

第二章 一元二次函数、方程和不等式全章综合测试卷-提高篇

参考答案与试题解析

一. 选择题（共 8 小题，满分 40 分，每小题 5 分）

1. （5 分）（2022 春•大名县校级期末）如果 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，则正确的是（ ）

A. 若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > b, c > d$ ，则 $a+c > b+d$

D. 若 $a > b, c > d$ ，则 $ac > bd$

【解题思路】根据已知条件，结合不等式的性质，以及特殊值法，即可求解.

【解答过程】解：对于 A，令 $a=1, b=-1$ ，满足 $a > b$ ，但 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故 A 错误，

对于 B，当 $c=0$ 时， $ac^2 = bc^2$ ，故 B 错误，

对于 C， $a > b, c > d$ ，

由不等式的可加性可得， $a+c > b+d$ ，故 C 正确，

对于 D，令 $a=1, b=-1, c=1, d=-1$ ，满足 $a > b, c > d$ ，但 $ac = bd$ ，故 D 错误.

故选：C.

2. （5 分）（2021 秋•肥城市期中）已知 $a \geq 0$ ，设 $P = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ ， $Q = \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1}$ ，则（ ）

A. $P > Q$

B. $P \geq Q$

C. $P < Q$

D. $P \leq Q$

【解题思路】由 $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+1} > \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$ 化简即可.

【解答过程】解： $\because \sqrt{a+2} + \sqrt{a+1} > \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$ ，

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}},$$

$$\text{即 } \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a},$$

即 $Q < P$ ，

故选：A.

3. （5 分）（2022 秋•浙江月考）已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 4 = x + y$ ，则 $x+y$ 的最小值为（ ）

A. $\sqrt{13} - 2$

B. 2

C. $2 + \sqrt{13}$

D. $2 + \sqrt{14}$

【解题思路】由题意可得 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = x + y - 4$ ，再将两边同时乘以 $x+y$ ，然后利用均值不

等式，可得关于整体 $x+y$ 的一元二次不等式，最后解不等式即可得解.

【解答过程】解： $\because$ 正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 4 = x + y$ ，

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = x + y - 4,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right)(x+y) = (x+y)^2 - 4(x+y),$$

$$\therefore (x+y)^2 - 4(x+y) = 5 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{4} = 9,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{y}{x} = \frac{4x}{y}, \text{ 即 } y=2x, \text{ 又 } \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 4 = x+y,$$

$$\therefore \text{当且仅当 } y=2x = \frac{4+2\sqrt{13}}{3} \text{ 时, 取得等号,}$$

$$\therefore (x+y)^2 - 4(x+y) \geq 9,$$

$$\text{解得 } x+y \geq 2+\sqrt{13},$$

$$\therefore x+y \text{ 的最小值为 } 2+\sqrt{13}.$$

故选：C.

4. (5分) (2021秋•商洛期末) 若函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 满足 $f(1) = 0$, $f(-1) = 8$, 则下列判断错误的是 ()

A. $b+c = -1$

B. $f(3) = 0$

C. $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=4$

D. $f(x)$ 的最小值为 -1

【解题思路】把 $f(1) = 0$, $f(-1) = 8$ 代入 $f(x) = x^2 + bx + c$ 可求得 b 、 c 值, 然后可解决此题.

【解答过程】解: 把 $f(1) = 0$, $f(-1) = 8$ 代入 $f(x) = x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} b+c+1=0 \\ -b+c=7 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 3, \therefore f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0, f(x) \text{ 图象的对称轴为直线 } x=2,$$

$$f(x) \text{ 的最小值为 } f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1.$$

由上分析可知 ABD 对, C 错.

故选：C.

5. (5分) (2021秋•寿光市校级月考) 若不等式 $(a-3)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$

B. $[-2, 2]$

C. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

D. $(-\infty, 2)$

【解题思路】讨论二项式系数为 0 时和不为 0 时对应不等式恒成立, 此时 a 的取值范围是什么.

