# 2023-2024 学年江苏省南京第二十七高级中学高二（上）期初数学试卷

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.（5 分）已知 $i$ 为虚数单位，若复数 $z=\frac{1-3i}{1-i}$，则 $z$ 的虚部为（　　）

A．$-i$　　B．$-1$　　C．0　　D．1

2.（5 分）若直线 $x+ay-2=0$ 与直线 $ax+y-a-1=0$ 平行，则 $a$ 的值为（　　）

A．1　　B．1 或 $-1$　　C．$-1$　　D．0

3.（5 分）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 $P$ 为线段 $D_1C_1$ 的中点，且 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=1$，$AA_1=2$，则直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角为（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

4.（5 分）开普勒第一定律也称椭圆定律、轨道定律，其内容如下：每一行星沿各自的椭圆轨道环绕太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点上．将某行星 $H$ 看作一个质点，$H$ 绕太阳的运动轨迹近似成曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>n>0)$，行星 $P$ 在运动过程中距离太阳最近的距离称为近日点距离，距离太阳最远的距离称为远日点距离．若行星 $C$ 的近日点距离和远日点距离之和是 20（距离单位：亿千米），近日点距离和远日点距离之积是 81，则 $m+n=$（　　）

A．181　　B．97　　C．52　　D．19

5.（5 分）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ 且 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

6.（5 分）已知圆台的上下底面半径分别为 2 和 5，且母线与下底面所成为角的正切值为 $\frac{4}{3}$，则该圆台的表面积为（　　）

A．59π　　B．61π　　C．63π　　D．64π

7.（5 分）已知角 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，且 $\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})=-\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{6})=$（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$ 或 $-1$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{4}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

8.（5 分）已知 $A$，$B$ 是圆 $C$：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 上的两个动点，且 $|AB|=2\sqrt{5}$，若 $P(0,-3)$，则点 $P$ 到直线 $AB$ 距离的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．7

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．直线$\sqrt{3}x+y+1=0$的倾斜角为 120°

B．经过点 $P$（2，1），且在 $x$，$y$ 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$

C．直线 $l$：$mx+y+2-m=0$ 恒过定点（1，－2）

D．已知直线 $l$ 过点（2，1），且与 $x$，$y$ 轴正半轴交于点 $A$、$B$ 两点，则△$AOB$ 面积的最小值为 4

（多选）10．（5 分）已知圆 $M$：$x^2+y^2-2x-3=0$，圆 $N$：$x^2+y^2-8x-8y+23=0$，则下列选项正确的是（　　）

A．直线 $MN$ 的方程为 $4x-3y-4=0$

B．若 $P$、$Q$ 两点分别是圆 $M$ 和圆 $N$ 上的动点，则$|PQ|$的最大值为 5

C．圆 $M$ 和圆 $N$ 的一条公切线长为$2\sqrt{5}$

D．经过点 $M$、$N$ 两点的所有圆中面积最小的圆的面积为$\frac{25}{4}\pi$

（多选）11．（5 分）在△$ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$，则下列说法中正确的是（　　）

A．若 $\sin A>\sin B$，则 $A>B$

B．若 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，则△$ABC$ 是锐角三角形

C．若 $a=10$，$b=8$，$A=60°$，则符合条件的△$ABC$ 有两个

D．对任意△$ABC$，都有 $\cos A+\cos B>0$

（多选）12．（5 分）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$，$N$ 分别是 $BC$，$CC_1$ 的中点，则（　　）

A．$AM$ 与 $D_1N$ 为异面直线

B．$AN\perp BD$

C．点 $B_1$ 到平面 $DMN$ 的距离为 2

D．若点 $Q$ 为线段 $A_1C$ 上的一动点，则$\angle AQD_1$ 的范围 $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$

**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请把答案填写在答题卡相应位置上.**

13．（5 分）椭圆$\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $m$ 的值为 ______________________.

14．（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，且$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$|\vec{b}|=4$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量的坐标为 ______________________.

15．（5 分）在我国古代数学名著《九章算术》中，将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的棱柱称为“堑堵”．已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一“堑堵”，其中 $AB\perp AC$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且该“堑堵”外接球

的表面积为64π，则该“堑堵”的高为 __________________.

16．（5 分）若直线 $l$：$y=kx-1$ 与曲线 $C$：$\sqrt{1-(y-2)^2}=x-1$有两个交点，则实数 $k$ 的取值范围是 ______________________.

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.**

17．（10 分）在△$ABC$ 中，$A$（3，4），$B$（﹣1，3），$C$（5，0）.

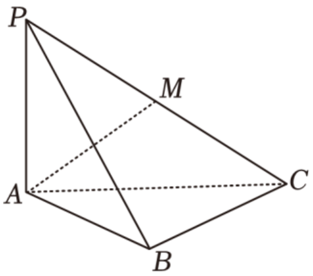
（1）求 $BC$ 边的高线的方程；

（2）过点 $A$ 的直线 $l$ 与直线 $BC$ 的交点为 $D$，若 $B$、$C$ 到 $l$ 的距离之比为 1：2，求 $D$ 的坐标.

18．（12 分）如图，在三棱锥 $P﹣ABC$ 中，$PA$⊥底面 $ABC$，∠$ABC$＝90°．

（1）求证：平面 $PAB$⊥平面 $PBC$；

（2）若 $M$ 是 $PC$ 的中点，二面角 $P﹣BC﹣A$ 的大小为 45°且$|AC|=\sqrt{2}|AB|$，求直线 $AM$ 与平面 $PBC$ 所成角的正切值.




19．（12 分）在①$\sqrt{3}(a-c\cos B)=b\sin C$；②$b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$；③（$2b﹣a$）$\cos C$＝$c\cos A$ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

在△$ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，其中$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$且满足___.

（1）求角 $C$ 的大小；

（2）若△$ABC$ 的面积为$3\sqrt{3}$，求△$ABC$ 的周长.

20．（12 分）已知圆 $C$ 经过 $A$（2，0）、$B$（0，4）两点，且圆心在直线 $2x﹣y﹣3$＝0 上.

