又∵ $AC=BC$，

∴ ABC 为等腰直角三角形；

【小问 2 详解】

①当 $m=0$时，此时函数为 $y=-x-1$，为一次函数，

令 $y=0$，则 $x=-1$，即此时一次函数图像与 x 轴交点为$(-1,0)$；

②当 $m\neq 0$时，此时函数为二次函数，

令 $y=0$， $y=mx^2+(m-1)x-1$有解即可，

即 $mx^2+(m-1)x-1=0$ 有解，

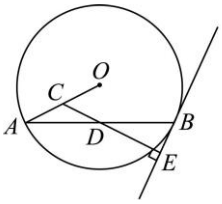
∵ $\Delta=(m-1)^2-4\times m\times(-1)=(m+1)^2\geq 0$，

∴ $mx^2+(m-1)x-1=0$ 有解.

综上所述，无论 m 取何值，函数图像与 x 轴一定有交点.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图像与坐标轴交点、勾股定理、等腰三角形的判定与性质等知识，利用数形结合的思想分析问题是解题关键.

25. 如图，在 O 中，C，D 分别为半径OA，弦 AB 的中点，连接CD 并延长，交过点 B 的切线于点 E.



（1） 求证： $CE \perp BE$；

（2） 若 $\sin\angle A=\frac{1}{3}$， $BE=2$，求　O 半径的长.

【答案】（1）见解析；

（2）$\frac{9\sqrt{2}}{2}$

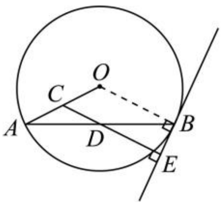
【解析】

【分析】（1）连接OB，根据切线的性质得出$\angle OBE=90°$，根据三角形的中位线求出$CD \parallel OB$，即可求出答案；

（2）解直角三角形求出 BD，连接OD，根据平行线得出$\angle OBA=\angle CDA$，解直角三角形求出OD，即可得出答案.

【小问 1 详解】

证明：连接OB，



∵ BE 是　O 的切线，

∴ $BE \perp BO$，

∴ $\angle OBE=90°$，

∵C，D 分别为半径OA，弦 AB 的中点，

∴ CD 为　AOB 的中位线.

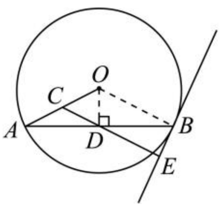
∴ $CD \parallel OB$，

∴ $\angle CEB=\angle OBE=90°$，

∴ $CE \perp BE$；

【小问 2 详解】

如图．连接OD，



∵ $OA=OB$，

∴ $\angle A=\angle OBA$，

$\because CD \parallel OA$，

$\therefore \angle OBA = \angle CDA$，

$\therefore \angle A = \angle CDA$，

$\because \angle CDA = \angle BDE$，

$\therefore \angle A = \angle BDE$，

$\therefore \sin \angle BDE = \sin \angle A = \frac{1}{3}$，

$\therefore \sin \angle BDE = \frac{BE}{BD} = \frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{2}{BD} = \frac{1}{3}$，

$\therefore BD = 6$，

$\therefore AD = BD = 6$，

$\because AD = BD$，$OA = OB$，

$\therefore OD \perp AB$，

设$OD = x$，则$OA = 3x$，

$\therefore 6^2 + x^2 = (3x)^2$，

解得：$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore OA = 3x = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

即$\odot O$半径的长为$\frac{9\sqrt{2}}{2}$

【点睛】本题考查了解直角三角形，切线的性质，平行线的性质，勾股定理等知识点，能综合运用定理进行推理是解此题的关键．

26. 春夏之交正是农业用水高峰期，某地水利站有 A, B 两台泵机实施调水作业．如果单开 A 泵机，可以正好在预定时间内完成，总费用为 1920 元；如果单开 B 泵机，则要比预定时间多 4 天，总费用为 2240 元．水利站经过测算，如果 A, B 两台泵机同时开启 3 天，然后由 B 泵机单独完成余下的调水作业，这样也能正好在预定时间内完成．