【解答过程】解: 当 $a-3=0$, 即 $a=3$ 时不等式化为 $2x-4 < 0$, 解得 $x < 2$, 不满足题意;

$$\text{当 } a \neq 3 \text{ 时, 须满足 } \begin{cases} a-3 < 0 \\ \Delta = 4(a-2)^2 - 4 \times (a-3) \times (-4) < 0 \end{cases},$$

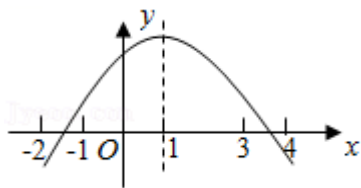
解得： $\begin{cases} a < 3 \\ -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$;

综上，实数 a 的取值范围是 $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

故选：C.

6. (5分) (2021•南山区校级开学) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=1$ ，下列结论：① $abc>0$ ；② $b^2-4ac>0$ ；③ $8a+c<0$ ；④ $5a+b+2c>0$ ，正确的有 ()



- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【解题思路】由已知结合二次函数的性质分别检验各选项即可判断.

【解答过程】解：由图象可知， $a < 0$ ， $-\frac{b}{2a} = 1$ ， $c > 0$ ，

所以 $b = -2a > 0$ ，

所以 $abc < 0$ ①错误；

由图象可知，抛物线与 x 轴有 2 个交点，故 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，②正确；

因为 $f(-2) = 4a - 2b + c = 8a + c < 0$ ，③正确；

因为 $f(-1) = a - b + c > 0$ ， $f(2) = 4a + 2b + c > 0$ ，

所以 $5a + b + 2c > 0$ ，④正确.

故选：B.

7. (5分) (2022 秋•江苏月考) 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+4>0$ 的解集为 $(-\infty, m) \cup (\frac{4}{m}, +\infty)$ ，其中 $m < 0$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 ()

- A. -4 B. 4 C. 5 D. 8

【解题思路】先根据答案在两根之外判定开口向上，即 $a > 0$ ，再根据韦达定理求出 $a=1$ ，

把 b 表示成 m 的函数，求出 b 的取值范围，最后求出 $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值即可.

【解答过程】解： $ax^2+bx+4>0$ 的解集为 $(-\infty, m) \cup (\frac{4}{m}, +\infty)$ ，

则 $a > 0$ ，且 $m, \frac{4}{m}$ 是方程 $ax^2+bx+4=0$ 的两根，

根据韦达定理 $m \cdot \frac{4}{m} = \frac{4}{a}$ ， $\therefore a=1$ ，

$$m + \frac{4}{m} = -\frac{b}{a} = -b, \quad b = -(m + \frac{4}{m}) \geq 4,$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{b} \geq 4 + \frac{4}{4} = 5,$$

故选：C.

8. (5分) (2021秋•让胡路区校级期末) 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\{x|-2<x<3\}$ ，则下列说法错误的是 ()

A. $a<0$

B. 不等式 $ax+c>0$ 的解集为 $\{x|x<6\}$

C. $a+b+c>0$

D. 不等式 $cx^2-bx+a<0$ 的解集为 $\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$

【解题思路】由题意得
$$\begin{cases} a<0 \\ -2+3=-\frac{b}{a} \\ -2\times 3=\frac{c}{a} \end{cases}$$
，从而可得 $b=-a$ ， $c=-6a$ ($a<0$)，再依次对

4个选项判断即可.

