

2024 年江苏省南通市、泰州市、扬州市高考数学二调试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的夹角为 120° ，则 $(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 =$ ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

2. (5 分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，下列关系正确的是 ()

- A. $AD \perp B_1C$ B. $A_1D \perp BD$ C. $AC_1 \perp A_1C$ D. $AC_1 \perp CD_1$

3. (5 分) 一组样本数据删除一个数后，得到一组新数据：10, 21, 25, 35, 36, 40. 若这两组数据的中位数相等，则删除的数为 ()

- A. 25 B. 30 C. 35 D. 40

4. (5 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2^{-x}, & x \leq 3, \\ f(\frac{x}{2}), & x > 3, \end{cases}$ 则 $f(\log_2 9) =$ ()

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{80}{9}$ D. $\frac{82}{9}$

5. (5 分) 设 $x > 0, y > 0$, $\frac{1}{x} + 2y = 2$, 则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ D. 3

6. (5 分) 若函数 $f(x) = e^{ax} + 2x$ ($x \in \mathbf{R}$) 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > -2$ B. $a < -2$ C. $a > -\frac{1}{2}$ D. $a < -\frac{1}{2}$

7. (5 分) 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , C 的准线与 x 轴交于点 A , 过 A 的直线与 C 在第一象限的交点为 M, N , 且 $|FM| = 3|FN|$, 则直线 MN 的斜率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

8. (5 分) 若 $\cos \alpha, \cos(\alpha - \frac{\pi}{6}), \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 成等比数列，则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (6 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的右焦点为 F , 直线 $l: x + by = 0$ 是 C 的一条渐近

线， P 是 l 上一点，则（ ）

A. C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$

B. C 的离心率为 $\sqrt{6}$

C. $|PF|$ 的最小值为 2

D. 直线 PF 的斜率不等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(多选) 10. (6 分) 已知 $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$. 若随机事件 A, B 相互独立, 则（ ）

A. $P(B) = \frac{1}{3}$

B. $P(AB) = \frac{1}{20}$

C. $P(\bar{A}|B) = \frac{4}{5}$

D. $P(A+\bar{B}) = \frac{4}{5}$

(多选) 11. (6 分) 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 R , $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, $g(0) = g(2) = 1$, $g(x+y) + g(x-y) = g(x)f(y)$, 则（ ）

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $g(x)$ 为偶函数

C. $g(-1-x) = -g(-1+x)$

D. $g(1-x) = g(1+x)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. (5 分) 设 $m \in R$, i 为虚数单位. 若集合 $A = \{1, 2m + (m-1)i\}$, $B = \{-2i, 1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 $m =$ _____.

13. (5 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{7}$, $AC = 1$, M 为 BC 的中点, $\angle MAC = 60^\circ$, 则 $AM =$ _____.

14. (5 分) 若正四棱锥的棱长均为 2, 则以所有棱的中点为顶点的十面体的体积为_____, 该十面体的外接球的表面积为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 甲公司推出一种新产品, 为了解某地区消费者对新产品的满意度, 从中随机调查了 1000 名消费者, 得到下表:

	满意	不满意
男	440	60
女	460	40

(1) 能否有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关;

(2) 若用频率估计概率, 从该地区消费者中随机选取 3 人, 用 X 表示不满意的人数, 求 X 的分布列与数学期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01
-----------------	-----	------	------

k	2.706	3.841	6.635
-----	-------	-------	-------

16. (15 分) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$). 已知 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有最大值无最小值, 求实数 m 的取值范围;

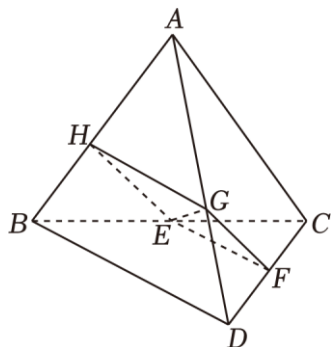
(2) 设 l 为曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处的切线, 证明: l 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点.

17. (15 分) 如图, 边长为 4 的两个正三角形 ABC, BCD 所在平面互相垂直, E, F 分别为 BC, CD 的中点, 点 G 在棱 AD 上, $AG = 2GD$, 直线 AB 与平面 EFG 相交于点 H .

(1) 从下面两个结论中选一个证明: ① $BD \parallel GH$; ② 直线 HE, GF, AC 相交于一点;

注: 若两个问题均作答, 则按第一个计分.

(2) 求直线 BD 与平面 EFG 的距离.



18. (17 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, $a_1 = -1$.

(1) 证明: 数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+4}}{n(n+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和;

(3) 是否存在正整数 p, q ($p < 6 < q$), 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列? 若存在, 求 p, q ; 若不存在, 说明理由.

19. (17 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 直线 l

与 Γ 相切, 与圆 $O: x^2 + y^2 = 3a^2$ 相交于 A, B 两点. 当 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = 2\sqrt{6}$.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 对于给定的点集 M, N , 若 M 中的每个点在 N 中都存在距离最小的点, 且所有最小距离的最大值存在, 则记此最大值为 $d(M, N)$.