（1） A, B 两台泵机平均每天费用分别是多少元？

（2）水利站接到上级部门要求提前 3 天完成调水作业，请问如何安排两台泵机作业才能完成任务？花费最少是多少元？（注：不足一天按照一天计算费用．）

【答案】（1） A 泵机平均每天费用是 160 元， B 泵机平均每天费用是 140 元

（2） A 泵机工作 9 天， B 泵机工作 4 天，总费用为最少为 2000 元

【解析】

【分析】（1）设预定完成工作任务的时间为 x 天，则单开A 泵机需要 x 天完成，单开 B 泵机需要$(x+4)$ 天完成，由

题意列分式方程并求解，即可获得答案；

（2）设A泵机工作 m 天，B 泵机工作 n 天（其中 $m\le 9$，$n\le 9$）总费用为W元，由题意可得$W=160m+140n$，$\frac{1}{12}m+\frac{1}{12+4}n=1$，整理可得$W=-\frac{80}{3}m+2240$，结合一次函数的性质即可获得答案.

【小问 1 详解】

解：设预定完成工作任务的时间为 x 天，则单开A泵机需要 x 天完成，单开 B 泵机需要$(x+4)$天完成，

由题意可得 $\frac{3}{x}+\frac{x}{x+4}=1$，

解得 $x=12$，

经检验，$x=12$ 是原分式方程的解，

所以，A泵机平均每天费用是$\frac{1920}{x}=\frac{1920}{12}=160$元，

B泵机平均每天费用是 $\frac{2240}{x+4}=\frac{2240}{12+4}=140$元；

【小问 2 详解】

设A泵机工作 m 天，B 泵机工作 n 天（其中 $m\le 9$，$n\le 9$）总费用为W元，

由题意可得，$W=160m+140n$，

$\because \frac{1}{12}m+\frac{1}{12+4}n=1$，

$\therefore n=16-\frac{4}{3}m$，

$\therefore W=160m+140(16-\frac{4}{3}m)=-\frac{80}{3}m+2240$，

$\because -\frac{80}{3}<0$，

$\therefore W$ 随 m 的增大而减小，

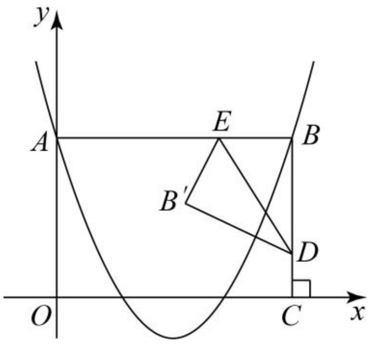
$\therefore$当 $m=9$ 时，W 有最小值，最小值为$W=-\frac{80}{3}\times 9+2240=2000$元，

此时 $n=16-\frac{4}{3}\times 9=4$ 天，

$\therefore$ A泵机工作 9 天，B 泵机工作 4 天，总费用为最少为 2000 元.

【点睛】本题主要考查了分式方程和一次函数的应用，理解题意，找到等量关系是解题关键.

27. 如图，已知二次函数 $y=x^2+mx+8$ 的图像交 y 轴于点A，作 AB 平行于 x 轴，交函数图像于另一点 B（点B在第一象限）. 作BC垂直于 x 轴，垂足为C，点 D 在 BC 上，且$CD=\frac{1}{3}BD$. 点 E 是线段 AB 上的动点（B 点除外），将 DBE 沿 DE 翻折得到 $DB'E$.



（1）当$\angle BED=60^{\circ}$时，若点B'到y轴的距离为$\sqrt{3}$，求此时二次函数的表达式；

（2）若点E在AB上有且只有一个位置，使得点B'到x轴的距离为3，求m的取值范围．

【答案】（1）$y=x^2-4\sqrt{3}x+8$或$y=x^2-2\sqrt{3}x+8$

（2）$-6\sqrt{11}<m\le-\dfrac{6\sqrt{35}}{7}$

【解析】

【分析】（1）作$B'F\perp AB$于F，先确定$A(0,\ 8)$，根据矩形的性质可得∴$CB=AO=8$，可得出$BD=6$，利用锐角三角函数求出$BE=2\sqrt{3}$，根据翻折的性质得到$\angle B'ED=60^{\circ}$，$B'E=2\sqrt{3}$，利用三角函数求出$EF=\sqrt{3}$，根据已知可得$AF=\sqrt{3}$，然后分两种情况：点B'在y轴右侧时和点B'在y轴左侧时，分别确定点B的坐标即可得出结论；