【解答过程】解：∵不等式 $ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\{x|-2<x<3\}$ ，

$$\therefore \begin{cases} a<0 \\ -2+3=-\frac{b}{a} \\ -2\times 3=\frac{c}{a} \end{cases}$$

即 $b=-a$ ， $c=-6a$ ($a<0$)，

故选项 A 中的说法正确，

不等式 $ax+c>0$ 可化为 $x-6<0$ ，

故其解集为 $\{x|x<6\}$ ，

故选项 B 中的说法正确，

$a+b+c=a-a-6a=-6a>0$ ，

故选项 C 中的说法正确，

不等式 $cx^2-bx+a<0$ 可化为 $6x^2-x-1<0$ ，

故其解集为 $\{x|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$ ，

故选项 D 中的说法错误，

故选：D.

二. 多选题 (共4小题, 满分20分, 每小题5分)

9. (5分) (2022秋•香洲区校级月考) 下列说法正确的是 ()

A. 若 $a>b$ ， $c<0$ ，则 $a^2c<b^2c$

B. 若 $a>b$ ， $c<0$ ，则 $a^3c<b^3c$

C. 若 $a<b<0$ ，则 $a^2>ab>b^2$

D. 函数 $y = \frac{|x|+5}{\sqrt{|x|+4}}$ 的最小值是 2

【解题思路】由已知结合不等式的性质及基本不等式分别检验各选项即可判断.

【解答过程】解：由 $a > b$ ，但 a^2 与 b^2 的大小无法确定，A 错误；

若 $a > b$ ，则 $a^3 > b^3$ ，

因为 $c < 0$ ，则 $a^3 c < b^3 c$ ，B 正确；

若 $a < b < 0$ ，则由不等式性质可得 $a^2 > ab > b^2$ 成立，C 正确；

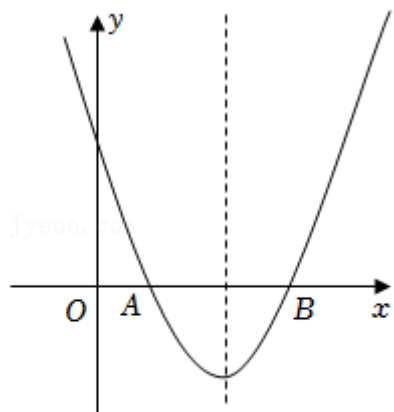
因为 $|x|+4 \geq 4$ ，

所以 $\sqrt{|x|+4} \geq 2$ ，

$$y = \frac{|x|+5}{\sqrt{|x|+4}} = \frac{|x|+4+1}{\sqrt{|x|+4}} = \sqrt{|x|+4} + \frac{1}{\sqrt{|x|+4}} \geq \frac{5}{2}, \text{ D 错误.}$$

故选：BC.

10. (5 分) (2022•连云区校级开学) 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 A (1, 0)，B (5, 0)，下列说法正确的是 ()



- A. $c < 0$
 B. $b^2 - 4ac < 0$
 C. $x = 3$ 时函数 $y = ax^2 + bx + c$ 取最小值
 D. 图象的对称轴是直线 $x = 3$

【解题思路】根据所给的图象可知，抛物线开口向上，与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴，由过 A (1, 0)，B (5, 0)，可知对称轴的方程以及最值情况.

【解答过程】解：当 $x = 0$ 时， $y = c$ ，由二次函数的图象可知，图象与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上，即 $c > 0$ ，故 A 错误；

因为图象与 x 轴有两个不同的交点，所以 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，故 B 错误；

因为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 A (1, 0)，B (5, 0)，

所以对称轴方程为 $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ，故 D 正确；

结合图象可知，在 $x = 3$ 处函数取得最小值，故 C 正确；

故选：CD.

11. (5分) (2022春·安徽期中) 若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-1, 2)$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $a<0$

B. $a+b+c>0$

C. 关于 x 的不等式 $bx^2+cx+3a>0$ 解集为 $(-3, 1)$

D. 关于 x 的不等式 $bx^2+cx+3a>0$ 解集为 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

【解题思路】将不等式转化为方程，再利用图象即可求解.

【解答过程】解：A: $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-1, 2)$ ，则 $a<0$ ，正确.

