

2023-2024 学年江苏省苏州市高三（上）期初调研数学试卷

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

- (5 分) 已知复数 z 满足 $z(1+i) = |\sqrt{3}-i|$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面上对应的点在()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (5 分) 设集合 $A = \{x|x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | 2^x \geq 16\}$, 则 $A \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}}B =$ ()
 A. $[0, 4]$ B. $[0, 4)$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- (5 分) 已知函数 $f(x) = ax - \sin x$ ($a \in \mathbf{R}$), 则“ $a=1$ ”是“ $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上单调递增”的()
 A. 充要条件
 B. 充分不必要条件
 C. 必要不充分条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (5 分) 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在线段 AC 上, 且 $AE=2EC$, 点 F 为线段 AD 的中点, 记 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu =$ ()
 A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{6}$
- (5 分) 已知事件 A, B , 且 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$. 若 A 与 B 互斥, 令 $a = P(AB)$; 若 A 与 B 相互独立, 令 $b = P(\overline{AB})$, 则 $b+a =$ ()
 A. 0.3 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6
- (5 分) 若某圆柱体的底面半径与某球体的半径相等, 圆柱体与球体的体积之比和它们的表面积之比的比值相等, 则该圆柱体的高与球体的半径的比值为()
 A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2
- (5 分) 我国人脸识别技术处于世界领先地位. 所谓人脸识别, 就是利用计算机检测样本之间的相似度, 余弦距离是检测相似度的常用方法. 假设二维空间中有点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, O 为坐标原点, 余弦相似度为向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 夹角的余弦值, 记作 $\cos(A, B)$, 余弦距离为 $1 - \cos(A, B)$. 已知 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$, $R(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, 若 P, Q 的余弦距离为 $\frac{1}{3}$, $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{1}{7}$, 则 Q, R 的余弦距离为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{7}$

8. (5分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 作直线分别与双曲线的两渐

近线相交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BF}$, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 都有多个选项是正确的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 选错或不答的得 0 分. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

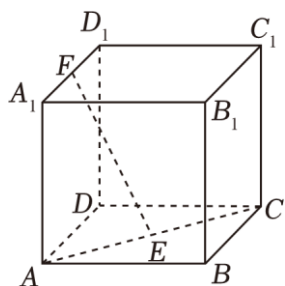
(多选) 9. (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 则 ()

- A. $\omega = 2$
 B. 直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴
 C. 点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心
 D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{5\pi}{6})$ 内只有一个零点

(多选) 10. (5分) 若一组不完全相同的数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 极差为 a , 中位数为 b , 方差为 s^2 , 在这组数据中加入一个数 $\bar{x}$ 后得到一组新数据 $\bar{x}, x_1, x_2, \dots, x_n$, 其平均数为 $\bar{x}'$, 极差为 a' , 中位数为 b' , 方差为 s'^2 , 则下列判断一定正确的是 ()

- A. $\bar{x}' = \bar{x}$ B. $a' = a$ C. $b' = b$ D. $s'^2 = s^2$

(多选) 11. (5分) 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别是线段 AC, A_1D_1 上的动点, $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_1F} = \mu \overrightarrow{A_1D_1}$, 且 $\lambda, \mu \in (0, 1)$. 记 EF 与 AA_1 所成角为 α , EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 β , 则 ()



- A. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 四面体 $F - AEB$ 的体积为定值
 B. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 存在 λ , 使得 $EF \parallel$ 平面 BDD_1B_1

C. 对于任意 λ, μ , 总有 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

D. 当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时, 在侧面 BCC_1B_1 内总存在一点 P , 使得 $PE \perp PF$

(多选) 12. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 是奇函数, $g(x) = (x-1)f(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ 分别是函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, 则 ()

A. $f(1) = 0$

B. $f'(1+x) = f'(1-x)$

C. $g'(1+x) = g'(1-x)$

D. $g(e^{0.1}) < g(1 - \ln 1.1) < 0$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. (5 分) $(x + \frac{1}{x} + 1)(x+1)^6$ 的展开式常数项是 _____. (用数字作答)

14. (5 分) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_3 + a_7 = -8$, $S_5 = 10$, 则 $S_{10} =$ _____.

15. (5 分) 请写出一条同时满足下列两个条件的直线方程: _____.

①过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点;

②与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y - 2 = 0$ 相交所得的弦长为 $4\sqrt{2}$.

16. (5 分) 已知函数 $f(x) = (\ln x)^2 - ax \ln x + ax^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则实数 a 的取值范围是 _____; $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (1 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (1 - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为 _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $2a - b = 2c \cos B$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 点 D 为 AB 中点, 且 $CD = \sqrt{13}$, 求 c 边的长.

18. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

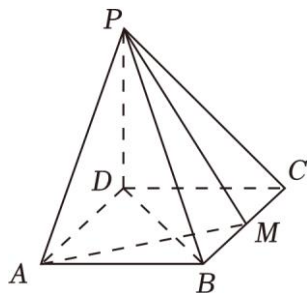
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及它的前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n + 1}{S_n S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < 1$.