(i) 若 M, N 分别为线段 AB 与圆 O , P 为圆 O 上一点, 当 $\triangle PAB$ 的面积最大时, 求 $d(M, N)$;

（ii）若 $d(M, N)$, $d(N, M)$ 均存在，记两者中的较大者为 $H(M, N)$. 已知 $H(X, Y)$, $H(Y, Z)$, $H(X, Z)$ 均存在，证明： $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.

2024 年江苏省南通市、泰州市、扬州市高考数学二调试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的夹角为 120° ，则 $(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 =$ ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】A

【分析】结合平面向量数量积的运算求解.

【解答】解：已知单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的夹角为 120° ，

$$\text{则 } |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_2^2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1^2 = -2.$$

故选：A.

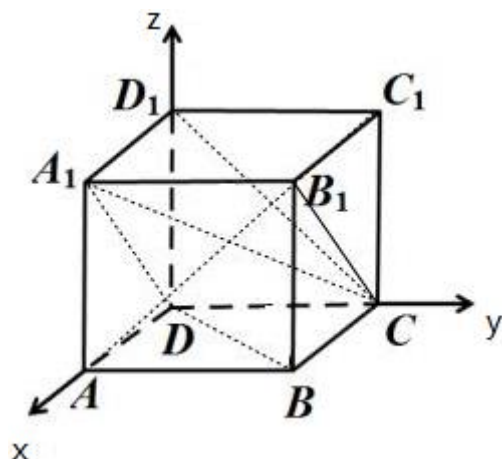
2. (5 分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，下列关系正确的是 ()

- A. $AD \perp B_1C$ B. $A_1D \perp BD$ C. $AC_1 \perp A_1C$ D. $AC_1 \perp CD_1$

【答案】D

【分析】在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，利用向量法求解.

【解答】解：在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，



设 $AB=2$ ，则 $A(2, 0, 0)$ ， $D(0, 0, 0)$ ， $B_1(2, 2, 2)$ ， $C(0, 2, 0)$ ，

$A_1(2, 0, 2)$ ， $B(2, 2, 0)$ ， $C_1(0, 2, 2)$ ， $D_1(0, 0, 2)$ ，

$$\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{B_1C} = (-2, 0, -2), \overrightarrow{A_1D} = (-2, 0, -2), \overrightarrow{BD} = (-2, -2, 0), \overrightarrow{AC_1} = (-2, 2, 2), \overrightarrow{A_1C} = (-2, 2, -2), \overrightarrow{CD_1} = (0, -2, 2),$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 4, \therefore AD \text{ 与 } B_1C \text{ 不垂直, 故 } A \text{ 错误;}$$

$$\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BD} = 4, \therefore A_1D \text{ 与 } BD \text{ 不垂直, 故 } B \text{ 错误;}$$

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 4, \therefore AC_1 \text{ 与 } A_1C \text{ 不垂直, 故 } C \text{ 错误;}$$

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0, \therefore AC_1 \text{ 与 } CD_1 \text{ 垂直, 故 } D \text{ 正确.}$$

故选: D.

3. (5 分) 一组样本数据删除一个数后, 得到一组新数据: 10, 21, 25, 35, 36, 40. 若这两组数据的中位数相等, 则删除的数为 ()

A. 25 B. 30 C. 35 D. 40

【答案】B

【分析】根据已知条件, 结合中位数的定义, 即可求解.

【解答】解: 新数据: 10, 21, 25, 35, 36, 40, 其中位数为: $\frac{25+35}{2} = 30$,

对于 A, 若删除的数为 25, 原始样本数据的中位数为 25, 故 A 错误;

对于 B, 若删除的数为 30, 原始样本数据的中位数为 30, 故 B 正确;

对于 C, 若删除的数为 35, 原始样本数据的中位数为 35, 故 C 错误;

对于 D, 若删除的数为 40, 原始样本数据的中位数为 35, 故 D 错误.

故选: B.

$$4. (5 \text{ 分}) \text{ 已知函数 } f(x) = \begin{cases} 2^x + 2^{-x}, & x \leq 3, \\ f(\frac{x}{2}), & x > 3, \end{cases} \text{ 则 } f(\log_2 9) = ()$$

A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{80}{9}$ D. $\frac{82}{9}$

【答案】B

【分析】由已知函数解析式, 结合对数恒等式即可求解.

【解答】解: 因为 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2^{-x}, & x \leq 3, \\ f(\frac{x}{2}), & x > 3, \end{cases}$

$$\text{则 } f(\log_2 9) = f\left(\frac{1}{2} \log_2 9\right) = f(\log_2 3) = 2^{\log_2 3} + \frac{1}{2^{\log_2 3}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

故选：B.

5. (5分) 设 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + 2y = 2$, 则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ D. 3

【答案】C

【分析】由已知利用乘1法，结合基本不等式即可求解.

【解答】解：因为 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + 2y = 2$,

$$\text{则 } x + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 2y\right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{xy} + 2xy\right) \geq \frac{1}{2} (3 + 2\sqrt{2}),$$

当且仅当 $2xy = \frac{1}{xy}$, 即 $xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时 $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, y = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号.