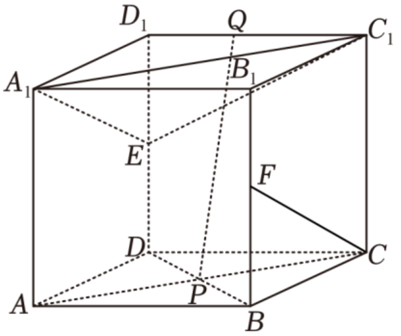
（1）求圆 $C$ 的标准方程；

（2）过点 $T$（﹣1，0）的直线 $l$ 与圆 $C$ 相交于 $P$、$Q$ 两点，且$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-5$，求直线 $l$ 的方程.

21．（12 分）如图，在正方体 $ABCD﹣A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$、$F$ 分别为棱 $DD_1$、$BB_1$ 的中点，点 $P$ 为底面对角线 $AC$ 与 $BD$ 的交点，点 $Q$ 是棱 $D_1C_1$ 上一动点.

（1）证明：直线 $CF$∥平面 $A_1EC_1$；

（2）证明：$CF$⊥$PQ$.




22．（12 分）已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，过 $F_2$ 的直线 $l$ 交椭圆 $E$ 于 $P$，$Q$ 两点（点 $P$ 位于第三象限），点 $P$ 关于原点 $O$ 的对称点为 $R$．当 $PF_2\perp RF_2$ 时，$\triangle PF_2R$ 的面积为 1，且$|PF_2|+|RF_2|=4$．

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）若$\triangle POQ$ 的面积为$\frac{\sqrt{15}}{4}$，求直线 $l$ 的方程．

# 2023-2024 学年江苏省南京第二十七高级中学高二（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

## 一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）已知 $i$ 为虚数单位，若复数 $z=\frac{1-3i}{1-i}$，则 $z$ 的虚部为（　　）

A．－$i$　　B．－1　　C．0　　D．1

【答案】$B$

【分析】根据已知条件，结合复数的四则运算，以及虚部的定义，即可求解.

【解答】解：$z=\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=2-i$，

则 $z$ 的虚部为－1.

故选：$B$.

2．（5 分）若直线 $x+ay-2=0$ 与直线 $ax+y-a-1=0$ 平行，则 $a$ 的值为（　　）

A．1　　B．1 或－1　　C．－1　　D．0

【答案】$C$

【分析】直接利用平行直线的充要条件求出结果.

【解答】解：由于直线 $x+ay-2=0$ 与直线 $ax+y-a-1=0$ 平行，

故 $a^2=1$，解得 $a=\pm1$，

当 $a=1$ 时，两直线重合，故舍去；

故 $a=-1$.

故选：$C$.

3．（5 分）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 $P$ 为线段 $D_1C_1$ 的中点，且 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=1$，$AA_1=2$，则直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角为（　　）

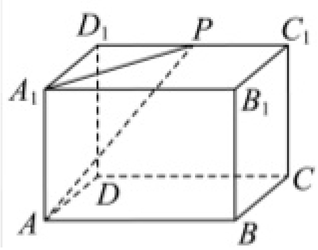
A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

【答案】$B$

【分析】根据题意分析可知直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角即为 $\angle PAA_1$（或其补角），进而在 $Rt\triangle PAA_1$ 中，运算求解即可.

【解答】解：因为 $BB_1 // AA_1$，则直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角即为直线 $AA_1$ 与 $AP$ 所成的角，

如图，连接 $A_1P$，可知直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角即为 $\angle PAA_1$（或其补角），




则 $A_1P=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，因为 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1P\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

则 $AA_1\perp A_1P$，在 Rt△$PAA_1$，可知$\tan\angle PAA_1=\dfrac{A_1P}{AA_1}=1$，且$\angle PAA_1$为锐角，

则$\angle PAA_1=45°$，所以直线 $BB_1$ 与 $AP$ 所成的角为 $45°$．

故选：$B$．

4.（5 分）开普勒第一定律也称椭圆定律、轨道定律，其内容如下：每一行星沿各自的椭圆轨道环绕太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点上．将某行星 $H$ 看作一个质点，$H$ 绕太阳的运动轨迹近似成曲线$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>n>0)$，行星 $P$ 在运动过程中距离太阳最近的距离称为近日点距离，距离太阳最远的距离称为远日点距离．若行星 $C$ 的近日点距离和远日点距离之和是 20（距离单位：亿千米），近日点距离和远日点距离之积是 81，则 $m+n$=（　　）

A．181　　B．97　　C．52　　D．19

【答案】$A$

【分析】结合椭圆的性质可得$\begin{cases}\sqrt{m}-\sqrt{m-n}+\sqrt{m}+\sqrt{m-n}=20\\(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})=81\end{cases}$，然后求解即可．

【解答】解：设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a>b>0$，

由椭圆的性质可得：椭圆上的点到焦点的距离为$[a-c，a+c]$，

又椭圆方程为$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>n>0)$，

则 $a=\sqrt{m}$，$b=\sqrt{n}$，$c=\sqrt{m-n}$，

由题意可得$\begin{cases}\sqrt{m}-\sqrt{m-n}+\sqrt{m}+\sqrt{m-n}=20\\(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})=81\end{cases}$，

即$\begin{cases}m=100\\n=81\end{cases}$，

则 $m+n=181$.

故选：$A$.

5.（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$且$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】$A$

【分析】直接利用向量的模和数量积运算求出结果.

【解答】解：由于$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{10}$，整理得$\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=10$，

由于$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

所以$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{4}$.

故选：$A$.

6.（5 分）已知圆台的上下底面半径分别为 2 和 5，且母线与下底面所成为角的正切值为$\frac{4}{3}$，则该圆台的表面积为（　　）

A．$59\pi$　　B．$61\pi$　　C．$63\pi$　　D．$64\pi$

【答案】$D$

【分析】根据题意，结合圆台的轴截面进行分析，求出圆台的母线，进而计算可得答案.

