2023-2024 学年江苏省常州一中高二（上）期初数学试卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）已知集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|x^2+2x-3<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．（0，3）　　B．（0，1）　　C．（3，+∞）　　D．（1，+∞）

2．（5 分）已知复数 $z=-1+\sqrt{3}i$（i 为虚数单位），$\overline{z}$为 z 的共轭复数，若复数 $\omega=\frac{\overline{z}}{z}$，则 ω 的虚部为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3．（5 分）设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n\subset\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

B．若 $m\parallel\alpha$，$m\parallel n$，则 $n\parallel\alpha$

C．若 $m\parallel n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

D．若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp m$，则 $n\perp\beta$

4．（5 分）已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

5．（5 分）已知 $|\vec{a}|=6$，$\vec{e}$为单位向量，若向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则向量$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为（　　）

A．$2\vec{e}$　　B．$\pm2\vec{e}$　　C．$4\sqrt{2}\vec{e}$　　D．$\pm4\sqrt{2}\vec{e}$

6．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x<0\\(a-2)x+3a, & x\geqslant0\end{cases}$，满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a\in(0,1)$　　B．$a\in(2,+\infty)$　　C．$a\in(0,\frac{1}{3}]$　　D．$a\in[\frac{3}{4},2)$

7．（5 分）甲、乙、丙、丁四人各掷骰子 5 次（骰子出现的点数可能为 1，2，3，4，5，6），并分别记录自己每次出现的点数，四人根据统计结果对自己的试验数据分别做了如下描述，可以判断一定出现 6 点的描述是（　　）

A．中位数为 4，众数为 4

B．中位数为 3，极差为 4

C．平均数为 3，方差为 2

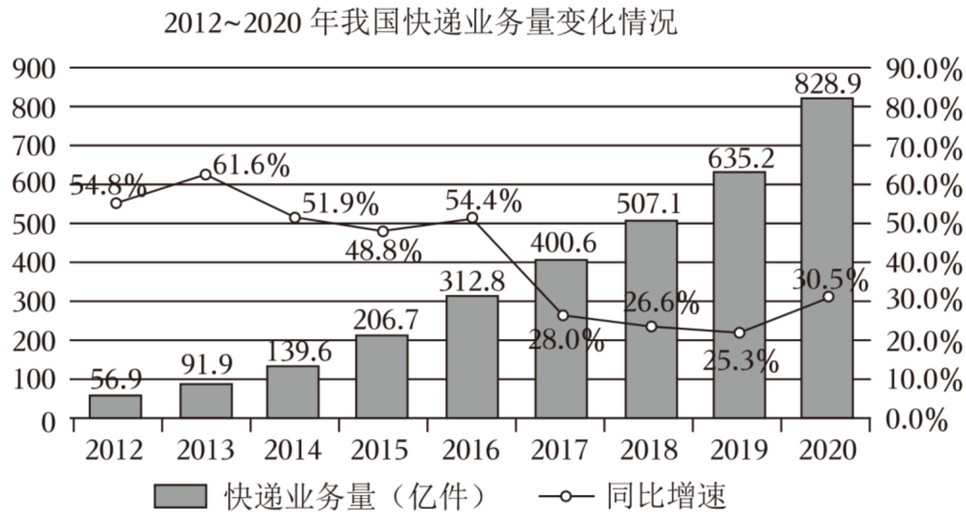
D．平均数为4，第25百分位数为2

8．（5 分）△*ABC* 中，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}\sin x，\sin x)$，$\overrightarrow{AC}=(\sin x，\cos x)$．对任意的实数 *t*，恒有 $|\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}|\geqslant|\overrightarrow{BC}|$，则△*ABC* 面积的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．2

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

（多选）9．（5 分）我国是世界上的快递大国，快递业务已经成为人们日常生活当中不可或缺的重要组成部分，给我们的生活带来巨大的便利，如图是2012～2020年我国快递业务量变化情况统计图，则关于这9年的统计信息，下列说法正确的是（　　）



A．这9年我国快递业务量逐年增加

B．这9年我国快递业务量同比增速的中位数为51.4%

C．这9年我国快递业务量同比增速的极差超过36%

D．这9年我国快递业务量的平均数超过210亿件

（多选）10．（5 分）下列结论中正确的有（　　）

A．$y=x+\frac{1}{x}$的最小值是2

B．如果 *x*＞0，*y*＞0，*x*+3*y*+*xy*＝9，那么 *xy* 的最大值为3

C．函数$f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值为2

D．如果 *a*＞0，*b*＞0，且$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1$，那么 *a*+*b* 的最小值为2

（多选）11．（5 分）下列命题正确的是（　　）

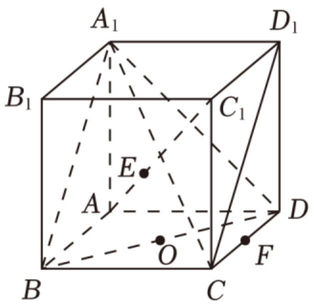
A．设$\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$为非零向量，则“存在负数λ，使得$\overrightarrow{m}=\lambda\overrightarrow{n}$”是“$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}<0$”的充分不必要条件

B．点 D 是△ABC 边 BC 的中点，若$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\sqrt{2}\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$，则$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$的投影向量是$\overrightarrow{BD}$

C．点 D 是△ABC 边 BC 的中点，若点 P 是线段 AD 上的动点，且满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 λμ 的最大值为$\dfrac{1}{8}$

D．已知平面内的一组基底$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，则向量$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$不能作为一组基底

（多选）12．（5 分）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，O 为底面 $ABCD$ 的中心，AC_1 交平面 A_1BD 于点 E，点 F 为棱 CD 的中点，则（　　）



A．四面体 D_1-ACD 的体积与表面积的数值之比为$\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$

B．点 C_1 到平面 ABD 的距离为 2

C．异面直线 BD 与 AC_1 所成的角为 60°

D．过点 A_1，B，F 的平面截该正方体所得截面的面积为$\dfrac{9}{8}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 8，则数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为_________.

14．（5 分）已知$\overrightarrow{a}=(x,\ 1)$，$\overrightarrow{b}=(3,\ -1)$，若$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，则 x＝____________________.

15．（5 分）已知$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，$g(x)=mx+1-2m$，若对任意的 $x_1\in[2,\ 3]$，总存在 $x_2\in[2,\ 3]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$成立，求实数 m 的取值范围为 ______________.

16．（5 分）已知 ω＞0，函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\omega x+\cos\omega x)$在$(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$上单调递减，则实数 ω 的取值范围是 ________________________.