故选：C.

6. (5分) 若函数 $f(x) = e^{ax} + 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > -2$ B. $a < -2$ C. $a > -\frac{1}{2}$ D. $a < -\frac{1}{2}$

【答案】B

【分析】求出函数的导数，求出极值点，利用极值点大于0，求出 a 的范围.

【解答】解：函数 $f(x) = e^{ax} + 2x$ ($x \in \mathbb{R}$),

$$\text{可得 } f'(x) = ae^{ax} + 2, \text{ 令 } f'(x) = ae^{ax} + 2 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{a} \ln\left(-\frac{2}{a}\right)$$

函数 $f(x) = e^{ax} + 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) 有大于零的极值点，

$$\therefore \frac{1}{a} \ln\left(-\frac{2}{a}\right) > 0, \text{ 解得 } a < -2.$$

故选：B.

7. (5分) 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , C 的准线与 x 轴交于点 A , 过 A 的直线与 C 在第一象限的交点为 M, N , 且 $|FM| = 3|FN|$, 则直线 MN 的斜率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】根据题意可设 MN 直线方程为 $y = k(x+1)$, $k > 0$, 联立直线与抛物线方程，通过根与系数的关系及抛物线的焦半径公式，建立方程，即可求解.

【解答】解：根据题意可得物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$,

$\therefore A$ 为 $(-1, 0)$, 设 MN 直线方程为 $y=k(x+1)$, $k>0$,

$$\text{联立} \begin{cases} y=k(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}, \text{ 可得 } k^2x + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0,$$

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $0 < x_2 < x_1$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4-2k^2}{k^2}, \quad x_1x_2 = 1, \quad \text{又 } |FM| = 3|FN|,$$

$$\therefore \frac{p}{2} + x_1 = 3\left(\frac{p}{2} + x_2\right), \quad \text{又 } p=2,$$

$$\therefore 1+x_1 = 3+3x_2, \quad \therefore x_1 = 2+3x_2,$$

$$\therefore x_1x_2 = (2+3x_2)x_2 = 1, \quad \text{又 } 0 < x_2 < x_1,$$

$$\text{解得 } x_2 = \frac{1}{3}, \quad \therefore x_1 = 3,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4-2k^2}{k^2} = 3 + \frac{1}{3}, \quad \text{又 } k>0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: A.

8. (5分) 若 $\cos\alpha$, $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 成等比数列, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{4}$

【答案】B

【分析】根据已知条件, 结合等比数列的性质, 以及三角函数的恒等变换公式, 即可求解.

【解答】解: $\cos\alpha$, $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 成等比数列,

$$\text{则 } \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}), \quad \text{即 } \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\text{化简整理可得, } \frac{1}{4}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha, \quad \text{即 } \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故选: B.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

(多选) 9. (6分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b>0)$ 的右焦点为 F , 直线 $l: x+by=0$ 是 C 的一条渐近

线， P 是 l 上一点，则（ ）

A. C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$

B. C 的离心率为 $\sqrt{6}$

C. $|PF|$ 的最小值为 2

D. 直线 PF 的斜率不等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 AD

【分析】 由双曲线的性质，结合双曲线离心率及渐近线方程的求法逐一判断.

【解答】 解：已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$,

则双曲线的渐近线方程为 $x = \pm \frac{2}{b}y$,

又直线 $l: x + by = 0$ 是 C 的一条渐近线，

则 $\frac{2}{b} = b$,

又 $b > 0$,

所以 $b = \sqrt{2}$,

即双曲线方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$,

对于选项 A, C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$,

即选项 A 正确;

对于选项 B, $c = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$,

则 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,

即选项 B 错误;

对于选项 C, 由已知有 $F(\sqrt{6}, 0)$,

则 $|PF|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2}$,

即选项 C 错误;

对于选项 D, 双曲线两条渐近线的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当直线 PF 的斜率等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $PF \parallel l$,

则直线 PF 的斜率不等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即选项 D 正确.

故答案为: AD .

(多选) 10. (6分) 已知 $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$. 若随机事件 A, B 相互独立, 则 ()

A. $P(B) = \frac{1}{3}$ B. $P(AB) = \frac{1}{20}$ C. $P(\bar{A}|B) = \frac{4}{5}$ D. $P(A+\bar{B}) = \frac{4}{5}$

【答案】 BCD

【分析】 先利用条件概率求出 $P(AB)$, 再利用独立事件的概率乘法公式求出 $P(B)$, 进而判断各个选项即可.

【解答】 解: 对于 B , $\because P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$,

$$\therefore P(AB) = P(B|A) P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}, \text{ 故 } B \text{ 正确;}$$

对于 A , $\because P(A) = \frac{1}{5}$, $P(AB) = \frac{1}{20}$, 且随机事件 A, B 相互独立,

$$\therefore P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}, \text{ 故 } A \text{ 错误;}$$

对于 C , $\because P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$,

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{4}{5},$$

$\because$ 随机事件 A, B 相互独立, $\therefore$ 随机事件 $\bar{A}, B$ 相互独立,

$$\therefore P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \text{ 故 } C \text{ 正确;}$$

对于 D , $\because$ 随机事件 A, B 相互独立, $\therefore$ 随机事件 $A, \bar{B}$ 相互独立,

$$\therefore P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore P(A\bar{B}) = P(A) P(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20},$$

$$\therefore P(A+\bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5}, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

故选: BCD.