【解答】解：根据题意，如图圆台中，$AD=4$，$BC=10$，

则 $BE=\frac{1}{2}(BC-AD)=3$，

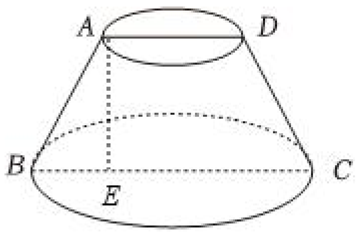
又由母线与下底面所成为角的正切值为$\frac{4}{3}$，即 $\tan\angle ABE=\frac{4}{3}$，

则 $AE=4$，

故 $AB=\sqrt{9+16}=5$，

该圆台的表面积 $S=4\pi+25\pi+\pi(2+5)\times5=64\pi$.

故选：$D$.




7.（5 分）已知角 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2})$，且 $\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})=-\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{6})=$（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$或 - 1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{4}{3}$或$\frac{1}{2}$

【答案】*C*

【分析】利用二倍角公式可得 $\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，再利用诱导公式，同角关系式即可求值．

【解答】解：$\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})=2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{3})-1=-\frac{3}{5}$，$\therefore \cos^2(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{5}$，

$\because \theta\in(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2})$，$\therefore \theta+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6})$，$\therefore\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\because (\theta+\frac{\pi}{3})+(\frac{\pi}{6}-\theta)=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\because \theta\in(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2})$，$\therefore\frac{\pi}{6}-\theta\in(-\frac{\pi}{3},\ 0)$，$\therefore\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \tan(\theta-\frac{\pi}{6})=-\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)=-\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)}=\frac{1}{2}$．

故选：*C*．

8.（5 分）已知 *A*，*B* 是圆 *C*：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 上的两个动点，且 $|AB|=2\sqrt{5}$，若 *P*（0，- 3），则点 *P* 到直线 *AB* 距离的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．7

【答案】*D*

【分析】判断 *P* 与圆的位置关系，求解$|CP|$，圆心 *C* 到 *AB* 的距离，然后求解点 *P* 到直线 *AB* 距离的最大值．

【解答】解：圆 *C*：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$，圆的圆心 *C*（3，1），半径为 3，*P*（0，- 3），

$|CP|=\sqrt{3^2+(1+3)^2}=5$，所以 *P* 在圆外，*A*，*B* 是圆 *C*：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 上的两个动点，且 $|AB|=2\sqrt{5}$，圆心 *C* 到 *AB* 的距离：$\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$，

所以，点 *P* 到直线 *AB* 距离的最大值为：5+2=7．

故选：*D*．

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．直线$\sqrt{3}x+y+1=0$的倾斜角为 120°

B．经过点 $P$（2，1），且在 $x$，$y$ 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$

C．直线 $l$：$mx+y+2-m=0$ 恒过定点（1，－2）

D．已知直线 $l$ 过点（2，1），且与 $x$，$y$ 轴正半轴交于点 $A$、$B$ 两点，则△$AOB$ 面积的最小值为 4

【答案】$ACD$

【分析】直接利用直线的倾斜角和斜率，恒过定点的直线系，截距式直线方程，基本不等式判断 $A$、$B$、$C$、$D$ 的结论．

【解答】解：对于 $A$：直线$\sqrt{3}x+y+1=0$的斜率 $k=\tan\theta=-\sqrt{3}$，由于 $\theta\in[0,\pi)$，故直线的的倾斜角为 120°，故 $A$ 正确；

对于 $B$：经过点 $P$（2，1），且在 $x$，$y$ 轴上截距互为相反数的直线方程为 $x-y-1=0$ 和 $y=\frac{1}{2}x$，故 $B$ 错误；

对于 $C$：直线 $l$：$mx+y+2-m=0$，整理得 $m(x-1)+y+2=0$，故该直线恒过定点（1，－2），故 $C$ 正确；

对于 $D$：已知直线 $l$ 过点（2，1），且与 $x$，$y$ 轴正半轴交于点 $A$、$B$ 两点，设直线的方程为 $y-1=k(x-2)$，（$k<0$），故 $A$（$\frac{2k-1}{k}$，0），$B$（0，$1-2k$），

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\times(-4k-\frac{1}{k}+4)\geqslant\frac{1}{2}\times[2\sqrt{4}+4]=4$，故 $D$ 正确．

故选：$ACD$．

（多选）10．（5 分）已知圆 $M$：$x^2+y^2-2x-3=0$，圆 $N$：$x^2+y^2-8x-8y+23=0$，则下列选项正确的是（　　）

A．直线 $MN$ 的方程为 $4x-3y-4=0$

B．若 $P$、$Q$ 两点分别是圆 $M$ 和圆 $N$ 上的动点，则$|PQ|$的最大值为 5

C．圆 $M$ 和圆 $N$ 的一条公切线长为$2\sqrt{5}$

D．经过点 $M$、$N$ 两点的所有圆中面积最小的圆的面积为$\frac{25}{4}\pi$

【答案】$AD$

【分析】根据题意求圆 $M$、$N$ 的圆心与半径，对于 $A$：根据两点式方程运算求解；对于 $B$：根据圆的性质分析求解；对于 $C$：根据切线的性质运算求解；对于 $D$：当 $MN|$为圆的直径时，经过点 $M$、$N$ 两点的所有圆中面积最小，运算求解即可．

【解答】解：由题意可知：圆 $M$：$(x-1)^2+y^2=4$ 的圆心 $M(1,0)$，半径 $r_1=2$，

圆 $N$：$(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 的圆心 $M(4,4)$，半径 $r_2=3$，

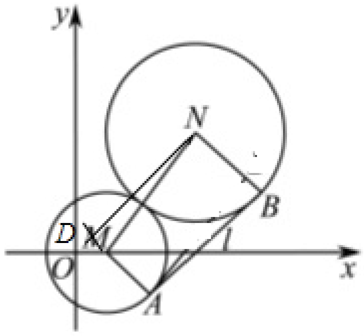
对于选项 $A$：直线 $MN$ 的方程为$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{4-1}$，即 $4x-3y-4=0$，故 $A$ 正确；

对于选项 $B$：因为 $|MN|=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}=5$.