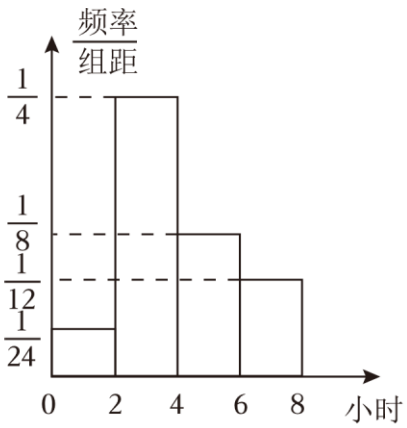
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）读书可以增长知识，开拓视野，修身怡情．某校为了解本校学生课外阅读情况，按性别进行分层，用分层随机抽样的方法从全校学生中抽出一个容量为 100 的样本，其中男生 40 名，女生 60 名．经调查统计，分别得到 40 名男生一周课外阅读时间（单位：小时）的频数分布表和 60 名女生一周课外阅读时间（单位：小时）的频率分布直方图．

男生一周阅读时间频数分布表	
小时	频数
[0，2）	9
[2，4）	22
[4，6）	6
[6，8）	3

（1）由以上频率分布直方图估计该校女生一周阅读时间的第 75 百分位数；

（2）从一周课外阅读时间为[4，6）的样本学生中按比例分配抽取 7 人，再从这 7 人中任意抽取 2 人，求恰好抽到一男一女的概率．



18.（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\tan x}{\tan^2 x+1}+\dfrac{1}{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)$．

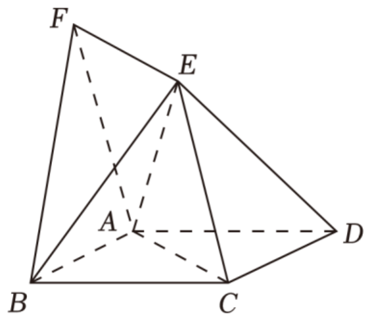
（1）求 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最值；

（2）已知锐角三角形内角 A 满足 $f(A)=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos 2A$ 的值．

19.（12 分）如图，正方形 $ABCD$ 和菱形 $ACEF$ 所在平面互相垂直，$\angle ACE=60°$．四棱锥 $E-ABCD$ 的体积是 $36\sqrt{6}$．

（1）求证：$DE\parallel$平面 ABF；

（2）求 AB 的长度及四面体 $ABEF$ 的体积．



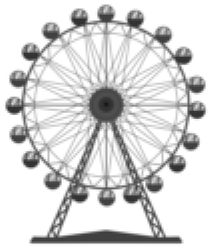
20.（12 分）已知函数 $f(x)=1+a\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$，$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$.

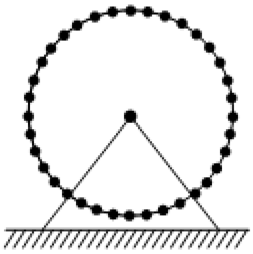
（1）若 $g(x)$ 为奇函数，求实数 a 的值；

（2）在（1）的条件下，当 $x\in[-3,2]$ 时，函数 $y=f(x)+m$ 存在零点，求实数 m 的取值范围；

（3）定义在 D 上的函数 $f(x)$，如果满足：对任意 $x\in D$，存在常数 $M\geqslant 0$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，其中 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界．若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是以 5 为上界的有界函数，求实数 a 的取值范围．

21.（12 分）摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施，游客坐在摩天轮的座舱里慢慢往上转，可以从高处俯瞰四周景色．位于潍坊滨海的“渤海之眼”摩天轮是世界上最大的无轴摩天轮，该摩天轮轮盘直径为 124 米，设置有 36 个座舱．游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱，当到达最高点时距离地面 145 米，匀速转动一周大约需要 30 分钟．当游客甲坐上摩天轮的座舱开始计时．





（1）经过 t 分钟后游客甲距离地面的高度为 H 米，已知 H 关于 t 的函数关系式满足 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$），求摩天轮转动一周的解析式 $H(t)$；

（2）游客甲坐上摩天轮后多长时间，距离地面的高度第一次恰好达到 52 米？

（3）若游客乙在游客甲之后进入座舱，且中间间隔 5 个座舱，游客乙进入座舱后距离地面高度能否超过游客甲，若能，是在甲进入后的多少分钟以后？

22.（12 分）在锐角△ABC 中，角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，设向量 $\vec{m}=(a+c,\ a)$，$\vec{n}=(a-c,\ b)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

（1）求证：$C=2A$；

（2）求$\frac{b}{a}+(\frac{2a}{c})^2$的取值范围.

2023-2024 学年江苏省常州一中高二（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）已知集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|x^2+2x-3<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．（0，3）　　B．（0，1）　　C．（3，+∞）　　D．（1，+∞）

【答案】B

【分析】求出集合 B，利用交集定义能求出 $A\cap B$.

【解答】解：集合 $A=\{x|x>0\}$，

$B=\{x|x^2+2x-3<0\}=\{x|-3<x<1\}$，

则 $A\cap B=$（0，1）.

故选：B.

2．（5 分）已知复数 $z=-1+\sqrt{3}i$（i 为虚数单位），$\overline{z}$为 z 的共轭复数，若复数 $\omega=\frac{\overline{z}}{z}$，则 ω 的虚部为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【答案】C

【分析】首先化简 ω，再求 ω 的虚部.

【解答】解：复数 $z=-1+\sqrt{3}i$（i 为虚数单位），$\omega=\frac{\overline{z}}{z}$，

则 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{(-1-\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

所以 ω 的虚部为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

3．（5 分）设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n\subset\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

B．若 $m/\!/\alpha$，$m/\!/n$，则 $n/\!/\alpha$

C．若 $m/\!/n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

D．若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp m$，则 $n\perp\beta$

【答案】C

【分析】对于 A，α 与 β 平行或相交；对于 B，n∥α 或 n⊂α；对于 C，由面面垂直的判定定理得 α⊥β；对于 D，n 与相交、平行或 n⊂β.

【解答】解：m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，

对于 A，若 m⊥α，n⊂β，m⊥n，则 α 与 β 平行或相交，故 A 错误；

对于 B，若 m∥α，m∥n，则 n∥α 或 n⊂α，故 B 错误；

对于 C，若 m∥n，n⊥β，m⊂α，则 m⊥β，

由面面垂直的判定定理得 α⊥β，故 C 正确；

对于 D，若 α⊥β，α∩β＝m，n⊥m，则 n 与相交、平行或 n⊂β，故 D 错误.