(多选) 11. (6分) 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, $g(0) = g(2) = 1$, $g(x+y) + g(x-y) = g(x)f(y)$, 则 ()

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $g(x)$ 为偶函数

C. $g(-1-x) = -g(-1+x)$

D. $g(1-x) = g(1+x)$

【答案】ACD

【分析】根据题意, 对 x 和 y 进行恰当赋值, 逐一判断选项即可.

【解答】解: 对于 A, 因为 $g(x+y) + g(x-y) = g(x)f(y)$,

所以令 $x=0$, 得 $g(y) + g(-y) = g(0)f(y) = f(y)$,

即 $f(x) = g(x) + g(-x)$,

$f(-x) = g(-x) + g(x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=0, y=2$ 得 $g(2) + g(-2) = g(0)f(2) = f(2) = 0$,

所以 $g(-2) = -g(2) = -1$, 所以 $g(x)$ 不是偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 令 $x=y=-1$, 则 $g(-2) + g(0) = g(-1)f(-1) = 0$,

令 $x=y=1$, 则 $g(2) + g(0) = g(1)f(1) = 2$,

所以 $g(1), f(1) \neq 0$, 所以 $f(-1) \neq 0$,

所以 $g(-1) = 0$,

令 $x=-1$, 得 $g(-1+y) + g(-1-y) = g(-1)f(y) = 0$,

化简得 $g(-1+y) = -g(-1-y)$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $y=2$, 得 $g(x+2) + g(x-2) = 0$,

而 $g(1-x) = -g(x-3) = g(1+x)$, 故 D 正确.

故选: ACD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. (5分) 设 $m \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位. 若集合 $A = \{1, 2m + (m-1)i\}$, $B = \{-2i, 1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 $m =$ 1.

【答案】1.

【分析】由 $A \subseteq B$ 得 $2m + (m-1)i = 2$, 可得结果.

【解答】解: 由题意得 $2m + (m-1)i = -2i$ 不成立舍去, 则 $2m + (m-1)i = 2$,

所以 $\begin{cases} 2m=2 \\ m-1=0 \end{cases}$, 解得 $m=1$.

故答案为：1.

13. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{7}$, $AC=1$, M 为 BC 的中点, $\angle MAC=60^\circ$, 则 $AM=\frac{3}{2}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$.

【分析】设 $AM=x$, $BM=y$, 利用 $\cos\angle AMB+\cos\angle AMC=0$ 可得 $x^2+y^2=4$, 在 $\triangle AMC$ 中, 由余弦定理得 $y^2=x^2+1-x$, 联立即可解得 x .

【解答】解: 设 $AM=x$, $BM=y$, 则 $CM=y$,

在 $\triangle ABM$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos\angle AMB=\frac{x^2+y^2-7}{2xy}$,

在 $\triangle ACM$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos\angle AMC=\frac{x^2+y^2-1}{2xy}$,

因为 $\angle AMB+\angle AMC=180^\circ$, 所以 $\cos\angle AMB+\cos\angle AMC=0$,

即 $\frac{x^2+y^2-7}{2xy}+\frac{x^2+y^2-1}{2xy}=0$, 所以 $x^2+y^2=4$, ①

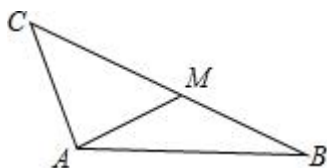
在 $\triangle AMC$ 中, 由余弦定理, 得 $MC^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos\angle MAC$,

即 $y^2=x^2+1-x$, ②

由①②可得: $2x^2-x-3=0$, 解得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$ (舍去),

即 $AM=\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

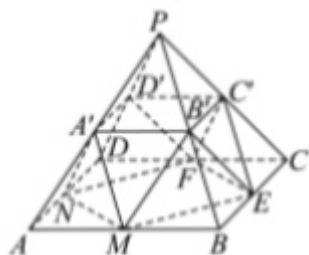


14. (5分) 若正四棱锥的棱长均为2, 则以所有棱的中点为顶点的十面体的体积为 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, 该十面体的外接球的表面积为 4π .

【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 4π .

【分析】根据几何法求出十面体的体积; 再建立空间直角坐标系, 求出外接球的半径, 进而求出外接球的表面积.