所以$|PQ|$的最大值为$|MN|+r_1+r_2=10$，故 $B$ 错误；

对于选项 $C$：因为$|MN|=r_1+r_2$，可知圆 $M$ 与圆 $N$ 外切，

如图，直线 $l$ 为两圆的公切线，$A$，$B$ 为切点坐标，过 $N$ 作 $ND\perp AM$，垂足为 $D$，




则 $ADNM$ 为矩形，可得$||MN|=5$，$|DA|=r_2-r_1=1$，

所以公切线长为$|AB|=\sqrt{\}AN|^2-|AD|^2}=2\sqrt{6}$，故 $C$ 错误；

对于选项 $D$：当 $MN|$为圆的直径时，经过点 $M$、$N$ 两点的所有圆中面积最小，

此时圆的面积为 $\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\pi$，故 $D$ 正确.

故选：$AD$.

（多选）11．（5 分）在△$ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$，则下列说法中正确的是（　　）

A．若 $\sin A>\sin B$，则 $A>B$

B．若 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，则△$ABC$ 是锐角三角形

C．若 $a=10$，$b=8$，$A=60°$，则符合条件的△$ABC$ 有两个

D．对任意△$ABC$，都有 $\cos A+\cos B>0$

【答案】$ABD$

【分析】对于 $A$，由正弦定理及三角形中大角对大边即可判断；

对于 $B$，通过内角和为 π 化简角 $C$，再利用两角和的正切公式化简即可得到 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C>0$，即可判断；

对于 $C$，由题意利用正弦定理得 $\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，结合大边对大角可求 $B$ 为锐角，即可判断得解；

对于 $D$，分类讨论，利用余弦函数的性质即可判断.

**【解答】**解：对于 $A$，∵$\sin A>\sin B$，

∴由正弦定理知 $a>b$，

又∵在三角形中大角对大边，

∴$A>B$，故 $A$ 正确；

对于 $B$，由 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，

化为 $\tan A+\tan B=\tan C(\tan A\tan B-1)$，

∴$\tan A+\tan B+\tan C=\tan C(\tan A\tan B-1)+\tan C=\tan A\tan B\tan C>0$，

又∵最多只有一个角为钝角，

∴$\tan A>0$，$\tan B>0$，$\tan C>0$，即三个角都为锐角，

∴$\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $B$ 正确；

对于 $C$，∵$a=10$，$b=8$，$A=60°$，

∴由正弦定理得：$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，

又 $a>b$，

∴$B$ 为锐角，

∴$B$ 的度数只有一解，则符合条件的$\triangle ABC$ 有一个，故 $C$ 错误；

对于 $D$：$A$，$B$ 都是锐角或一锐角一直角时显然成立，

当一钝角和一锐角时，设 $A$ 为钝角，$B$ 为锐角，

则 $0<B<\pi-A<\frac{\pi}{2}$，

由 $y=\cos x$ 在（0，π）上单调递减，

故 $\cos B>\cos(\pi-A)=-\cos A$，

即 $\cos A+\cos B>0$，

综上可知，在$\triangle ABC$ 中，恒有 $\cos A+\cos B>0$，故 $D$ 正确．

故选：$ABD$．

（多选）12．（5 分）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$，$N$ 分别是 $BC$，$CC_1$ 的中点，则（　　）

A．$AM$ 与 $D_1N$ 为异面直线

B．$AN\perp BD$

C．点 $B_1$ 到平面 $DMN$ 的距离为 2

D．若点 $Q$ 为线段 $A_1C$ 上的一动点，则∠$AQD_1$ 的范围 $[\frac{\pi}{3}，\frac{2\pi}{3}]$

【答案】$BC$

【分析】连接 $AM$，$D_1N$，$DC$，并延长，由三角形的中位线定理可得它们交于一点，设为 $E$，由此判断 $A$；以 $D$ 为坐标原点，以 $DA$ 所在直线为 $x$ 轴，$DC$ 所在直线为 $y$ 轴，$DD_1$ 所在直线为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，利用向量法判断 $BCD$．

【解答】解：在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$，$N$ 分别是 $BC$，$CC_1$ 的中点，

连接 $AM$，$D_1N$，$DC$，并延长，由三角形的中位线定理可得它们交于一点，设为 $E$，

故 $AM$，$D_1N$ 为相交直线，故 $A$ 错误；

以 $D$ 为坐标原点，以 $DA$ 所在直线为 $x$ 轴，$DC$ 所在直线为 $y$ 轴，$DD_1$ 所在直线为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $A$（2，0，0），$B$（2，2，0），$D$（0，0，0），$N$（0，2，1），$M$（1，2，0），

$B_1$（2，2，2），$A_1$（2，0，2），$C$（0，2，0），$D_1$（0，0，2），

则 $\overrightarrow{AN}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，

∵ $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD}=4-4+0=0$，

∴ $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{BD}$，故 $B$ 正确；

$\overrightarrow{DM}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{DN}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$，

设平面 $DMN$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DN}=2y+z=0\end{cases}$，取 $x=2$，得 $\vec{n}=(2,-1,2)$，

则 $B_1$ 到平面 $DMN$ 的距离为 $d=|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\vec{n}|}|=|\frac{4-2+4}{3}|=2$，故 $C$ 正确；

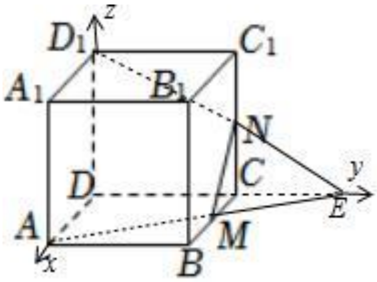
设 $\overrightarrow{A_1Q}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$Q$（$m$，$n$，$t$），则（$m-2$，$n$，$t-2$）$=\lambda(-2,2,-2)$，

解得 $Q(-2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，则 $\overrightarrow{QA}=(2+2\lambda,-2\lambda,2\lambda-2)$，$\overrightarrow{QD_1}=(2\lambda,-2\lambda,2\lambda)$，

则 $\cos<\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QD_1}>=\frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QD_1}}{|\overrightarrow{QA}|\cdot|\overrightarrow{QD_1}|}=\frac{4\lambda+4\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2-4\lambda}{\sqrt{12\lambda^2+8}\cdot\sqrt{12\lambda^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{3\lambda^2}}}\leqslant\frac{\sqrt{15}}{5}$，

∵ $\cos<\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QD_1}>\geqslant0$，∴∠$AQD_1$ 不为钝角，故 $D$ 错误．

故选：$BC$．




**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请把答案填写在答题卡相应位置上.**

13．（5 分）椭圆$\frac{x^2}{m}+y^2=1$的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $m$ 的值为 __4 或$\frac{1}{4}$__．

【答案】4 或$\frac{1}{4}$.