故选：C.

4.（5 分）已知 $\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\sin(\frac{5\pi}{6}+\alpha)=$（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】A

【分析】根据诱导公式求解即可.

【解答】解：已知 $\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$，

则 $\sin(\frac{5\pi}{6}+\alpha)=\sin[\pi-(\frac{5\pi}{6}+\alpha)]=\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$.

故选：A.

5.（5 分）已知 $|\vec{a}|=6$，$\vec{e}$为单位向量，若向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则向量$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为（　　）

A. $2\vec{e}$　　B. $\pm2\vec{e}$　　C. $4\sqrt{2}\vec{e}$　　D. $\pm4\sqrt{2}\vec{e}$

【答案】B

【分析】首先求 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{e}\rangle$，再求投影向量.

【解答】解：由向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

可得 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{e}\rangle=\pm\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\pm\frac{1}{3}$，又$|\vec{a}|=6$，

故向量$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为 $|\vec{a}|\cdot\cos\langle\vec{a},\ \vec{e}\rangle\cdot\vec{e}=\pm2\vec{e}$.

故选：B.

6.（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x<0\\(a-2)x+3a, & x\geqslant 0\end{cases}$，满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a\in(0,1)$　　B．$a\in(2,+\infty)$　　C．$a\in(0,\frac{1}{3}]$　　D．$a\in[\frac{3}{4},2)$

【答案】*B*

【分析】根据不等式可以确定函数的单调性，根据分段函数的单调性的性质进行求解即可．

【解答】解：不妨设 $x_1>x_2$，由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$，

因此该函数是实数集上的增函数，

于是有 $\begin{cases}a>1\\a-2>0\\a^0\leqslant(a-2)\cdot 0+3a\end{cases}\Rightarrow a>2$，

即 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$．

故选：*B*．

7.（5 分）甲、乙、丙、丁四人各掷骰子 5 次（骰子出现的点数可能为 1，2，3，4，5，6），并分别记录自己每次出现的点数，四人根据统计结果对自己的试验数据分别做了如下描述，可以判断一定出现 6 点的描述是（　　）

A．中位数为 4，众数为 4

B．中位数为 3，极差为 4

C．平均数为 3，方差为 2

D．平均数为 4，第 25 百分位数为 2

【答案】*D*

【分析】根据中位数，众数和极差的定义举例即可判断 *AB*，根据平均数和方差的定义利用反证法即可判断 *C*，根据百分位数和平均数的定义利用反证法即可判断 *D*．

【解答】解：对于 *A*，中位数为 4，众数为 4，

则这 5 个数可以为 4，4，4，4，4，故 *A* 不符题意；

对于 *B*，中位数为 3，极差为 4，

则这 5 个数可以是 1，1，3，4，5，故 *B* 不符题意；

对于 *C*，平均数为 3，方差为 2，

设这 5 个数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，

则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$，$\frac{1}{5}[(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2+(x_4-3)^2+(x_5-3)^2]=2$，

若取 $x_1=6$，则 $x_2+x_3+x_4+x_5=9$，

则 $(x_2-3)^2+(x_3-3)^2+(x_4-3)^2+(x_5-3)^2=1$，

所以 $(x_2-3)^2\leqslant 1$，$(x_3-3)^2\leqslant 1$，$(x_4-3)^2\leqslant 1$，$(x_5-3)^2\leqslant 1$，

所以 x_2，x_3，x_4，x_5 这四个数可以为 4，3，3，3 与 2，3，3，3，

这与 $x_2+x_3+x_4+x_5=9$ 矛盾，所以 6 不存在，故 C 不符题意；

对于 D，按从小到大的顺序设这 5 个数为 a，b，c，d，e，

因为 $5\times 25\%=1.25$，

所以第 25 百分位数为 5 个数中从小到大排列的第二个数，

又第 25 百分位数为 2，

所以 $a=1$，$b=2$，

因为平均数为 4，

所以 $a+b+c+d+e=20$，则 $c+d+e=17$，

若 c，d，e 三个数都不是 6，则 $c+d+e\leqslant 15$，

这与 $c+d+e=17$ 矛盾，故 c，d，e 三个数一定会出现 6，故 D 符合题意.

故选：D.

8.（5 分）$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}\sin x, \sin x)$，$\overrightarrow{AC}=(\sin x, \cos x)$．对任意的实数 t，恒有 $|\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}|\geqslant|\overrightarrow{BC}|$，则$\triangle ABC$ 面积的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．1　　　　D．2

【答案】B

【分析】首先根据向量的运算，以及向量模的几何意义，确定 $BC\perp AC$，再结合向量模的计算公式，以及面积公式，即可求解.

【解答】解：如图，设 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}$，由向量减法的几何意义知，

当 $|\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}|\geqslant|\overrightarrow{BC}|$时，有点 B 到直线 AC 的最短距离为 BC，

所以 $BC\perp AC$.

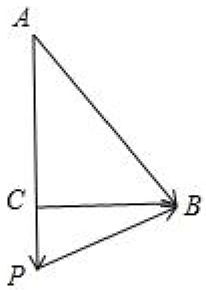
又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4\sin^2x}\leqslant 2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，

所以由勾股定理可得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}\leqslant\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

故△*ABC* 面积 $S=\frac{1}{2}BC\cdot AC\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

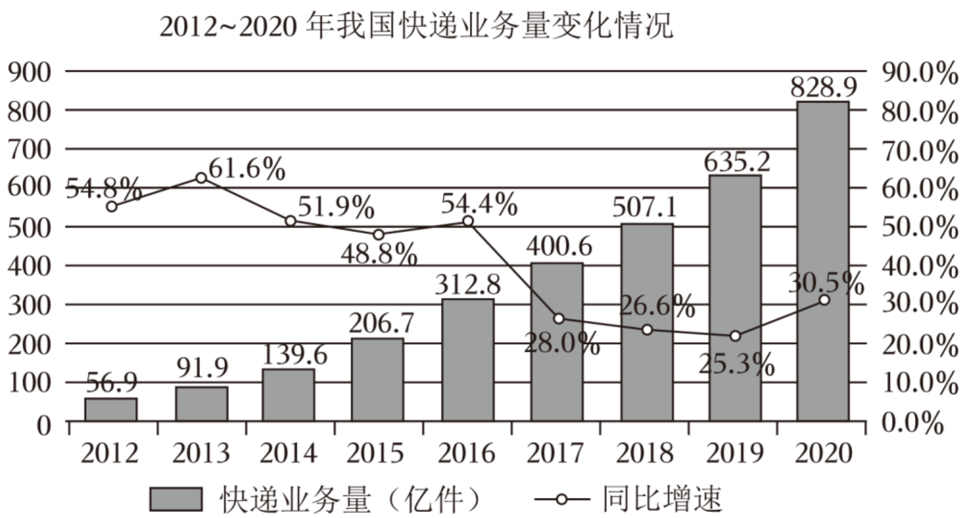
故△*ABC* 面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：*B*.