【解答】解: 正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长为2, 点 A' , B' , C' , D' , E , F , M , N 是所在棱的中点, 如图,



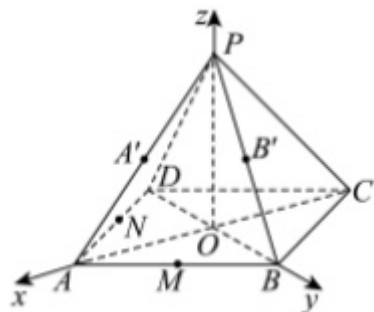
显然 $PB^2 + PD^2 = 8 = BD^2$ ，即有 $PB \perp PD$ ，则正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $\sqrt{2}$ ，

于是 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ， $V_{P-A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ，

$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ， A' 到平面 AMN 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $V_{A'-AMN} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ ，

所以所求十面体的体积为 $V = V_{P-ABCD} - V_{P-A'B'C'D'} - 4V_{A'-AMN} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$ ；

令 $AC \cap BD = O$ ，以直线 OA ， OB ， OP 分别为 x ， y ， z 轴建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $P(0, 0, \sqrt{2})$ ， $B(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $D(0, -\sqrt{2}, 0)$ ，则 $A'(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

$B'(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ， $N(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ，

设外接球球心 $O(x, y, z)$ ，半径 R ，

$$\text{则} \begin{cases} O'A' = R \\ O'B' = R \\ O'M = R \\ O'N = R \end{cases}, \text{ 因此} \begin{cases} (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 + (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = R^2 \\ x^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = R^2 \\ (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + z^2 = R^2 \\ (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + z^2 = R^2 \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ R^2=1 \end{cases}$$

所以十面体的外接球的表面积为 $S = 4\pi$ 。

故答案为： $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ； 4π 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 甲公司推出一种新产品，为了解某地区消费者对新产品的满意度，从中随机调查了 1000 名消

费者，得到下表：

	满意	不满意
男	440	60
女	460	40

(1) 能否有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关；

(2) 若用频率估计概率，从该地区消费者中随机选取 3 人，用 X 表示不满意的人数，求 X 的分布列与数学期望。

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n=a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01
k	2.706	3.841	6.635

【答案】(1) 有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关；

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

$$E(X) = 0.3.$$

【分析】(1) 计算 K^2 ，与临界值表比较，即可得出结论；

(2) 求得 X 的可能取值及对应概率，即可求得分布列和期望。

【解答】解：(1) $K^2 = \frac{1000 \times (440 \times 40 - 460 \times 60)^2}{900 \times 100 \times 500 \times 500} \approx 4.44 > 3.841$,

所以有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关；

(2) 由题意可知，消费者对新产品满意的概率为 $\frac{9}{10}$ ，不满意的概率为 $\frac{1}{10}$ ，

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{9}{10} = \frac{27}{1000},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000},$$

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

$$E(X) = 0 \times \frac{729}{1000} + 1 \times \frac{243}{1000} + 2 \times \frac{27}{1000} + 3 \times \frac{1}{1000} = 0.3.$$

16. (15 分) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$). 已知 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有最大值无最小值, 求实数 m 的取值范围;

(2) 设 l 为曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处的切线, 证明: l 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点.

【答案】(1) $(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$; (2) 证明见解答.

【分析】(1) 由题意可得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 进而可得 ω , 代入 $x = -\frac{\pi}{4}$, 求得 φ , 结合正弦函数的图象和最值, 可得所求取值范围;

(2) 求得 $f(x)$ 的导数和切线 l 的方程, 令 $g(x) = f(x) - 2x - \frac{\pi}{3}$, 求得导数和单调性、零点, 得出结论.

【解答】解: (1) 由 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$,

可得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \pi$, 可得 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

又 $\sin(2 \times (-\frac{\pi}{4}) + \varphi) = -\cos\varphi = -\frac{1}{2}$,

由 $0 < \varphi < \pi$, 可得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

则 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

由 $f(-\frac{\pi}{6}) = 0$, $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = 1$, $f(2 \times \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = -1$,

且 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有最大值无最小值, 可得 m 的取值范围是 $(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$;

(2) 证明: $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的导数为 $f'(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$,

可得曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处的切线的斜率为 $k = 2\cos(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 2$,

切点为 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$, 切线 l 的方程为 $y = 2x + \frac{\pi}{3}$.

设 $g(x) = f(x) - 2x - \frac{\pi}{3} = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - (2x + \frac{\pi}{3})$,

则 $g'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \leq 0$, 可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减,

而 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 可得 $f(x) - 2x - \frac{\pi}{3} = 0$ 有唯一解 $x = -\frac{\pi}{6}$,

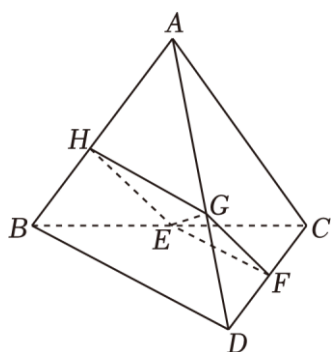
即 l 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一的公共点.

17. (15 分) 如图, 边长为 4 的两个正三角形 ABC , BCD 所在平面互相垂直, E , F 分别为 BC , CD 的中点, 点 G 在棱 AD 上, $AG=2GD$, 直线 AB 与平面 EFG 相交于点 H .

(1) 从下面两个结论中选一个证明: ① $BD \parallel GH$; ② 直线 HE , GF , AC 相交于一点;

注: 若两个问题均作答, 则按第一个计分.

(2) 求直线 BD 与平面 EFG 的距离.