【分析】由椭圆的性质，结合椭圆离心率的求法求解即可．

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{m}+y^2=1$的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当椭圆的焦点在 $x$ 轴上时，有$\begin{cases} m>1 \\ \frac{m-1}{m}=\frac{3}{4} \end{cases}$，

即 $m=4$；

当椭圆的焦点在 $y$ 轴上时，有$\begin{cases} 0<m<1 \\ \frac{1-m}{1}=\frac{3}{4} \end{cases}$，

即 $m=\frac{1}{4}$，

则 $m$ 的值为 4 或$\frac{1}{4}$.

故答案为：4 或$\frac{1}{4}$.

14．（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，且$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$|\vec{b}|=4$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量的坐标为 \_\_（－1，－$\sqrt{3}$）__．

【答案】（－1，－$\sqrt{3}$）.

【分析】根据已知条件及投影向量的定义直接计算即可．

【解答】解：由$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，可得$|\vec{a}|=\sqrt{1+3}=2$，

由投影向量定义可知：

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$|\vec{b}|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=4\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{(1,\sqrt{3})}{2}=(-1,-\sqrt{3})$.

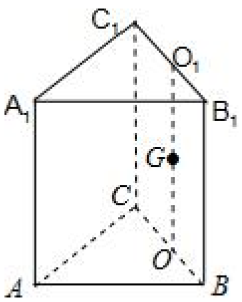
故答案为：（﹣1，﹣$\sqrt{3}$）.

15.（5 分）在我国古代数学名著《九章算术》中，将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的棱柱称为“堑堵”．已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一“堑堵”，其中 $AB\perp AC$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且该“堑堵”外接球的表面积为 64π，则该“堑堵”的高为 __$4\sqrt{3}$__．

【答案】$4\sqrt{3}$．

【分析】由题意画出图形，找出三棱柱外接球的球心，结合外接球的表面积求解半径，再由三棱柱外接球的半径与棱长的关系列式求解．

【解答】解：如图，




由题意可知，三棱柱是底面为直角三角形的直三棱柱，

则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心 $G$ 在三棱柱上下底面外心连线的中点上，

设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $h$，外接球的半径为 $R$，

可得$\begin{cases}4\pi R^2=64\pi\\4R^2=2^2+(2\sqrt{3})^2+h^2\end{cases}$，解得 $h=4\sqrt{3}$．

故答案为：$4\sqrt{3}$．

16.（5 分）若直线 $l$：$y=kx-1$ 与曲线 $C$：$\sqrt{1-(y-2)^2}=x-1$有两个交点，则实数 $k$ 的取值范围是 __$(\frac{4}{3},2]$__．

【答案】见试题解答内容

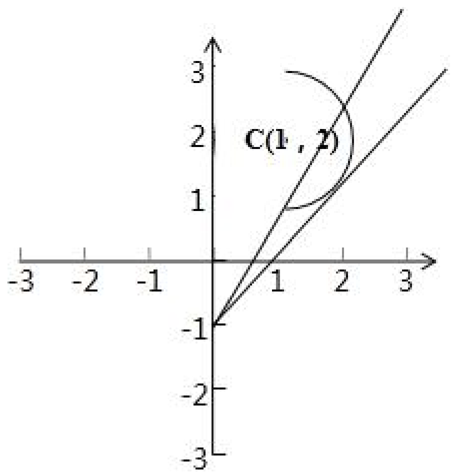
【分析】根据直线所过的定点，结合直线与圆的切线性质，利用数形结合思想进行求解即可．

【解答】解：直线 $l$：$y=kx-1$ 恒过定点（0，﹣1），

由曲线 $C$：$\sqrt{1-(y-2)^2}=x-1\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=1$，$(x\geqslant1)$．

所以曲线 $C$ 表示以点（1，2）为圆心，半径为 1，

且位于直线 $x=1$ 右侧的半圆（包括点（1，2），（1，0）），如图所示：




当直线 $l$ 经过点（1，1）时，$l$ 与曲线 $C$ 有两个不同的交点，此时 $k=2$；

当 $l$ 与半圆相切时，由$\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，得 $k=\frac{4}{3}$，

分析可知当$\frac{4}{3}<k\leqslant 2$ 时，$l$ 与曲线 $C$ 有两个不同的交点．

故答案为：（$\frac{4}{3}$，2]．

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.**

17．（10 分）在△$ABC$ 中，$A$（3，4），$B$（﹣1，3），$C$（5，0）．

（1）求 $BC$ 边的高线的方程；

（2）过点 $A$ 的直线 $l$ 与直线 $BC$ 的交点为 $D$，若 $B$、$C$ 到 $l$ 的距离之比为 1：2，求 $D$ 的坐标．

【答案】（1）方程为 $2x﹣y﹣2=0$；

（2）$D$ 的坐标为 （﹣7，6）或（1，2）．

【分析】（1）由题意，先求出直线 $BC$ 的斜率，根据垂直关系可得高线所在的直线斜率，进而可得结果；

（2）先求出直线 $BC$ 的方程，分类讨论直线 $l$ 的斜率是否存在，利用点到直线的距离公式可得直线 $l$ 的方程，进而可求交点坐标．

【解答】解：（1）已知 $B$（﹣1，3），$C$（5，0），

所以直线 $BC$ 的斜率 $k_{BC}=\frac{3-0}{-1-5}=-\frac{1}{2}$，

则 $BC$ 边的高线所在的直线斜率为 $k=2$，

所以 $BC$ 边的高线所在的直线方程为 $y﹣4=2$（$x﹣3$），

即 $2x﹣y﹣2=0$；

（2）由（1）知直线 $BC$ 的方程为 $y-0=-\frac{1}{2}(x-5)$，

即 $x+2y-5=0$，

若直线 $l$ 的斜率不存在，

此时直线 $l$ 的方程为 $x=3$，

则点 $B$、$C$ 到 $l$ 的距离分别为 4，2，不符合题意；

若直线 $l$ 的斜率存在，

不妨设直线 $l$ 的方程为 $y-4=k(x-3)$，

即 $kx-y+4-3k=0$，

因为 $B$、$C$ 到 $l$ 的距离之比为 1：2，

所以 $\frac{2|-k-3+4-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5k+4-3k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