（2）分两种情况讨论即可．

【小问1详解】

解：作$B'F\perp AB$于F，

∵二次函数$y=x^2+mx+8$的图像交y轴于点A，

∴当$x=0$时，$y=8$，

∴$OA=8$，$A(0,\ 8)$，

又∵AB平行于x轴，BC垂直于x轴，

∴四边形$AOCB$是矩形，

∴$CB=AO=8$，$\angle ABC=90^{\circ}$，

∵$CD=\dfrac{1}{3}BD$，

∴$BD=6$，

∵$\angle BED=60^{\circ}$，

∴$BE=\dfrac{BD}{\tan\angle BED}=\dfrac{6}{\tan 60^{\circ}}=2\sqrt{3}$，

∵ DBE沿DE翻折得到 $DB'E$，

∴$\angle B'ED=\angle BED=60^{\circ}$，$B'E=BE=2\sqrt{3}$，

∴$\angle B'EF=180^{\circ}-\angle B'ED-\angle BED=60^{\circ}$，

∴在Rt　$B'EF$ 中，$EF = B'E\cos\angle B'EF = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \sqrt{3}$，

∵点 B' 到 y 轴的距离为 $\sqrt{3}$，

∴ $AF = \sqrt{3}$，

当点 B' 在 y 轴右侧时，

∵ $AB = AF + FE + EB = \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$，

∴ $B\left(4\sqrt{3}，8\right)$,

∵点 B 在二次函数 $y = x^2 + mx + 8$ 的图像上，

∴ $8 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3}m + 8$，

解得：$m = -4\sqrt{3}$，

∴ $y = x^2 - 4\sqrt{3}x + 8$，

当点 B' 在 y 轴左侧时，此时 E 与 A 重合，

∴ $AB = 2\sqrt{3}$，

∴ $B\left(2\sqrt{3}，8\right)$,

∵点 B 在二次函数 $y = x^2 + mx + 8$ 的图像上，

∴ $8 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}m + 8$，

解得：$m = -2\sqrt{3}$，

∴ $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 8$，

综上所述，二次函数的表达式为 $y = x^2 - 4\sqrt{3}x + 8$ 或 $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 8$.

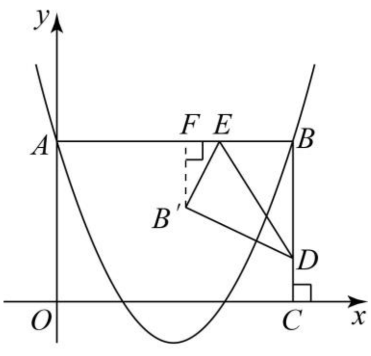


图1

【小问 2 详解】

如图 2，当点 B' 在 x 轴上方时，

过点 B' 作 $FG \perp AB$，分别交 AB、x 轴于点 F、G，作 $DH \perp FG$，垂足为 H，

∴四边形 $HGCD$ 和四边形 $BFHD$ 是矩形，

∴ $HG = CD = 2$，$FH = BD = 6$，$BF = DH$，

∵点 B' 到 x 轴的距离为3，

$\therefore B'G=3$，

$\therefore B'H=B'G-HG=3-2=1$，

$\therefore B'F=FH-B'H=6-1=5$，

$\because$ DBE 沿 DE 翻折得到 $DB'E$，

$\therefore DB'=DB=6$，$\angle DB'E=\angle DBE=90^{\circ}$，

在 Rt $B'EF$ 中，$\therefore DH=\sqrt{B'D^{2}-B'H^{2}}=\sqrt{6^{2}-1^{2}}=\sqrt{35}$，

在 Rt$\triangle EFB'$ 和 Rt$\triangle B'HD$ 中，

$\angle FB'E+\angle HB'D=90^{\circ}$，$\angle HDB'+\angle HB'D=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FB'E=\angle HDB'$，