二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（5 分）我国是世界上的快递大国，快递业务已经成为人们日常生活当中不可或缺的重要组成部分，给我们的生活带来巨大的便利，如图是 2012～2020 年我国快递业务量变化情况统计图，则关于这 9 年的统计信息，下列说法正确的是（　　）



A．这 9 年我国快递业务量逐年增加

B．这 9 年我国快递业务量同比增速的中位数为 51.4%

C．这 9 年我国快递业务量同比增速的极差超过 36%

D．这 9 年我国快递业务量的平均数超过 210 亿件

【答案】*ACD*

【分析】分别观察这 9 年我国快递业务量和各年我国快递业务量同比增速，对选项一一分析，可得结论．

【解答】解：由条形图可得，这 9 年我国快递业务量逐年增加，故 A 正确；

将各年我国快递业务量同比增速按从小到大排列得：25.3%，26.6%，28.0%，30.5%，48.0%，51.4%，51.9%，54.8%，61.6%，

故中位数为第五个数 48.0%，故 B 错误；

这 9 年我国快递业务量同比增速的极差为 61.6%﹣25.3%＝36.3%＞36%，故 C 正确；

由条形图可得，自 2016 年起，各年的快递业务量远超过 210 亿件，故快递业务量的平均数超过 210 亿件，故 D 正确．

故选：ACD．

（多选）10．（5 分）下列结论中正确的有（　　）

A．$y=x+\frac{1}{x}$的最小值是 2

B．如果 $x>0$，$y>0$，$x+3y+xy=9$，那么 xy 的最大值为 3

C．函数$f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值为 2

D．如果 $a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1$，那么 $a+b$ 的最小值为 2

【答案】BD

【分析】对 A，如果 $x<0$，那么$y=x+\frac{1}{x}<0$，命题不成立；对 B，使用基本不等式得

$9=x+3y+xy\geqslant 2\sqrt{3}\sqrt{xy}+xy$，即可得 xy 的最大值；

对 C，函数$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，当且仅当$\sqrt{x^2+4}=1$时取等号，此时 x 无解；

对 D，根据题意构造 $a+b=(a+1)+(b+1)-2$，将“1”替换为$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$，代入用基本不等式求解．

【解答】解：对于 A，如果 $x<0$，那么$y=x+\frac{1}{x}<0$，最小值是 2 不成立，故 A 错误；

对于 B，如果 $x>0$，$y>0$，$x+3y+xy=9$，则 $9=x+3y+xy\geqslant 2\sqrt{3}\sqrt{xy}+xy$，整理得 $(\sqrt{xy})^2+2\sqrt{3}\sqrt{xy}-9\leqslant 0$，

解得 $0<\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $y=1$，$x=3$ 时取等号，所以 xy 的最大值为 3，故 B 正确；

对于 C，函数$f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2$，当且仅当$\sqrt{x^2+4}=1$时取等号，此时 x 无解，

故不能取得最小值 2，故 C 错误；

对于 D，如果 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1+b}=1$，那么 $a+b=(a+1)+(b+1)-2=[(a+1)+(b+1)]\times(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1})-2=(1+1+\frac{b+1}{a+1}+\frac{a+1}{b+1})-2\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b+1}}-2=2$，当且仅当 $a=1$，$b=1$ 时取等号，故 D 正确．

故选：BD．

（多选）11．（5 分）下列命题正确的是（　　）

A．设 $\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$ 为非零向量，则“存在负数 λ，使得 $\overrightarrow{m}=\lambda\overrightarrow{n}$”是“$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}<0$”的充分不必要条件

B．点 D 是△ABC 边 BC 的中点，若 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\sqrt{2}\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$，则 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 的投影向量是 $\overrightarrow{BD}$

C．点 D 是△ABC 边 BC 的中点，若点 P 是线段 AD 上的动点，且满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 λμ 的最大值为 $\frac{1}{8}$

D．已知平面内的一组基底 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，则向量 $\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ 不能作为一组基底

【答案】ABC

【分析】A 中，分别判断充分性和必要性是否成立即可；

B 中，根据 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，$\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$ 分别表示单位向量，利用平面向量加法几何意义，以及角平分线的定义，即可出 $\overrightarrow{BD}$ 是 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 的投影向量；

C 中，根据 A，P，D 三点共线，利用 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，求出函数 $y=\lambda\mu$ 的最大值即可．

D 中，根据不共线的两个向量可以作为一组基底，判断即可．

【解答】解：对于 A，存在负数 λ，使得 $\overrightarrow{m}=\lambda\overrightarrow{n}$，所以 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=\lambda\overrightarrow{n}^2<0$，充分性成立；

当 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}<0$ 时，不一定有“存在负数 λ，使得 $\overrightarrow{m}=\lambda\overrightarrow{n}$”，必要性不成立；

所以是充分不必要条件，选项 A 正确．

对于 B，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，$\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$ 分别表示平行于 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 的单位向量，

由平面向量加法可知：$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 为∠BAC 的平分线表示的向量，

因为$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{2}\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$，所以 AD 为$\angle BAC$ 的平分线，

又因为 AD 为 BC 的中线，所以 $AD\perp BC$，如图 1 所示：

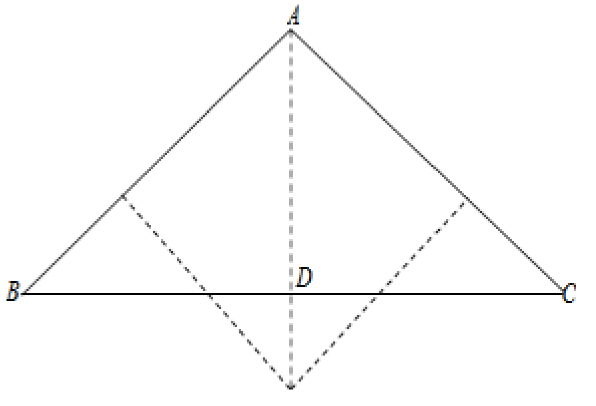


图1

$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$的投影为$|\overrightarrow{BC}|\cos B=|\overrightarrow{BA}|\times\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BA}|}=|\overrightarrow{BD}|$，