解得 $k=-\frac{1}{5}$ 或 $k=1$，

当 $k=-\frac{1}{5}$ 是，直线 $l$ 的方程 $x+5y-23=0$，

联立 $\begin{cases}x+5y-23=0\\x+2y-5=0\end{cases}$，

解得 $x=-7$，$y=6$，

即 $D(-7,6)$；

当 $k=1$ 时，直线 $l$ 的方程为 $x-y+1=0$，

联立 $\begin{cases}x-y+1=0\\x+2y-5=0\end{cases}$，

解得 $x=1$，$y=2$，

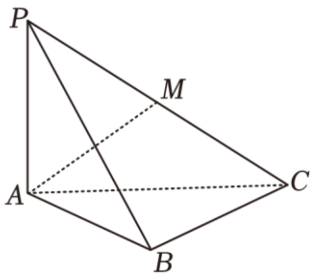
即 $D(1,2)$，

综上，点 $D$ 的坐标为 $(-7,6)$ 或 $(1,2)$.

18．（12 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABC$，$\angle ABC=90°$．

（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $PBC$；

（2）若 $M$ 是 $PC$ 的中点，二面角 $P-BC-A$ 的大小为 $45°$ 且 $|AC|=\sqrt{2}|AB|$，求直线 $AM$ 与平面 $PBC$ 所成角的正切值.




【答案】（1）证明见解答；

（2）$\sqrt{2}$.

【分析】（1）根据线线垂直得 $BC\perp$平面 $PAB$，由由面面垂直的判定定理可证得结论；

（2）由题意求出 $AB$，$BC$ 的长，过点 $A$ 作 $AN\perp PB$ 于 $N$，连接 $MN$，则$\angle AMN$ 为直线 $AM$ 与平面 $PBC$ 所成的角，然后在 Rt$\triangle ANM$ 中可求得结果.

【解答】解：（1）证明：因为 $PA\perp$底面 $ABC$，$BC\subset$平面 $ABC$，所以 $PA\perp BC$，

因为$\angle ABC=90^\circ$，所以 $AB\perp BC$，因为 $PA\cap AB=A$，$PA$，$AB\subset$平面 $PAB$，

所以 $BC\perp$平面 $PAB$，因为 $BC\subset$平面 $PBC$，所以平面 $PAB\perp$平面 $PBC$；

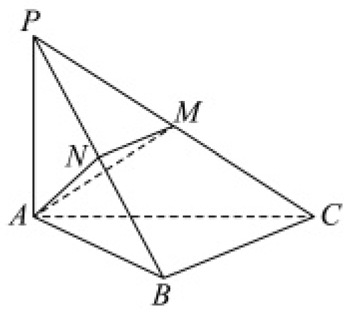
（2）由（1）可知 $BC\perp$平面 $PAB$，$PB\subset$平面 $PAB$，所以 $BC\perp PB$，因为 $AB\perp BC$，

所以$\angle ABP$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，所以$\angle ABP=45^\circ$，

令 $AB=2$，则 $PA=2$，$|AC|=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，

如图，过点 $A$ 作 $AN\perp PB$ 于 $N$，因为平面 $PBC\perp$平面 $PAB$，平面 $PBC\cap$平面 $PAB=PB$，

$AN\subset$平面 $PAB$，则 $AN\perp$平面 $PBC$，




$M$ 为 $PC$ 的中点，连接 $MN$，则$\angle AMN$ 为直线 $AM$ 与平面 $PBC$ 所成的角，

在 Rt$\triangle PAB$ 中，$AN=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$；

在 Rt$\triangle PAC$ 中，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$，

$M$ 是 $PC$ 的中点，则 $AM=\frac{1}{2}PC=\sqrt{3}$，

因为 $AN\perp$平面 $PBC$，$MN\subset$平面 $PBC$，所以 $AN\perp MN$. 在 Rt$\triangle ANM$ 中，$MN=1$，

$\tan\angle AMN=\dfrac{AN}{MN}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$，

则直线 $AM$ 与平面 $PBC$ 所成角的正切值为$\sqrt{2}$.

19.（12 分）在①$\sqrt{3}(a-c\cos B)=b\sin C$；②$b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$；③（$2b-a$）$\cos C=c\cos A$ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

在△$ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，其中$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$且满足____.

（1）求角 $C$ 的大小；

（2）若△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求△$ABC$ 的周长.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$；

（2）$8+2\sqrt{7}$.

【分析】（1）若选①，利用正弦定理，两角和的正弦公式以及同角三角函数基本关系式可求 $\tan C=\sqrt{3}$，结合 $C\in(0,\pi)$，可求 $C$ 的大小；

若选②，由正弦定理，两角差的正弦公式化简已知等式可得 $\sin(C-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，可求 $C-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，进而可求 $C$ 的大小；

若选③，由正弦定理，两角和的正弦公式化简已知等式可得 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，结合 $C\in(0,\pi)$，可求 $C$ 的大小.

（2）由题意利用同角三角函数基本关系式可求 $\sin B$，$\cos B$ 的值，利用两角和的正弦公式可求 $\sin A$ 的值，进而利用三角形的面积公式可求得 $ab=12$，$ac=12\sqrt{7}$，$bc=4\sqrt{7}$，联立方程可求 $a$，$b$，$c$ 的值，即可求解△$ABC$ 的周长.