又$\because \angle EFB'=\angle B'HD=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle EFB'\backsim\triangle B'HD$，

$\therefore \dfrac{EF}{B'H}=\dfrac{FB'}{HD}$，即 $\dfrac{EF}{1}=\dfrac{5}{\sqrt{35}}$，

$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{35}}{7}$，

$\therefore BE=BF-EF=\sqrt{35}-\dfrac{\sqrt{35}}{7}=\dfrac{6\sqrt{35}}{7}$，

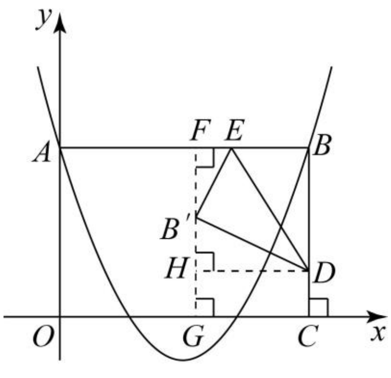


图2

如图 3，当点 B' 在 x 轴下方时，

过点 B' 作 $MN\parallel AB$，作 $EM\perp MN$，垂足为 M，延长 BC 交 MN 于点 N，

$\therefore$四边形 $BEMN$ 是矩形，

$\therefore EM=BN$，$BE=MN$，

$\because$点 B' 到 x 轴的距离为3，

$\therefore NC=3$，

$\therefore DN=CD+CN=2+3=5$，

$\therefore EM=BN=BD+DN=6+5=11$，

$\because$ DBE 沿 DE 翻折得到 $DB'E$，

$\therefore DB'=DB=6$，$\angle DB'E=\angle DBE=90^{\circ}$，

在 Rt$\triangle B'ND$ 中，$\therefore B'N=\sqrt{B'D^2-DN^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$，

在 Rt$\triangle EMB'$ 和 Rt$\triangle B'ND$ 中，

$\angle MB'E+\angle DB'N=90^\circ$，$\angle NDB'+\angle DB'N=90^\circ$，

$\therefore \angle MB'E=\angle NDB'$，

又$\because \angle EMB'=\angle B'ND=90^\circ$，

$\therefore \triangle EMB'\backsim\triangle B'ND$，

$\therefore \dfrac{MB'}{ND}=\dfrac{EM}{B'N}$，即 $MB'=5\sqrt{11}$，

$\therefore BE=MN=MB'+B'N=5\sqrt{11}+\sqrt{11}=6\sqrt{11}$，

$\because$点 E 在 AB 上有且只有一个位置，

$\therefore \dfrac{6\sqrt{35}}{7}\le AB<6\sqrt{11}$，

$\because AB$ 平行于 x 轴，且 $A(0，8)$，

$\therefore$当 $y=8$ 时，$x^2+mx+8=8$，

解得：$x_1=0$，$x_2=-m$，

$\therefore A(-m，8)$，

$\therefore AB=-m-0=-m$，

$\therefore \dfrac{6\sqrt{35}}{7}\le -m<6\sqrt{11}$，

$\therefore -6\sqrt{11}<m\le -\dfrac{6\sqrt{35}}{7}$.

$\therefore m$ 的取值范围是$-6\sqrt{11}<m\le -\dfrac{6\sqrt{35}}{7}$.

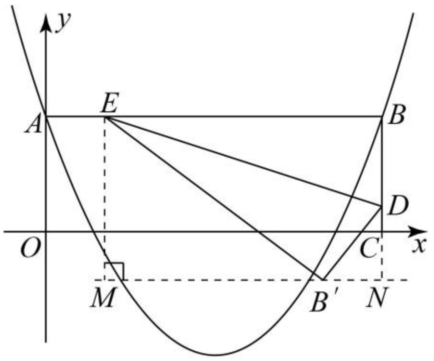


图3

【点睛】本题是二次函数与特殊四边形的综合题，考查了折叠的性质，图像上点的坐标特征及二次函数图像的性质，待定系数法确定函数解析式，矩形的判定和性质，锐角三角函数，相似三角形的判定和性质，勾股定理定理及直角三角形的性质等知识点．运用了分类讨论和数形结合的思想．通过作辅助线构造相似三角形的是解题的关键．