【答案】 (1) 证明过程请见解答; (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【分析】 (1) 选①, 易知 $EF \parallel BD$, 从而得 $BD \parallel$ 平面 $EFGH$, 再由线面平行的性质定理, 即可得 $BD \parallel GH$;

选②, 易知 GF 与 AC 不平行, 设 $GF \cap AC = K$, 根据点、线、面的位置关系, 可证 $K \in HE$, 从而得证;

(2) 由 $BD \parallel$ 平面 $EFGH$, 将问题转化为求点 B 到平面 EFG 的距离, 再利用向量法求解即可.

【解答】 (1) 证明: 选①, 因为 E , F 分别为 BC , CD 的中点,

所以 $EF \parallel BD$,

又 $EF \subset$ 平面 $EFGH$, $BD \not\subset$ 平面 $EFGH$,

所以 $BD \parallel$ 平面 $EFGH$,

因为 $BD \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $EFGH = GH$,

所以 $BD \parallel GH$.

选②, 因为 $AG = 2GD$, F 是 CD 的中点,

所以 GF 与 AC 不平行,

设 $GF \cap AC = K$, 则 $K \in AC$, $K \in GF$,

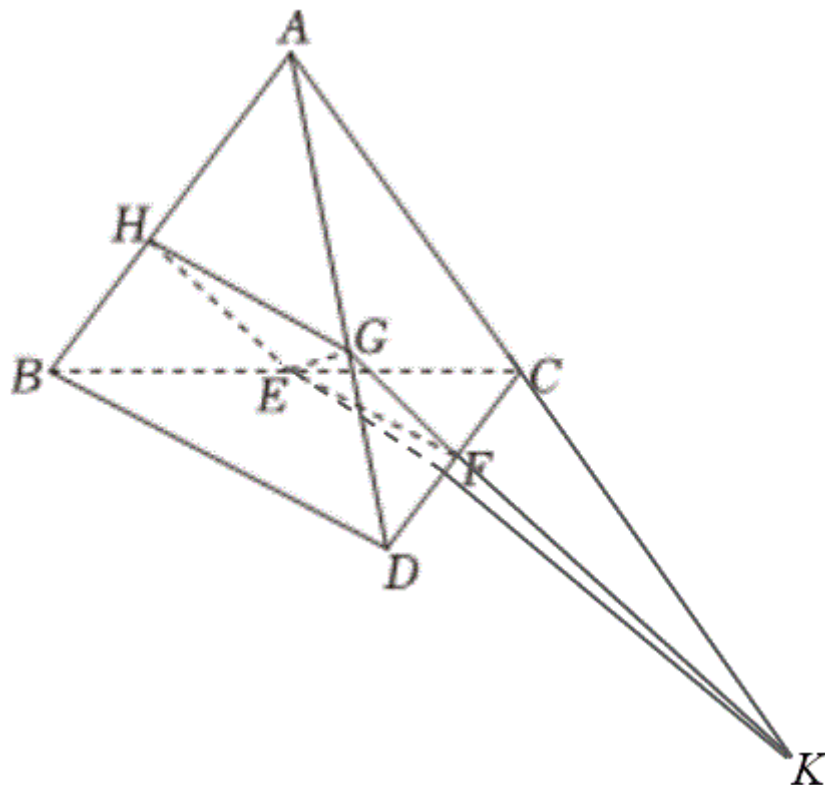
因为 $AC \subset$ 平面 ABC , $GF \subset$ 平面 EFG ,

所以 $K \in \text{平面 } ABC$, $K \in \text{平面 } EFG$,

又 $\text{平面 } ABC \cap \text{平面 } EFG = HE$,

所以 $K \in HE$,

所以直线 HE , GF , AC 相交于一点.



(2) 解: 若 (1) 中选①, 由 (1) 知, $BD \parallel \text{平面 } EFGH$, 知点 B 到平面 EFG 的距离即为直线 BD 与平面 EFG 的距离,