B: 由题意知令 $f(x) = ax^2+bx+c$ ，由 $f(x) = ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-1, 2)$ ，可得 $f(1) = a+b+c>0$ ，正确.

C: 由题意知 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x=-1, 2$ ，则由韦达定理得 $\frac{b}{a} = -1$ ， $\frac{c}{a} = -2$ ，即 $bx^2+cx+3a>0$ 变为 $-ax^2-2ax+3a>0$ ，即 $x^2+2x-3>0$ ，即 $x<-3$ 或 $x>1$ ，关于 x 的不等式 $bx^2+cx+3a>0$ 解集为 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ，C 错误，D 正确.

故选：ABD.

12. (5分) (2022春·辽宁期末) 已知 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-2, 3)$ ，则下列说法正确的是 ()

A. 不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集是 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

B. $\frac{12}{3b+4} + b$ 的最小值是 $\frac{8}{3}$

C. 若 $m^2 - m > \frac{b+4}{\sqrt{b+3}}$ 有解，则 m 的取值范围是 $m<-1$ 或 $m>2$

D. 当 $c=2$ 时， $f(x) = 3ax^2+6bx$ ， $x \in [n_1, n_2]$ 的值域是 $[-3, 1]$ ，则 $n_2 - n_1$ 的取值范围是 $[2, 4]$

【解题思路】根据给定条件，得到 $b=-a$ ， $c=-6a$ ， $a<0$ ，解不等式判定 A；利用均值定理判断 B；利用对勾函数求范围，判断 C；探讨二次函数的值域判断 D.

【解答过程】解： $\because ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-2, 3)$ ，

$\therefore -2, 3$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $a<0$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = 1 \\ \frac{c}{a} = -6 \end{cases}, \therefore b = -a, c = -6a, a < 0,$$

对于 A，不等式 $cx^2+bx+a<0$ 化为 $6x^2+x-1<0$ ，解得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ ，故 A 正确；

对于 B， $b>0$ ， $\frac{12}{3b+4} + b = \frac{12}{3b+4} + \frac{1}{3}(3b+4) - \frac{4}{3} \geq 2\sqrt{\frac{12}{3b+4} \cdot \frac{1}{3}(3b+4)} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ ，

当且仅当 $\frac{12}{3b+4} = \frac{1}{3}(3b+4)$ ，即 $b = \frac{2}{3}$ 时，取等号，故 B 正确；

对于 C， $b > 0$ ，令 $\sqrt{b+3} = t > \sqrt{3}$ ，则 $\frac{b+4}{\sqrt{b+3}} = t + \frac{1}{t}$ 在 $t \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增，

即有 $\frac{b+4}{\sqrt{b+3}} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ ，

$\therefore m^2 - m > \frac{b+4}{\sqrt{b+3}}$ 有解， $\therefore m^2 - m > \frac{4}{\sqrt{3}}$ ，

解得 $m < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{\sqrt{3}}}$ 或 $m > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{\sqrt{3}}}$ ，故 C 错误；

对于 D，当 $c=2$ 时， $b = -a = \frac{1}{3}$ ，则 $f(x) = 3ax^2 + 6bx = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ ，

$f(x)_{\max} = f(1) = 1$ ，

依题意， $n_1 \leq 1 \leq n_2$ ，由 $f(x) = -3$ 得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $[n_1, n_2]$ 上的最小值为 -3 ，

$\therefore n_1 = -1, 1 \leq n_2 \leq 3$ 或 $-1 \leq n_1 \leq 1, n_2 = 3$ ，

$\therefore 2 \leq n_2 - n_1 \leq 4$ ，故 D 正确。

故选：ABD。

三. 填空题（共 4 小题，满分 20 分，每小题 5 分）

13. （5 分）（2021 秋•石鼓区校级月考）已知 $x > 2$ ， $x + \frac{a}{x-2}$ （ $a > 0$ ）最小值为 3. 则 $a = \frac{1}{4}$ 。