28. 数学实验室：有一个直角三角形纸板，$\angle C=90^\circ$，$AC=40\text{cm}$，$BC=30\text{cm}$．小明计划以三角形的一条边

为直径所在的边，先剪出一个最大的半圆，用这个半圆围成一个圆锥的侧面，然后在剩下的纸板上再剪出一个完整的圆，用这个圆作为圆锥的底面圆．如图 1，小明首先以斜边为直径所在的边进行尝试，发现无法实现他的计划，他打算换成直角边来继续实验．

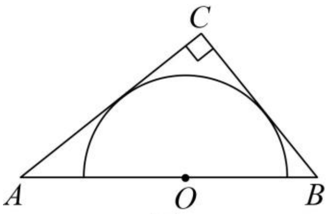


图1

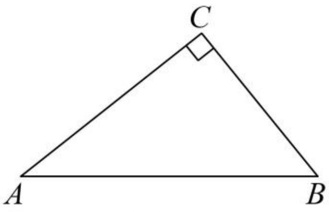


图2

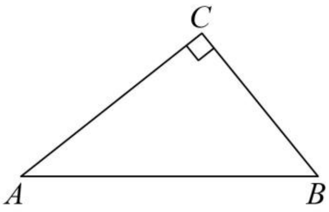


图3

（1） 请你在图 2 中，任选一条直角边为直径所在的边，帮小明画出一个最大的半圆（请使用无刻度的直尺和圆规完成作图）；

（2） 如果小明按照你选的直角边继续往下操作，他能否顺利得到这个圆锥的底面圆？如果能，请说明理由；如果不能，那么换另一条直角边能否实现？同样请说明理由．（友情提醒：请利用图 3 完成题（2）的解答）

【答案】（1）作图见解析

（2）选择 AC 直角边为直径所在的边不能实现，理由见解析；选择 BC 直角边为直径所在的边能实现，理由见解析

【解析】

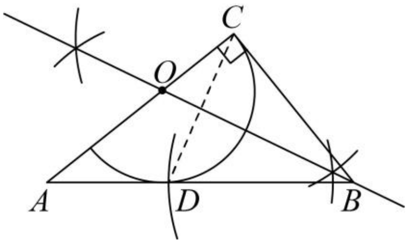
【分析】（1）如图，以点 B 为圆心，BC 长为半径画弧，交 AB 于点 D；连接CD，分别以C、D为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径画弧，连接两个交点，交 AC 于点O，点O即为圆心．

（2）分两种情况：选择 AC 直角边为直径所在的边，连接OD，利用 $ADO \backsim ACB$，求出 O 的半径长，继而求得底面圆的半径长，在剩下的纸板上再剪出一个最大的圆，利用相似三角形的相关性质，可以求出该圆的半径，若该半径大于底面圆的半径长，则可以实现，反之，则不能；按同样的方法说明选择 BC 直角边为直径所在的边的情况．

【小问 1 详解】

解：选择 AC 直角边为直径所在的边，

如图，以点 B 为圆心， BC 长为半径画弧，交 AB 于点 D；连接CD，分别以C、D为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径画弧，连接两个交点，交 AC 于点O，点O即为圆心．



【小问 2 详解】

如图，连接OD，设半圆的半径为r，

$\because \angle C = 90°$， $AC = 40$， $BC = 30$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$，

由作图可知，$\odot O$与BC、AB相切于点C、D，

$\therefore \angle ODB=\angle ODA=90^\circ$，$BD=BC=30$，

$\therefore AD=AB-BD=50-30=20$，

$\because \angle ODA=\angle BCA=90^\circ$，$\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADO\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \dfrac{OD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$，

$\therefore \dfrac{OD}{30}=\dfrac{20}{40}$，

$\therefore OD=15$，

$\therefore r=15$，

$\therefore$这个半圆的弧长为：$\dfrac{180\pi r}{180}=\pi r=15\pi$，

$\because$圆锥底面圆的周长等于侧面展开图的扇形的弧长，

$\therefore$圆锥底面圆的周长为15π，

$\therefore$底面圆的半径为$\dfrac{15}{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OBC$中，$OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=\sqrt{15^2+30^2}=15\sqrt{5}$，