所以$\overrightarrow{BD}$是$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$的投影向量，选项 B 正确；

对于 C，如图 2 所示：

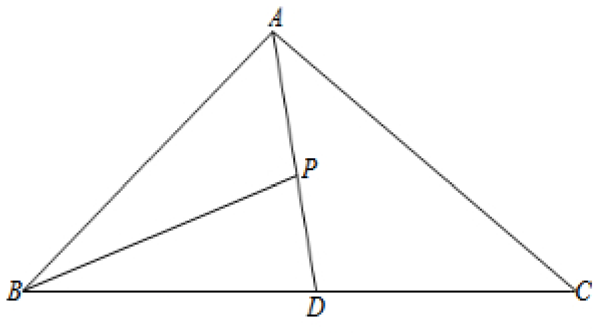


图2

因为 P 在 AD 上，即 A，P，D 三点共线，

设$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BD}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，

又因为$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{BC}$，

因为$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则$\begin{cases}\lambda=t\\ \mu=\frac{1-t}{2}\end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，

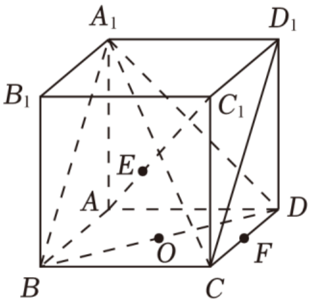
令 $y=\lambda\mu=t\bullet\frac{1-t}{2}=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$，

$t=\frac{1}{2}$时，$\lambda\mu$ 取得最大值为$\frac{1}{8}$，选项 C 正确．

对于 D，平面内的一组基底$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，则向量$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$不共线，可以作为一组基底，选项 D 错误．

故选：ABC．

（多选）12．（5 分）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，O 为底面 $ABCD$ 的中心，AC_1 交平面 A_1BD 于点 E，点 F 为棱 CD 的中点，则（　　）



A．四面体 D_1-ACD 的体积与表面积的数值之比为$\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$

B．点 C_1 到平面 ABD 的距离为 2

C．异面直线 BD 与 AC_1 所成的角为 60°

D．过点 A_1，B，F 的平面截该正方体所得截面的面积为$\dfrac{9}{8}$

【答案】AD

【分析】求得四面体 D_1-A_2CD 的体积与表面积，可判断 A；利用 $BD\perp$平面 ACC_1A_1，可判断 C；利用 C 可证 $AC_1\perp$平面 ABD，进而求得点 C_1 到平面 ABD 的距离判断 B；求得截面面积判断 D．

【解答】解：对于 A，因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，

所以四面体 D_1-A_1CD 的体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{6}$，

表面积为$\dfrac{1}{2}\times1\times1+\dfrac{1}{2}\times1\times1+\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}+1$，

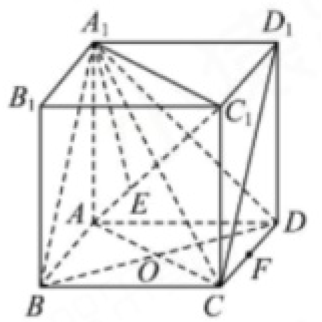
所以四面体 D_1-A_2CD 的体积与表面积的数值之比为$\dfrac{\frac{1}{6}}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$，所以 A 正确，

对于 C，因为 $C_1C\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $BD\perp C_1C$，

又 $BD\perp AC$，$AC\cap C_1C=C$，AC，$C_1C\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $BD\perp$平面 ACC_1A_1，又 $AC_1\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $BD\perp AC_1$，即异面直线 BD 与 AC_1 所成的角为 90°，故 C 不正确；



对于 B，根据证明 $BD\perp AC_1$ 的方法，同理可得 $AC_1\perp A_1B$，

因为 $BD\cap AB=B$，BD，$AB\subset$平面 ABD，所以 $AC_1\perp$平面 ABD，

则 C_1E 的长度就是点 C_1 到平面 A_1BD 的距离，显然 E 为正三角形 A_1BD 的中心，

因为正方体 $ABCD-AB_1C_1D_1$ 的棱长为 1，所以正三角形 ABD 的边长为$\sqrt{2}$，

所以 $A_1E=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又 $A_1C_1=\sqrt{2}$，

所以 $CE=\sqrt{A_1C_1{}^2-A_1E^2}=\sqrt{2-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即点 C_1 到平面 ABD 的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 B 不正确；

对于 D，取 D_1D 的中点 G，连接 FG，GA_1，BF，A_1B，

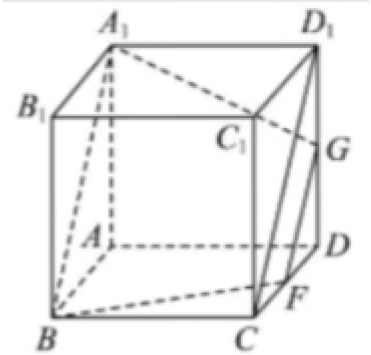
因为 $FG/\!/CD_1$，$CD_1/\!/A_1B$，$FG=\frac{1}{2}CD_1$，$CD_1=A_1B$，

所以 $FGMA_1B$，$FG=\frac{1}{2}A_1B$.

因为$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$A_1G=\sqrt{A_1D_1{}^2+D_1G^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $BF=A_1G$，所以四边形 A_1BFG 为等腰梯形，

所以等腰梯形 A_1BFG 就是过点 A_1，B，F 的平面截该正方体所得截面，如图：



因为 $A_1B=\sqrt{2}$，$FG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A_1G=BF=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以等腰梯形 A_1BFG 的高为$h=\sqrt{A_1G^2-(\frac{A_1B-FG}{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-(\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以等腰梯形 A_2BFG 的面积为$\frac{1}{2}(A_1B+FG)\cdot h=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$，

即过点 A_1，B，F 的平面截该正方体所得截面的面积为$\frac{9}{8}$，故 D 正确．

故选：AD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 8，则数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为__32__．

【答案】见试题解答内容

【分析】利用方差的性质直接求解．

【解答】解：∵样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 8，

∴数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为：

$2^2\times8=32$．

故答案为：32．

14．（5 分）已知$\vec{a}=(x,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$__$\frac{1}{3}$__．