若 (1) 中选②, 因为 E , F 分别为 BC , CD 的中点,

所以 $EF \parallel BD$,

又 $EF \subset \text{平面 } EFGH$, $BD \not\subset \text{平面 } EFGH$,

所以 $BD \parallel \text{平面 } EFGH$,

所以点 B 到平面 EFG 的距离即为直线 BD 与平面 EFG 的距离,

连接 EA , ED ,

因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 均为正三角形, 且 E 是 BC 的中点,

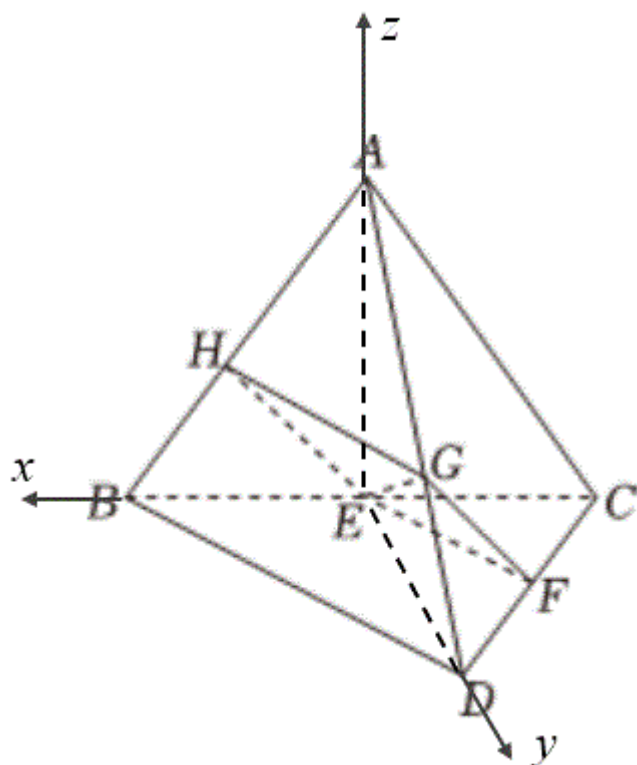
所以 $EA \perp BC$, $ED \perp BC$,

又 $\text{平面 } ABC \perp \text{平面 } BCD$, $\text{平面 } ABC \cap \text{平面 } BCD = BC$, $EA \perp BC$, $EA \subset \text{平面 } ABC$,

所以 $EA \perp \text{平面 } BCD$,

因为 $ED \subset \text{平面 } BCD$, 所以 $EA \perp ED$,

故以 E 为坐标原点， EB ， ED ， EA 所在直线分别为 x ， y ， z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(2, 0, 0)$ ， $F(-1, \sqrt{3}, 0)$ ， $G(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，

所以 $\vec{EB} = (2, 0, 0)$ ， $\vec{EF} = (-1, \sqrt{3}, 0)$ ， $\vec{EG} = (0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EF} = -x + \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EG} = \frac{4\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}$$

令 $y=1$ ，则 $x=\sqrt{3}$ ， $z=-2$ ，所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -2)$ ，

所以点 B 到平面 EFG 的距离为 $\frac{|\vec{EB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|2\sqrt{3}|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

故直线 BD 与平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

18. (17 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = a_n - 4a_{n+1}$ ， $a_1 = -1$ 。

(1) 证明：数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列；

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+4}}{n(n+1)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和；

(3) 是否存在正整数 p, q ($p < 6 < q$)，使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列？若存在，求 p, q ；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) 证明见解答; (2) $\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+3}}$; (3) 存在 $p=5, q=8$, 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列.

【分析】 (1) 由数列的通项与前 n 项和的关系, 结合等比数列的定义, 可得证明:

(2) 由等比数列的通项公式和数列的裂项相消求和, 化简可得所求和;

(3) 假设存在正整数 p, q ($p < 6 < q$), 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列, 由等差数列的中项性质和数列的单调性, 可得结论.

【解答】 解: (1) 证明: 由 $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, $a_1 = -1$,

可得 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = a_1 - 4a_2$, 解得 $a_2 = 0$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, 可得 $S_{n-1} = a_{n-1} - 4a_n$,

两式相减可得 $a_n = S_n - S_{n-1} = a_n - 4a_{n+1} - a_{n-1} + 4a_n$,

化为 $4a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$,

即有 $2(2a_{n+1} - a_n) = 2a_n - a_{n-1}$,

则数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 首项为 $2a_2 - a_1 = 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列;

(2) 由 (1) 可得 $2a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

即为 $2^n a_{n+1} - 2^{n-1} a_n = 1$,

则数列 $\{2^{n-1} a_n\}$ 是首项为 -1 , 公差为 1 的等差数列, 即有 $2^{n-1} a_n = -1 + n - 1 = n - 2$,

则 $a_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}$, $b_n = \frac{a_{n+4}}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+3}} = \frac{1}{n \cdot 2^{n+2}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+3}}$,

可得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{96} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^{n+2}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+3}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+3}}$;

(3) 假设存在正整数 p, q ($p < 6 < q$), 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列.

由 $S_n = a_n - 4a_{n+1} = \frac{n-2}{2^{n-1}} - \frac{4(n-1)}{2^n} = -\frac{n}{2^{n-1}}$,

由 S_p, S_6, S_q 成等差数列, 可得 $2S_6 = S_p + S_q$, 即 $\frac{p}{2^{p-1}} + \frac{q}{2^{q-1}} = \frac{3}{8}$,

当 $p=1, 2, 3, 4$ 时, $\frac{p}{2^{p-1}} > \frac{3}{8}$, $\frac{p}{2^{p-1}} + \frac{q}{2^{q-1}} > \frac{3}{8}$,

当 $p=5$ 时, $\frac{p}{2^{p-1}} = \frac{5}{16}$, $\frac{q}{2^{q-1}} = \frac{1}{16}$,

$n \geq 6$ 时, $\frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1-n}{2^n} < 0$, 即 $\{\frac{n}{2^{n-1}}\} (n \geq 6)$ 是单调递减,

又 $\frac{8}{2^7} = \frac{1}{16}$, 所以 $q=8$,

所以存在 $p=5, q=8$, 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列.

19. (17 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 直线 l

与 Γ 相切, 与圆 $O: x^2 + y^2 = 3a^2$ 相交于 A, B 两点. 当 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = 2\sqrt{6}$.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 对于给定的点集 M, N , 若 M 中的每个点在 N 中都存在距离最小的点, 且所有最小距离的最大值存在, 则记此最大值为 $d(M, N)$.