【解题思路】先变形得到 $x + \frac{a}{x-2} = x - 2 + \frac{a}{x-2} + 2$ ，再利用基本不等式求最值。

【解答过程】解： $\because x > 2, \therefore x - 2 > 0$ ，

$\therefore x + \frac{a}{x-2} = x - 2 + \frac{a}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{a} + 2$ ，

当且仅当 $x - 2 = \frac{a}{x-2}$ ，即 $x = 2 + \sqrt{a}$ 时取等号，

$\therefore x + \frac{a}{x-2}$ （ $a > 0$ ）最小值为 $2\sqrt{a} + 2$ ，

$\therefore x + \frac{a}{x-2}$ （ $a > 0$ ）最小值为 3，

$\therefore 2\sqrt{a} + 2 = 3, \therefore a = \frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

14. （5 分）（2022•天元区校级开学）正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2$ ，若存在 a, b 满足不等式

$2a + b < x^2 + 3x$ 有解，则实数 x 的取值范围为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -4\}$ 。

【解题思路】先根据基本不等式求得 $2a + b$ 的最值，再结合已知求出实数 x 的取值范围即可。

【解答过程】解：∵正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2$,

$$\therefore 2a+b = \frac{1}{2} (2a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(4 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \right) = 4, \text{ 当且仅当 } b=2a \text{ 时等号成立,}$$

∴不等式 $2a+b < x^2+3x$ 有解,

∴ $x^2+3x > 4$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -4$,

∴实数 x 的取值范围为 $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -4\}$.

故答案为: $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -4\}$.

15. (5分) (2022•铁西区校级开学) 已知不等式 $-2x^2+bx+c > 0$ 的解集 $\{x|-1 < x < 3\}$, 若对任意 $-1 \leq x \leq 0$, 不等式 $-2x^2+bx+c+t \leq 4$ 恒成立. 则 t 的取值范围是 $(-\infty, -2]$.

【解题思路】由题意可知 -1 和 3 是方程 $-2x^2+bx+c=0$ 的两根, 即可求出 $b=4, c=6$, 则对任意 $-1 \leq x \leq 0$, 不等式 $-2x^2+bx+c+t \leq 4$ 恒成立, 转化为 $t \leq 2x^2 - 4x - 2$ 在 $x \in [-1, 0]$ 上恒成立, 令 $y=2x^2 - 4x - 2$, 根据二次函数的性质求出最小值即可得出答案.

【解答过程】解: ∵不等式 $-2x^2+bx+c > 0$ 的解集 $\{x|-1 < x < 3\}$, ∴ -1 和 3 是方程 $-2x^2+bx+c=0$ 的两根,

$$\therefore \begin{cases} -1+3 = \frac{b}{2} \\ -3 = -\frac{c}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=4 \\ c=6 \end{cases},$$

∴对任意 $-1 \leq x \leq 0$, 不等式 $-2x^2+bx+c+t \leq 4$ 恒成立,

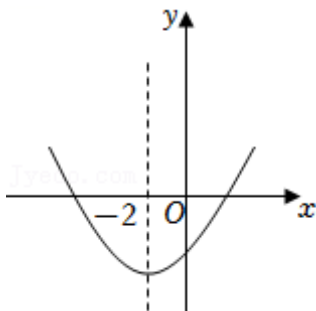
∴ $t \leq 2x^2 - 4x - 2$ 在 $x \in [-1, 0]$ 上恒成立,

令 $y=2x^2 - 4x - 2$, 二次函数开口向上, 对称轴为直线 $x=1$,

∴ $y=2x^2 - 4x - 2$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, ∴当 $x=0$ 时, $y_{\min} = -2$,

∴ t 的取值范围是 $(-\infty, -2]$.