【答案】$\frac{1}{3}$．

【分析】代入平面向量垂直的坐标表示公式，即可求解．

【解答】解：因为$\vec{a}=(x,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x-1=0$，解得 $x=\frac{1}{3}$．

故答案为：$\frac{1}{3}$．

15．（5 分）已知 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，$g(x)=mx+1-2m$，若对任意的 $x_1\in[2,3]$，总存在 $x_2\in[2,3]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$成立，求实数 m 的取值范围为__$\{m|m\geqslant1\}$__．

【答案】$\{m|m\geqslant1\}$．

【分析】根据题意，分别求两个函数的值域，再转化为子集问题，即可求解．

【解答】解：若对任意的 $x_1\in[2,3]$，总存在 $x_2\in[2,3]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$成立，

只需在区间[2，3]上的函数 $y=f(x)$的值域为函数 $y=g(x)$的值域的子集，

因为函数 $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$，

所以函数 $f(x)$在[2，3]上单调递减，

所以函数 $f(x)$的值域为 $[\frac{3}{2},\ 2]$．

对函数 $g(x)=mx+1-2m$，$x\in[2，3]$.

①当 $m=0$ 时，$g(x)$ 为常数 1，不符合题意，舍去；

②当 $m>0$ 时，$g(x)$ 的值域为$[1，m+1]$，此时只需 $m+1\geqslant 2$，解得 $m\geqslant 1$；

③当 $m<0$ 时，$g(x)$ 的值域为$[m+1，1]$，不符合题意，舍去.

综上，m 的取值范围为$\{m|m\geqslant 1\}$.

故答案为：$\{m|m\geqslant 1\}$.

16.（5 分）已知 ω>0，函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\omega x+\cos\omega x)$在 $(\frac{\pi}{2}，\pi)$上单调递减，则实数 ω 的取值范围是 __$[\frac{1}{2}，\frac{5}{4}]$__.

【答案】$[\frac{1}{2}，\frac{5}{4}]$.

【分析】由题意 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$，再根据正弦函数的单调区间，列出区间端点满足的不等式求解即可.

【解答】解：由于函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\omega x+\cos\omega x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$，

因为 ω>0，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$在 $(\frac{\pi}{2}，\pi)$上单调递减，

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant 2(\pi-\frac{\pi}{2})$，可得 $0<\omega\leqslant 2$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$时，$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}$，

所以$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$.

故答案为：$[\frac{1}{2}，\frac{5}{4}]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

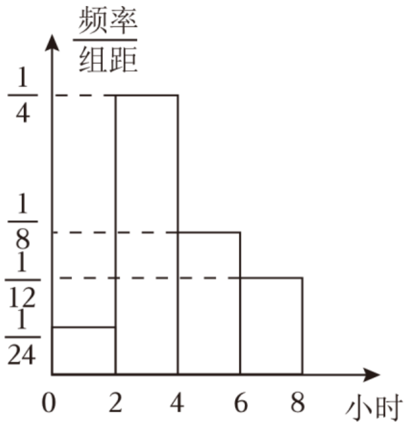
17.（10 分）读书可以增长知识，开拓视野，修身怡情．某校为了解本校学生课外阅读情况，按性别进行分层，用分层随机抽样的方法从全校学生中抽出一个容量为 100 的样本，其中男生 40 名，女生 60 名．经调查统计，分别得到 40 名男生一周课外阅读时间（单位：小时）的频数分布表和 60 名女生一周课外阅读时间（单位：小时）的频率分布直方图．

男生一周阅读时间频数分布表	
小时	频数

[0，2）	9
[2，4）	22
[4，6）	6
[6，8）	3

（1）由以上频率分布直方图估计该校女生一周阅读时间的第 75 百分位数；

（2）从一周课外阅读时间为[4，6）的样本学生中按比例分配抽取 7 人，再从这 7 人中任意抽取 2 人，求恰好抽到一男一女的概率.



【答案】（1）$\frac{16}{3}$；

（2）$\frac{10}{21}$.

【分析】（1）根据百分数的定义，结合频率分布直方图可得答案；

（2）由频数分布表，频率分布直方图知，一周课外阅读时间为[4，6）的学生中男生有 6 人，女生有 15 人，按照比例抽样，利用古典概型可解.

【解答】解：（1）设女生一周阅读时间的 75%分位数为 a，

则$\frac{1}{24}\times 2+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}(a-4)=\frac{3}{4}$，

解得 $a=\frac{16}{3}$；

（2）由频数分布表，频率分布直方图知，

一周课外阅读时间为[4，6）的学生中男生有 6 人，女生有$\frac{1}{8}\times 2\times 60=15$（人），

若从中按比例分别抽取 7 人，则男生有 2 人，记为 a_1，a_2，

女生有 5 人，记为 b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，

则样本空间 $\Omega=\{a_1a_2$，a_1b_1，a_1b_2，a_1b_3，a_1b_4，a_1b_5，a_2b_1，a_2b_2，a_2b_3，a_2b_4，a_2b_5，b_1b_2，b_1b_3，b_1b_4，

b_1b_5，b_2b_3，b_2b_4，b_2b_5，b_3b_4，b_3b_5，b_4b_5}，

共有 21 个样本点，

记事件 A＝“恰好一男一女”，

则 A＝{a_1b_1，a_1b_2，a_1b_3，a_1b_4，a_1b_5，a_2b_1，a_2b_2，a_2b_3，a_2b_4，a_2b_5}包含 10 个样本点，

故所求概率 $P(A)=\frac{10}{21}$.

18．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}\tan x}{\tan^2x+1}+\frac{1}{2}(\sin^2x-\cos^2x)$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$上的最值；

（2）已知锐角三角形内角 A 满足 $f(A)=\frac{1}{3}$，求 cos2A 的值．

【答案】（1）最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值－1；

（2）$\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

【分析】（1）根据同角基本关系式及倍角公式，辅助角公式进行化简，再利用正弦函数的性质求得答案；

（2）由已知结合平方关系求得 $\cos(2A-\frac{\pi}{6})$，将 $2A=(2A-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}$，结合两角和的余弦公式化简得出答案．

【解答】解：（1）$f(x)=\frac{\sqrt{3}\tan x}{\tan^2x+1}+\frac{1}{2}(\sin^2x-\cos^2x)=\frac{\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+1}+\frac{1}{2}(\sin^2x-\cos^2x)$

$=\frac{\sqrt{3}\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}-\frac{1}{2}(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

因为 $x\in[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{2\pi}{3}，\frac{\pi}{3}]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$时，即 $x=\frac{\pi}{4}$时，$f(x)$ 取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$时，即 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$ 取得最小值－1．

（2）因为 $f(A)=\frac{1}{3}$，所以 $f(A)=\sin(2A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$.