记半圆与OB交于点E，剩下部分切出底面圆$\odot O'$，分别与AB、BC相切于点F、G，设$\odot O'$的半径为r'，

$\therefore O'E=O'F=O'G=r'$，$O'G\perp BC$，

$\therefore \angle O'GB=\angle OCB=90^\circ$，

$\because \angle O'BG=\angle OBC$，

$\therefore \triangle BGO'\backsim\triangle BCO$，

$\therefore \dfrac{O'G}{OC}=\dfrac{BO'}{BO}$，

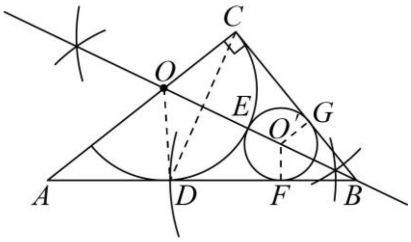
$\therefore \dfrac{r'}{15}=\dfrac{BO'}{15\sqrt{5}}$，

$\therefore BO'=\sqrt{5}r'$，

$\therefore BO=BO'+O'E+OE=\sqrt{5}r'+r'+15=15\sqrt{5}$，

$\therefore r'=\dfrac{15\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}<\dfrac{15}{2}$，

$\therefore$不能实现；



选择 BC 直角边为直径所在的边，设半圆的半径为 r，

∴如图， O 与 AB 、AC 相切于点 D 、C，

$\therefore \angle ODB=\angle ODA=90^{\circ}$， $AD=AC=40$，

$\because AB=50$，

$\therefore BD=AB-AD=50-40=10$，

$\because \angle ODB=\angle ACB=90^{\circ}$， $\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle BDO \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \dfrac{OD}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$，

$\therefore \dfrac{OD}{40}=\dfrac{10}{30}$，

$\therefore OD=\dfrac{40}{3}$，

$\therefore r=\dfrac{40}{3}$，

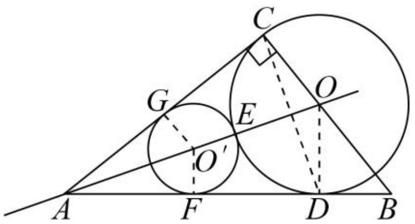
∴这个半圆的弧长为：$\dfrac{180\pi r}{180}=\pi r=\dfrac{40}{3}\pi$，

∵圆锥底面圆的周长等于侧面展开图的扇形的弧长，

∴圆锥底面圆的周长为 $\dfrac{40}{3}\pi$，

∴底面圆的半径为 $\dfrac{20}{3}$，

在Rt ACO 中，$AO=\sqrt{OC^{2}+AC^{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{40}{3}\right)^{2}+40^{2}}=\dfrac{40\sqrt{10}}{3}$，



记半圆与OB交于点 E，剩下部分切出底面圆 O'，分别与 AB 、BC 相切于点 F 、G，设 O' 的半径为 r'，

$\therefore O'E=O'F=O'G=r'$， $O'G\perp AC$，

$\therefore \angle O'GA=\angle OCA=90^{\circ}$，

$\because \angle O'AG = \angle OAC$

$\therefore \triangle AGO' \backsim \triangle ACO$，

$\therefore \dfrac{O'G}{OC} = \dfrac{AO'}{AO}$，

$\therefore \dfrac{r'}{\frac{40}{3}} = \dfrac{AO'}{\frac{40\sqrt{10}}{3}}$，

$\therefore AO' = \sqrt{10}r'$，

$\therefore AO = AO' + O'E + OE = \sqrt{10}r' + r' + \dfrac{40}{3} = \dfrac{40\sqrt{10}}{3}$，

$\therefore r' = \dfrac{40\left(11 - 2\sqrt{10}\right)}{27} > \dfrac{20}{3}$，

∴可以实现．

【点睛】本题考查作图—应用与设计作图，考查了尺规作图，切线的性质，切线长定理，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识点，运用了分类讨论的思想．掌握切线的性质、相似三角形的判定和性质是解题的关键．