16. (5分) (2022•雨花区校级开学) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论: ① $abc > 0$; ② $4a+2b+c < 0$; ③ $9a-b+c=0$; ④若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ⑤若方程 $|ax^2+bx+c|=1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -8 , 其中正确的结论有 4 个.



【解题思路】根据抛物线图象判断参数符号判断①，由顶点坐标可得 $b=4a$ 、 $c=-5a$ ，进而判断②③；由 $a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，即可判断④；讨论 $ax^2+bx+c=\pm 1$ ，结合根与系数关系求四个根的和判断⑤。

【解答过程】解：∵ 抛物线的开口向上，则 $a > 0$ ，对称轴在 y 轴的左侧，则 $b > 0$ ，交 y 轴的负半轴，则 $c < 0$ ，

∴ $abc < 0$ ，①错误；

∵ 抛物线的顶点坐标 $(-2, -9a)$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2, \frac{4ac-b^2}{4a} = -9a,$$

$$\therefore b=4a, c=-5a,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=ax^2+4ax-5a,$$

$$\therefore 4a+2b+c=4a+8a-5a=7a>0, \text{ ②正确；}$$

$$9a-b+c=9a-4a-5a=0, \text{ ③正确；}$$

$$\therefore \text{抛物线 } y=ax^2+4ax-5a \text{ 交 } x \text{ 轴于 } (-5, 0), (1, 0),$$

∴ 若方程 $a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$ ，④正确；

若方程 $|ax+bx+c|=1$ 有四个根，设方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，

$$\text{则 } \frac{x_1+x_2}{2} = -2, \text{ 可得 } x_1+x_2 = -4,$$

$$\text{设方程 } ax^2+bx+c=-1 \text{ 的两根分别为 } x_3, x_4, \text{ 则 } \frac{x_3+x_4}{2} = -2, \text{ 可得 } x_3+x_4 = -4,$$

所以这四个根的和为 -8 ，⑤正确。

故答案为：4.

四. 解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17. （10 分）（2021 秋•和硕县校级月考）比较下列各题中两个代数式的大小：

（1） x^2+2x+6 与 $2x^2-4x+16$ ；

（2） x^2+y^2+2 与 $2(x+2y-2)$.

【解题思路】（1）利用作差法即可比较大小；

（2）利用作差法即可比较大小.

【解答过程】解：（1）∵ $(x^2+2x+6) - (2x^2-4x+16) = -x^2+6x-10 = -(x-3)^2+1 < 0$,

$$\therefore x^2+2x+6 < 2x^2-4x+16;$$

$$(2) \because (x^2+y^2+2) - 2(x+2y-2) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 > 0,$$

$$\therefore x^2+y^2+2 > 2(x+2y-2).$$

18. （12 分）（2022 春•满洲里市校级期末）设 a, b, c 均为正数，且 $a+b=1$.

(1) 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值；

(2) 证明： $\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} \leq \sqrt{6}$.

【解题思路】(1) 由已知结合乘 1 法及基本不等式即可求解；

(2) 法一：证明：由柯西不等式即可直接证明，

法二：结合分析法，要证明 $\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} \leq \sqrt{6}$ ，只需证明 $(\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b})^2 \leq 6$ ，
只需证明 $4 - a - b + 2\sqrt{(2-a)(2-b)} \leq 6$ ，只需证明 $\sqrt{(2-a)(2-b)} \leq \frac{3}{2}$ ，然后
结合基本不等式即可求证。

【解答过程】解：(1) $\because a, b$ 均为正数，且 $a+b=1$ ，

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 3 + 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$ ，即 $a = \sqrt{2} - 1$ ， $b = 2 - \sqrt{2}$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$.