因为 $\sin(2A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，所以 $\cos(2A-\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\sin^2(2A-\frac{\pi}{6})}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

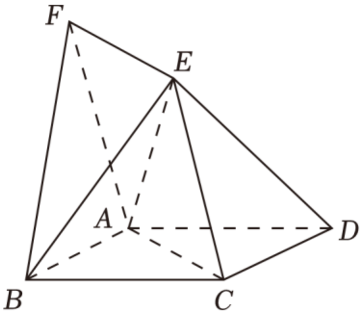
所以$\cos2A=\cos[(2A-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\cos(2A-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\sin(2A-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

19.（12 分）如图，正方形 $ABCD$ 和菱形 $ACEF$ 所在平面互相垂直，$\angle ACE=60^\circ$．四棱锥 $E-ABCD$ 的体积是 $36\sqrt{6}$.

（1）求证：$DE\parallel$平面 ABF;

（2）求 AB 的长度及四面体 $ABEF$ 的体积.



【答案】（1）见解析.

（2）$AB=6$，四面体 $ABEF$ 的体积为 $18\sqrt{6}$.

【分析】（1）推导出 $AB\parallel DC$，$AF\parallel CE$，从而平面 $ABF\parallel$平面 CDE，由此能证明 $DE\parallel$平面 ABF.

（2）连结 AC、BD，相交于点 O，连结 EO，推导出 $EO\perp$平面 $ABCD$，$BO\perp$平面 $ACEF$，四面体 $ABEF$ 在面 AEF 上的高 $BO=3\sqrt{3}$，由此能求出四面体 $ABEF$ 的体积.

【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $ACEF$ 是菱形，

∴$AB\parallel DC$，$AF\parallel CE$，且 $AB\cap AF=A$，$CD\cap CE=C$，

∴平面 $ABF\parallel$平面 CDE，

∵$DE\subset$平面 CDE，∴$DE\parallel$平面 ABF.

（2）解：连结 AC、BD，相交于点 O，连结 EO，则 O 为 AC 的中点，

∵四边形 $ACEF$ 是菱形，$\angle ACE=60^\circ$，∴$\triangle ACE$ 是正三角形，

∴$EO\perp AC$，

∵平面 $ABCD\perp$平面 $ACEF$，交线为 AC，

∴$EO\perp$平面 $ABCD$，

同理，得 $BO\perp$平面 $ACEF$，

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，则 $AC=BD=\sqrt{2}a$，$BO=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，

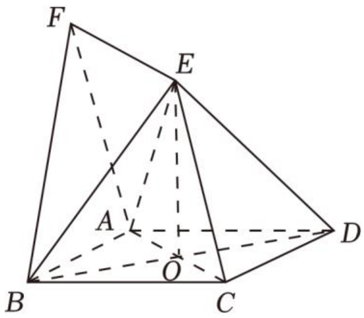
∴$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a^3=36\sqrt{6}$，解得 $a=6$，

∴$AB=6$，

∴ $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}a)^2\times\sin60°=18\sqrt{3}$，

四面体 $ABEF$ 在面 AEF 上的高 $BO=3\sqrt{3}$，

∴四面体 $ABEF$ 的体积 $V_{B-AEF}=\frac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=18\sqrt{6}$.



20.（12 分）已知函数 $f(x)=1+a(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{4})^x$，$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$.

（1）若 $g(x)$ 为奇函数，求实数 a 的值；

（2）在（1）的条件下，当 $x\in[-3，2]$时，函数 $y=f(x)+m$ 存在零点，求实数 m 的取值范围；

（3）定义在 D 上的函数 $f(x)$，如果满足：对任意 $x\in D$，存在常数 $M\geqslant0$，都有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，其中 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界．若函数 $f(x)$ 在$[0，+\infty)$上是以 5 为上界的有界函数，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$a=-1$；

（2）$[-57，-\frac{3}{4}]$；

（3）$[-7，3]$.

【分析】（1）根据奇函数的定义即可化简求解，

（2）利用换元法以及二次函数的性质即可求解最值，

（3）利用对勾函数的单调性，分别利用函数单调性求解 $F(t)$，$G(t)$ 的最值即可求解．

【解答】解：（1）因为 $g(x)$ 为奇函数，所以对定义域内的 x，有 $g(-x)=-g(x)$ 恒成立，

即 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+ax}{-x-1}=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$，即$\frac{1+ax}{-x-1}=\frac{x-1}{1-ax}$，解得 $a=\pm1$，

经检验，$a=1$ 不合题意，故 $a=-1$；

（2）由（1）得 $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{4})^x$，

令 $t=(\frac{1}{2})^{x}$，由 $x\in[-3,2]$，所以 $t\in[\frac{1}{4},8]$，

则 $h(t)=t^2-t+1$，其对称轴为 $t=\frac{1}{2}$，

当 $t=\frac{1}{2}$时，$h(t)_{min}=h(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$，当 $t=8$ 时，$h(t)_{max}=h(8)=57$，

所以 $f(x)$ 值域为 $[\frac{3}{4},57]$，

又因为函数 $y=f(x)+m$ 存在零点，等价于方程 $m=-f(x)$ 有解，

所以实数 m 的取值范围是 $[-57,-\frac{3}{4}]$；

（3）由已知，$|f(x)|\leqslant 5$ 在$[0,+\infty)$上恒成立，

即 $-5\leqslant f(x)\leqslant 5$ 在$[0,+\infty)$上恒成立，

化简得 $-6\cdot 2^{x}-(\frac{1}{2})^{x}\leqslant a\leqslant 4\cdot 2^{x}-(\frac{1}{2})^{x}$ 在$[0,+\infty)$上恒成立，

所以 $[-6\cdot 2^{x}-(\frac{1}{2})^{x}]_{max}\leqslant a\leqslant[4\cdot 2^{x}-(\frac{1}{2})^{x}]_{min}$，

设 $t=2^x$，因为 $x\in[0,+\infty)$，即得 $t\geqslant 1$，

记 $F(t)=-6t-\frac{1}{t}$，$G(t)=4t-\frac{1}{t}$，

易得 $G(t)$ 在$[1,+\infty)$上单调递增，所以 $G(t)_{min}=G(1)=3$，

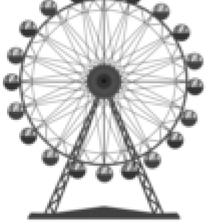
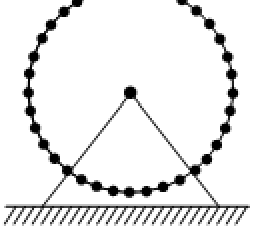
由于 $F(t)=-6t-\frac{1}{t}=-(6t+\frac{1}{t})\leqslant-2\sqrt{6}$ 当且仅当 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取等号，

由于 $t\geqslant 1$，故根据对勾函数的性质可知 $F(t)$ 在$[1,+\infty)$上单调递减，

故 $F(t)_{max}=F(1)=-7$，

因此实数 a 的取值范围是$[-7,3]$.