【解答】解：（1）若选①，$\because\sqrt{3}(a-c\cos B)=b\sin C$，

$\therefore\sqrt{3}(\sin A-\sin C\cos B)=\sin B\sin C$，

$\therefore\sqrt{3}[\sin(B+C)-\sin C\cos B]=\sin B\sin C$，

$\therefore\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin B\sin C$，

$\therefore\tan C=\sqrt{3}$，

$\because C\in(0,\pi)$，

$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$；

若选②，$\because b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$，

$\therefore$由正弦定理可得 $\sin B+\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin C\sin B$，

∵$B\in(0,\pi)$，$\sin B\neq0$，

∴$1+\cos C=\sqrt{3}\sin C$，可得 $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

∵$C\in(0,\pi)$，$C-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，

∴$C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$；

若选③，∵$(2b-a)\cos C=c\cos A$，可得 $2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

∴由正弦定理可得 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

又∵$B\in(0,\pi)$，$\sin B\neq0$，

∴$\cos C=\frac{1}{2}$，

又∵$C\in(0,\pi)$，

∴$C=\frac{\pi}{3}$；

（2）∵$C=\frac{\pi}{3}$，$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}=\frac{\sin B}{\cos B}>0$，

∴$\sin^2B+\cos^2B=(\frac{\sqrt{3}\cos B}{5})^2+\cos^2B=1$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

∴$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{21}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{7}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

∴△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$，解得 $ab=12$，①

△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{21}}{28}ac$，解得 $ac=12\sqrt{7}$，②

△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{21}}{28}bc$，解得 $bc=4\sqrt{7}$，③

∴由①②③可得 $a=6$，$b=2$，$c=2\sqrt{7}$，

∴△$ABC$ 的周长 $a+b+c=8+2\sqrt{7}$．

20．（12 分）已知圆 $C$ 经过 $A(2,0)$、$B(0,4)$ 两点，且圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上．

（1）求圆 $C$ 的标准方程；

（2）过点 $T(-1,0)$ 的直线 $l$ 与圆 $C$ 相交于 $P$、$Q$ 两点，且 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-5$，求直线 $l$ 的方程．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）求出线段 $AB$ 的垂直平分线的方程，与直线 $2x-y-3=0$ 的方程，可得出圆心 $C$ 的坐标，求出圆 $C$ 的半径，即可得出圆 $C$ 的标准方程；

（2）说明直线 $l$ 的斜率存在，设直线 $l$ 的方程，通过向量的数量积，转化求解圆心到直线 $l$ 的距离，求出 $k$ 的值，即可求解直线 $l$ 的方程．

【解答】解：（1）圆 $C$ 经过 $A$（2，0）、$B$（0，4）两点，线段 $AB$ 的中点为（1，2），直线 $AB$ 的斜率为 ﹣2，

所以线段 $AB$ 的中垂线方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y+3=0$，

圆心 $C$ 为 $AB$ 的中垂线与直线 $x+2y-9=0$ 的交点，

联立$\begin{cases}x-2y+3=0\\2x-y-3=0\end{cases}$，解得 $x=y=3$，故圆心为 $C$（3，3），

圆 $C$ 的半径 $r=\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$，

所以圆 $C$ 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=10$；

（2）过点 $T$（﹣1，0）的直线 $l$ 与圆 $C$ 相交于 $P$、$Q$ 两点，且 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-5$，

可得 $\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cos\angle PCQ=-5$，可得 $\angle PCQ=120°$，所以 $C$ 到 $PQ$ 的距离为：$\frac{\sqrt{10}}{2}$，

可知直线 $l$ 的斜率存在，设为 $k$，直线 $l$：$y=k(x+1)$，即 $kx-y+k=0$，

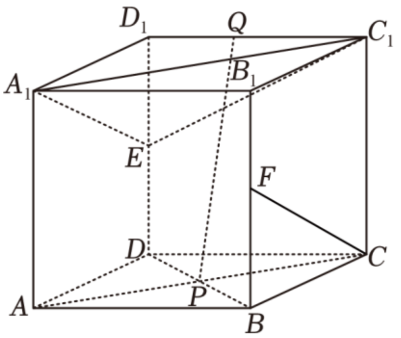
可得 $\frac{|3k-3+k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，解得 $k=\frac{1}{3}$ 或 $k=\frac{13}{9}$，

直线 $l$ 的方程：$x-3y+1=0$ 或 $13x-9y+13=0$．

21．（12 分）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$、$F$ 分别为棱 $DD_1$、$BB_1$ 的中点，点 $P$ 为底面对角线 $AC$ 与 $BD$ 的交点，点 $Q$ 是棱 $D_1C_1$ 上一动点．

（1）证明：直线 $CF$∥平面 $A_1EC_1$；

（2）证明：$CF\perp PQ$．




【答案】（1）证明过程见详解；

（2）证明过程见详解．

【分析】（1））取 $CC_1$ 中点 $M$，$BC$ 的中点 $N$，由题意可证得四边形 $A_1B_1ME$ 为平行四边形，可得 $A_1E$∥$B_1M$，再证得 $A_1E$∥$CF$，可证得线面平行；

（2）通过证明 $CF\perp$平面 $PD_1C_1$，再证得线线的垂直．

【解答】证明：（1）取 $CC_1$ 中点 $M$，$BC$ 的中点 $N$，连接 $B_1M$，$EM$，$PN$，

因为 $E$ 为 $DD_1$ 的中点，所以 $A_1B_1 /\!/ EM$，且 $A_1B_1 = EM$，可得四边形 $A_1B_1ME$ 为平行四边形，

所以 $A_1E /\!/ B_1M$，

在矩形 $BCC_1B_1$ 中，$F$，$M$ 为中点，$B_1F /\!/ CM$，且 $B_1F = CM$，

即四边形 $B_1FCM$ 为平行四边形，

所以 $B_1M /\!/ CF$，所以 $CF /\!/ A_1E$，

又因为 $A_1E \subset$ 平面 $A_1EC_1$，$CF \not\subset$ 平面 $A_1EC_1$，

所以 $CF /\!/$ 平面 $A_1EC_1$；

（2）$P$ 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，$N$ 为 $BC$ 的中点，所以 $PN$ 为△$BCD$ 的中位线，

所以 $PN /\!/ CD$，

而 $CD \perp$ 面 $BCB_1C_1$，$CF \subset$ 平面 $BCC_1B_1$，

所以 $CD \perp CF$，

所以 $PN \perp CF$，

且 $\tan\angle BCF = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$，$\tan\angle C_1NC = \frac{CC_1}{CN} = 2$，