(2) 法一：证明：由柯西不等式可得， $(2-a+2-b)(1^2+1^2) \geq (\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b})^2$
 2 ，即 $(\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b})^2 \leq 6$ ，

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ ，等号成立。

法二：证明：（分析法）要证明 $\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} \leq \sqrt{6}$ ，

只需证明 $(\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b})^2 \leq 6$ ，

只需证明 $4 - a - b + 2\sqrt{(2-a)(2-b)} \leq 6$ ，

只需证明 $\sqrt{(2-a)(2-b)} \leq \frac{3}{2}$ ，

因为 $\sqrt{(2-a)(2-b)} \leq \frac{2-a+2-b}{2} = \frac{3}{2}$ ，当且仅当 $2-a=2-b$ ，即 $a=b$ 时，等号成立。

综上所述： $\sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} \leq \sqrt{6}$ 。

19. (12 分) (2022 春·浙江期中) 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx-3>0$ ($a, b \in \mathbf{R}$) .

(1) 若不等式的解集为 $(-1, -\frac{3}{5})$ ，求实数 a, b 的值；

(2) 若 $b=a-3$ ，求此不等式的解集。

【解题思路】(1) 根据不等式的解集与对应方程的关系，列方程组求出 a, b 的值。

(2) 把 $b=a-3$ 代入不等式，利用分类讨论法求出不等式的解集。

【解答过程】解：(1) 因为不等式 $ax^2+bx-3>0$ 的解集为 $(-1, -\frac{3}{5})$ ，

所以 -1 和 $-\frac{3}{5}$ 是方程 $ax^2+bx-3=0$ 的两个实数根，

$$\text{所以} \begin{cases} -1 - \frac{3}{5} = -\frac{b}{a} \\ -1 \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{3}{a} \end{cases}, \text{解得 } a = -5, b = -8.$$

(2) $b=a-3$ 时, 不等式为 $ax^2 + (a-3)x - 3 > 0$, 即 $(ax-3)(x+1) > 0$,

当 $a=0$ 时, 解不等式得 $x < -1$;

当 $a>0$ 时, 不等式化为 $(x-\frac{3}{a})(x+1) > 0$, 且 $\frac{3}{a} > -1$, 解不等式得 $x < -1$ 或 $x > \frac{3}{a}$;

当 $a<0$ 时, 不等式化为 $(x-\frac{3}{a})(x+1) < 0$,

若 $a=-3$, 则 $\frac{3}{a} = -1$, 不等式化为 $(x+1)^2 < 0$, 不等式无解;

若 $-3 < a < 0$, 则 $\frac{3}{a} < -1$, 解不等式得 $\frac{3}{a} < x < -1$;

若 $a < -3$, 则 $\frac{3}{a} > -1$, 解不等式得 $-1 < x < \frac{3}{a}$;

综上知, $a=0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, -1)$;

$a>0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{a}, +\infty)$;

$a=-3$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

$-3 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $(\frac{3}{a}, -1)$;

$a < -3$ 时, 不等式的解集为 $(-1, \frac{3}{a})$.

20. (12分) (2022秋•定边县校级月考) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$.

(1) 若函数 $f(x)$ 对任意实数 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 -3 , 求实数 a 的值.

【解题思路】 (1) 由题意可知函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 即可求出 a 的值.

(2) 由题意可得函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$, 分别讨论 $-\frac{a}{2} \leq -1$, $-1 < -\frac{a}{2} < 1$, $-\frac{a}{2} \geq 1$, 结合题目条件即可求出 a 的值.

【解答过程】 解: (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 对任意实数 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,

$$\therefore -\frac{a}{2} = 1, \text{解得 } a = -2,$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

(2) 函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$, 对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$,

① 当 $-\frac{a}{2} \leq -1$, 即 $a \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

$$\therefore f(-1) = -3, \text{即 } 1 - a + 3 = -3,$$

解得 $a=7$ ，符合题意，

②当 $-1 < -\frac{a}{2} < 1$ ，即 $-2 < a < 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上先减后增，

$$\therefore f\left(-\frac{a}{2}\right) = 3, \text{ 即 } \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 3 = -3,$$