21.（12 分）摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施，游客坐在摩天轮的座舱里慢慢往上转，可以从高处俯瞰四周景色．位于潍坊滨海的“渤海之眼”摩天轮是世界上最大的无轴摩天轮，该摩天轮轮盘直径为 124 米，设置有 36 个座舱．游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱，当到达最高点时距离地面 145 米，匀速转动一周大约需要 30 分钟．当游客甲坐上摩天轮的座舱开始计时．

（1）经过 t 分钟后游客甲距离地面的高度为 H 米，已知 H 关于 t 的函数关系式满足 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\phi|\leqslant\frac{\pi}{2}$），求摩天轮转动一周的解析式 $H(t)$；

（2）游客甲坐上摩天轮后多长时间，距离地面的高度第一次恰好达到 52 米？

（3）若游客乙在游客甲之后进入座舱，且中间间隔 5 个座舱，游客乙进入座舱后距离地面高度能否超过游客甲，若能，是在甲进入后的多少分钟以后？

【答案】（1）$H(t)=62\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2})+83$，$0\leqslant t\leqslant 30$；

（2）$t=5$；

（3）在甲进入后的$\frac{35}{2}$分钟以后游客乙进入座舱后距离地面高度能超过游客甲．

【分析】（1）根据函数关系式 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$，求出 A、B、φ 和 ω 的值即可得解；

（2）令 $H(t)=52$，求出 $t\in(0,30)$ 内的值即可；

（3）根据游客甲距离地面高度解析式 $H_{甲}$和乙距离地面高度解析式 $H_{乙}$，利用三角函数的图象计算 $H_{乙}>H_{甲}$时 t 的范围即可．

【解答】解：（1）H 关于 t 的函数关系式为 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$，

由$\begin{cases}B+A=145\\B-A=21\end{cases}$，解得 $A=62$，$B=83$，

又函数周期为 30，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$，

可得 $H(t)=62\sin(\frac{\pi}{15}t+\varphi)+83$，

又 $H(0)=62\sin(\frac{\pi}{15}\times 0+\varphi)+83=21$，

所以 $\sin\varphi=-1$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

所以摩天轮转动一周的解析式为：$H(t)=62\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2})+83$，$0\leqslant t\leqslant 30$；

（2）$H(t)=62\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2})+83=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$，

所以 $-62\cos\frac{\pi}{15}t+83=52$，$\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$，

所以 $t=5$；

（3）由题意知，经过 t 分钟后游客甲距离地面高度解析式为 $H_{甲}=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$，

乙与甲间隔的时间为$\frac{30}{36}\times 6=5$ 分钟，

所以乙距离地面高度解析式为 $H_{乙}=-62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)+83$，$5\leqslant t\leqslant 30$，

所以两人离地面的高度差 $h=H_{甲}-H_{乙}=-62\cos\frac{\pi}{15}t+62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)=62\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6})$，

因为 $5\leqslant t\leqslant 30$，所以$\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}]$，

令 $h<0$ 得，$\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\in[\pi,\ \frac{11\pi}{6}]$，即 $t\in[\frac{35}{2},\ 30]$

所以在甲进入后的$\frac{35}{2}$分钟以后游客乙进入座舱后距离地面高度能超过游客甲．

22．（12 分）在锐角△ABC 中，角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，设向量$\vec{m}=(a+c,\ a)$，$\vec{n}=(a-c,\ b)$，

且$\vec{m}\perp\vec{n}$.

（1）求证：$C=2A$；

（2）求$\frac{b}{a}+(\frac{2a}{c})^2$的取值范围．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）根据余弦定理，正弦定理，解三角方程，即可证明；

（2）根据正弦定理将边转化为角，从而构建关于角 A 的函数，再利用换元法及对勾函数的性质，即可求解．

【解答】解：（1）证明：∵$\vec{m}=(a+c,\ a)$，$\vec{n}=(a-c,\ b)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$，

∴$\vec{m}\cdot\vec{n}=a^2-c^2+ab=0$，

又$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C$，∴$a^2-c^2=2ab\cos C-b^2$，

∴$2ab\cos C-b^2+ab=0$，

∴$2a\cos C-b+a=0$，∴由正弦定理可得：

$2\sin A\cos C-\sin B+\sin A=0$，

∴$2\sin A\cos C-\sin(A+C)+\sin A=0$，

∴$\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin(-A)$，

∴$\sin(A-C)=\sin(-A)$，又 A，C 为三角形的内角，

∴$A-C=-A$，∴$C=2A$；

（2）根据正弦定理可得$\frac{b}{a}+(\frac{2a}{c})^2=\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{4\sin^2 A}{\sin^2 C}$

$=\frac{\sin(\pi-3A)}{\sin A}+\frac{4\sin^2A}{\sin^2 2A}=\frac{\sin 3A}{\sin A}+\frac{4\sin^2A}{4\sin^2A\cos^2A}$

$=\frac{\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A}{\sin A}+\frac{1}{\cos^2A}$

$=\cos 2A+2\cos^2A+\frac{1}{\cos^2A}$

$=4\cos^2A+\frac{1}{\cos^2A}-1$，

又△ABC 为锐角三角形，

$\therefore\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<B=\pi-3A<\frac{\pi}{2}\\0<C=2A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore A\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore\cos^2A\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，

设 $t=\cos^2A\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，

$\therefore 4\cos^2A+\frac{1}{\cos^2A}-1=4t+\frac{1}{t}-1$，$t\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，

由根据对勾函数可知 $y=4t+\frac{1}{t}-1$在 $t\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ 上单调递增，

$\therefore y\in\left(3,\ \frac{10}{3}\right)$，

$\therefore\frac{b}{a}+\left(\frac{2a}{c}\right)^2$的取值范围为$\left(3,\ \frac{10}{3}\right)$.