所以 $\tan\angle BCF \bullet \tan\angle C_1NC = 1$，

即 $t\angle BCF + \angle C_1NC = \frac{\pi}{2}$，即 $C_1N \perp CF$，

又 $PN \cap C_1N = N$，所以 $CF \perp$ 平面 $PNC_1$，

又 $PC_1 \subset$ 平面 $PNC_1$，所以 $CF \perp PC_1$，

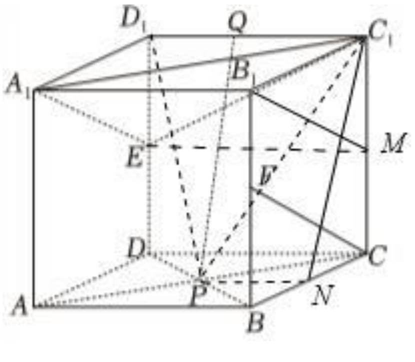
因为 $D_1C_1 /\!/ CD$，所以 $D_1C_1 \perp CF$，

因为 $D_1C_1 \cap C_1P = C_1$，

所以 $CF \perp$ 平面 $D_1PC_1$，

而 $Q \in \mathbf{C}_1D_1$，即 $PQ \subset$ 面 $D_1PC_1$，

所以 $CF \perp PQ$.



22．（12 分）已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，过 $F_2$ 的直线 $l$ 交椭圆 $E$ 于 $P$，$Q$ 两点（点 $P$ 位于第三象限），点 $P$ 关于原点 $O$ 的对称点为 $R$．当 $PF_2\perp RF_2$ 时，△$PF_2R$ 的面积为 1，且$|PF_2|+|RF_2|=4$．

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）若△$POQ$ 的面积为$\frac{\sqrt{15}}{4}$，求直线 $l$ 的方程．

【答案】（1）方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）直线 $l$ 的方程为 $x=2y+\sqrt{3}$或 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}y+\sqrt{3}$．

【分析】（1）由题意，连接 $PF_1$，$RF_1$，根据对称性得到$|PF_2|+|RF_2|=|RF_1|+|RF_2|=2a$，解得 $a=2$，结合三角形面积以及矩形的性质即可求出 $c$ 的值，进而可得椭圆 $E$ 的方程；

（2）先将直线 $l$ 的方程设出，将直线 $l$ 的方程与椭圆方程联立，结合韦达定理以及三角形面积公式进行求解即可．

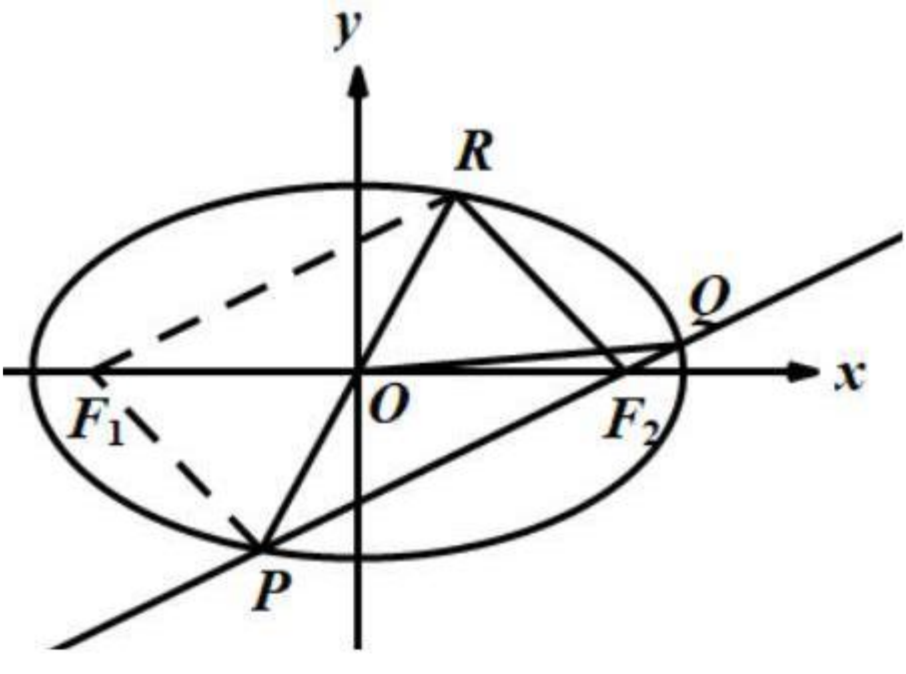
【解答】解：（1）连接 $PF_1$，$RF_1$，

因为点 $P$ 关于原点对称点为 $R$，

所以四边形 $PF_1RF_2$ 为平行四边形，

又 $PF_2\perp RF_2$，

所以四边形 $PF_1RF_2$ 为矩形，




此时$|PF_2|+|RF_2|=|RF_1|+|RF_2|=2a=4$，

解得 $a=2$，

因为$\triangle PF_2R$ 的面积为 1，

所以$S_{\triangle PF_2R}=\frac{1}{2}\times|PF_2|\times|RF_2|=1$，①

又$|PF_2|+|RF_2|=4$，②

联立①②，解得 $c=\sqrt{3}$，

此时 $b^2=a^2-c^2=1$，

则椭圆 $E$ 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）由（1）知 $F_2$（$\sqrt{3}$，0），

不妨设 $P$（$x_1$，$y_1$）（$x_1<0$，$y_1<0$），$Q$（$x_2$，$y_2$），直线 $l$ 的方程为 $x=ty+\sqrt{3}$，

联立$\begin{cases}x=ty+\sqrt{3}\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去 $x$ 并整理得（$t^2+4$）$y^2+2\sqrt{3}ty-1=0$，

此时$\Delta=16t^2+16>0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{4+t^2}$，$y_1y_2=-\frac{1}{t^2+4}$，

所以 $S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}|OF_2|\times|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{t^2+1}}{t^2+4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

令$\sqrt{t^2+1}=m$，

此时$\sqrt{5}m^2-8m+3\sqrt{5}=0$，

解得 $m=\sqrt{5}$或 $m=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

所以 $t=\pm2$ 或 $t=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

又点 $P$ 在第三象限，

此时直线 $l$ 的方程为 $x=2y+\sqrt{3}$或 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}y+\sqrt{3}$，

即 $x=2y+\sqrt{3}$或 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}y+\sqrt{3}$.