解得 $a = \pm 2\sqrt{6}$ ，

又 $-2 < a < 2$ ，不符合题意，舍去，

③当 $-\frac{a}{2} \geq 1$ ，即 $a \leq -2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减，

$$\therefore f(1) = 3, \text{ 即 } 1 + a + 3 = -3,$$

解得 $a = -7$ ，符合题意，

综上所述，实数 $a=7$ 或 $a=-7$ 。

21. (12分) (2022•南京模拟) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $-2 \leq x < 3$ 上的取值范围；

(2) 当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $t \leq x \leq t+1$ 上的最大值。

【解题思路】(1) 把 $a=1$ 代入，对函数配方，可得其对称轴，从而可求得其单调区间，进而可求出 $f(x)$ 的取值范围；

(2) 把 $a=-1$ 代入，对函数配方，可得其对称轴，然后分 $t < \frac{1}{2}$ 和 $t \geq \frac{1}{2}$ 两种情况求出函数的最大值。

【解答过程】解：(1) 当 $a=1$ 时， $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ ，

其对称轴为直线 $x = -1$ ，函数在 $[-2, -1)$ 上单调递减，在 $(-1, 3]$ 上单调递增，

又 $f(-2) = 2$ ， $f(-1) = 1$ ，当 $x \rightarrow 3$ 时， $f(x) \rightarrow 17$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $-2 \leq x < 3$ 上的取值范围是 $[1, 17)$ ；

(2) 当 $a=-1$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ ，

其对称轴为直线 $x=1$ ，

当 $t < \frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $t \leq x \leq t+1$ 上的最大值 $f(t) = (t-1)^2 + 1$ ；

当 $t \geq \frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $t \leq x \leq t+1$ 上的最大值 $f(t+1) = t^2 + 1$ 。

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } t \leq x \leq t+1 \text{ 上的最大值 } \begin{cases} (t-1)^2 + 1, & t < \frac{1}{2} \\ t^2 + 1, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

22. (12分) (2021秋•徐汇区校级期中) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - x + 1 - a \leq 0$ 。

(1) 当 $a > 0$ 时，解关于 x 的不等式；

(2) 当 $2 \leq x \leq 3$ 时，不等式 $ax^2 - x + 1 - a \leq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

【解题思路】(1) 不等式化为 $(x-1)(ax+a-1) \leq 0$ ，再分类讨论两根的大小，求出对应不等式的解集即可。

(2) 不等式化为 $a(x^2 - 1) \leq x - 1$, 即 $a \leq \frac{1}{x+1}$ 恒成立, 求出 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 在 $x \in [2, 3]$ 时的最小值即可.

【解答过程】解: (1) 不等式 $ax^2 - x + 1 - a \leq 0$ 可化为 $(x - 1)(ax + a - 1) \leq 0$,

当 $a > 0$ 时, 不等式化为 $(x - 1)(x - \frac{1-a}{a}) \leq 0$,

① 当 $\frac{1-a}{a} > 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解不等式得 $1 \leq x \leq \frac{1-a}{a}$,

② 当 $\frac{1-a}{a} = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 解不等式得 $x = 1$,

③ 当 $\frac{1-a}{a} < 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解不等式得 $\frac{1-a}{a} \leq x \leq 1$.

综上, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq \frac{1-a}{a}\}$,

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x = 1\}$,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x | \frac{1-a}{a} \leq x \leq 1\}$.

(2) 由题意不等式 $ax^2 - x + 1 - a \leq 0$ 化为 $a(x^2 - 1) \leq x - 1$,

当 $x \in [2, 3]$ 时, $x - 1 \in [1, 2]$, 且 $x + 1 \in [3, 4]$,

所以原不等式可化为 $a \leq \frac{1}{x+1}$ 恒成立,

设 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \in [2, 3]$, 则 $f(x)$ 的最小值为 $f(3) = \frac{1}{4}$,

所以 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{4}]$.