(i) 若 M, N 分别为线段 AB 与圆 O , P 为圆 O 上一点, 当 $\triangle PAB$ 的面积最大时, 求 $d(M, N)$;

(ii) 若 $d(M, N), d(N, M)$ 均存在, 记两者中的较大者为 $H(M, N)$. 已知 $H(X, Y), H(Y, Z), H(X, Z)$ 均存在, 证明: $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$;

(2) (i) $\frac{3}{2}$; (ii) 证明见解析.

【分析】 (1) 根据给定条件, 求出 a , 再结合离心率求出 b 即可;

(2) (i) 在直线 l 的斜率存在时, 设出直线方程并与椭圆方程联立, 借助判别式求出圆心 O 到 l 的距离, 列出 $\triangle PAB$ 的面积关系求解, 再验证斜率不存在的情况;

(ii) 利用新定义, 结合对称性推理即可.

【解答】 解: (1) 当 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = 2\sqrt{3a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{6}$,

解得 $a = \sqrt{3}$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3 - b^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 解得 $b^2 = 1$,

所以 Γ 的方程为: $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) (i) 当 l 的斜率存在时, 设 l 的方程为: $y = kx + m$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$, 消去 y 得: $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$,

由直线 l 与椭圆 Γ 相切, 得 $\Delta = (6km)^2 - 4(3k^2 + 1)(3m^2 - 3) = 0$, 整理得 $m^2 = 3k^2 + 1$,

于是圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3k^2 + 1}{k^2 + 1}} = \sqrt{3 - \frac{2}{k^2 + 1}} \in [1, 3)$,

则 $\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB} \leq \frac{1}{2}(d+3) \cdot |AB| = \frac{1}{2}(d+3) \cdot 2\sqrt{9-d^2} = \sqrt{(3-d)(d+3)^3}$,

设 $f(d) = (3-d)(d+3)^3$, $1 \leq d < \sqrt{3}$, 求导得 $f'(d) = 2(d+3)^2(3-2d)$,

当 $1 \leq d < \frac{3}{2}$ 时, $f'(d) > 0$, 函数 $f(d)$ 单调递增, 当 $\frac{3}{2} < d < \sqrt{3}$ 时, $f'(d) < 0$, 函数 $f(d)$ 单调递减,

因此当 $d = \frac{3}{2}$ 时, $f(d)$ 取得最大值, 此时 $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$,

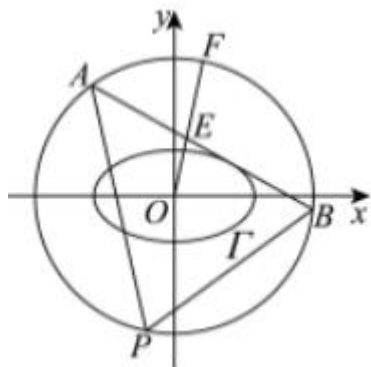
当 l 的斜率不存在时, 由 (1) 知, $S \leq \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+3) \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$,

由 $(\frac{9\sqrt{3}}{4})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = \frac{115}{16} - 4\sqrt{3} > 7 - 4\sqrt{3} > 0$,

得 $\frac{27\sqrt{3}}{4} > 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$, 则 $d = \frac{3}{2}$,

对于线段 AB 上任意点 E , 连接 OE 并延长与圆 O 交于点 F , 则 F 是圆上与 E 最近的点,

当 E 为线段 AB 的中点时, EF 取得最大值 $\frac{3}{2}$, 所以 $d(M, N) = \frac{3}{2}$.



(ii) 因为 $H(X, Y)$, $H(Y, Z)$, $H(X, Z)$ 均存在,

设点 $X_1, X_2 \in X$, $Y_1, Y_2 \in Y$, $Z_1, Z_2 \in Z$, 且 $H(X, Z) = |X_1Z_1|$, $H(Y, Z) = |Y_1Z_2|$, $H(X, Y) = |X_2Y_2|$,

设 Y_2 是集合 Y 中到 X_2 的最近点, 根据对称性, 不妨设 $H(X, Y) = d(X, Y) = |X_2Y_2|$,

令点 X_2 到集合 Z 的最近点为 Z_3 , 点 Z_3 到集合 Y 的最近点为 Y_3 ,

因为 $|X_1Z_1|$ 是集合 X 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值, 则 $|X_1Z_1| \geq |X_2Z_3|$,

因为 $|Y_1Z_2|$ 是集合 Y 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值, 则 $|Y_1Z_2| \geq |Y_3Z_3|$,

因此 $H(X, Z) + H(Y, Z) = |X_1Z_1| + |Y_1Z_2| \geq |X_2Z_3| + |Y_3Z_3|$,

而在坐标平面中, $|X_2Z_3| + |Y_3Z_3| \geq |X_2Y_3|$,

又点 Y_2 是集合 Y 中到点 X_2 的最近点, 则 $|X_2Y_3| \geq |X_2Y_2|$,

所以 $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.