19. (12 分) 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = 2\sqrt{2}$, $PD = DC = 2$, M 为 BC 的中点.

(1) 求证： $AM \perp$ 平面 PDB ；

(2) 求平面 PAM 与平面 PBM 夹角的余弦值.



20. (12 分) 某校为了弘扬中华优秀传统文化, 在校艺术节上举办班级“古诗词双人团体赛”, 每班限报一队, 每队两人, 每队通过回答多个问题的形式进行竞赛. 现甲, 乙两队进行竞答比赛, 比赛规则是: 每轮比赛中每队仅派一人代表答题, 两人都全部答对或者都没有全部答对则均记 1 分; 一人全部答对而另一人没有全部答对, 则全部答对的队伍记 3 分, 没有全部答对的记 0 分. 设每轮比赛中甲队全部答对的概率为 $\frac{3}{4}$, 乙队全部答对的概率为 $\frac{2}{3}$, 甲, 乙两队答题相互独立, 且每轮比赛互不影响.

(1) 经过 1 轮比赛, 设甲队的得分为 X , 求 X 的分布列和期望;

(2) 若比赛采取 3 轮制, 请计算第 3 轮比赛后甲队累计得分低于乙队累计得分的概率.

21. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $A(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $D(1, 1)$ 中恰有三点在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 点 P 为椭圆 E 上的一动点, 设直线 PA , PB 的斜率分别为 k_1 , k_2 .

①求 $k_1 \cdot k_2$ 的值;

②若不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 E 于 M , N 两点, O 为坐标原点, $OM \parallel PA$, $ON \parallel PB$, 求 $\triangle OMN$ 的面积.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + (x+1)^2$, $g(x) = e^{2x} + ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的极小值点, 求 a 的值;

(2) 若对任意 $x \in [0, +\infty)$, 恒有 $g(x) \geq f(x)$, 求 a 的取值范围.

2023-2024 学年江苏省苏州市高三（上）期初调研数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. (5 分) 已知复数 z 满足 $z(1+i) = |\sqrt{3}-i|$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面上对应的点在()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【分析】利用复数模的运算及除法运算化简复数，然后利用复数的几何意义判断即可.

【解答】解：∵ $z(1+i) = |\sqrt{3}-i|$,

$$\therefore z(1+i) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore z = \frac{2}{1+i} = 1-i,$$

复数 z 在复平面上对应的点为 $(1, -1)$ ，位于第四象限.

故选：D.

2. (5 分) 设集合 $A = \{x|x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | 2^x \geq 16\}$, 则 $A \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}}B =$ ()

- A. $[0, 4]$ B. $[0, 4)$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

【答案】C

【分析】根据题意，先解集合 B 中的不等式得到集合 B 所表示的元素，再根据补集和交集的运算法则算出答案.

【解答】解：由 $2^x \geq 16$ ，即 $2^x \geq 2^4$ ，解得 $x \geq 4$ ，故 $B = \{x|x \geq 4\}$ ，可得 $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}B = \{x|x < 4\}$ ，

而集合 $A = \{x|x \in \mathbf{N}\}$ ，可得 $A \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}}B = \{0, 1, 2, 3\}$.

故选：C.

3. (5 分) 已知函数 $f(x) = ax - \sin x$ ($a \in \mathbf{R}$)，则“ $a=1$ ”是“ $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上单调递增”的

()

- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】利用导数求出参数的取值范围，再根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【解答】解：当 $a=1$ 时， $f(x)=x-\sin x$ ， $f'(x)=1-\cos x \geq 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故充分性成立，

当 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 单调递增，

所以 $f'(x)=a-\cos x \geq 0$ ，即 $a \geq \cos x$ ，

所以 $a \geq 1$ ，故必要性不成立，

所以“ $a=1$ ”是“ $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件.

故选：B.

4. (5 分) 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在线段 AC 上，且 $AE=2EC$ ，点 F 为线段 AD 的中点，记

$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)，则 $\lambda + \mu =$ ()

- A. $-\frac{5}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{6}$

【答案】A

【分析】通过平面向量的线性运算计算即可求解.

【解答】解：因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $AE=2EC$ ，点 F 为线段 AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ ，

因为 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)，

所以 $\lambda = -\frac{2}{3}$ ， $\mu = -\frac{1}{6}$ ，

所以 $\lambda + \mu = -\frac{5}{6}$.

故选：A.

5. (5 分) 已知事件 A, B ，且 $P(A)=0.4$ ， $P(B)=0.5$. 若 A 与 B 互斥，令 $a=P(AB)$ ；若 A 与 B 相互独立，令 $b=P(\overline{AB})$ ，则 $b+a=$ ()

- A. 0.3 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6

【答案】A

【分析】由已知结合互斥事件和相互独立事件的概率公式分别求出 a 和 b ，进而可求.

【解答】解：因为 A, B 互斥，

所以 $a=P(AB)=0$ ，

因为 A 与 B 独立, $P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$,

所以 $b=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.4)\times 0.5=0.3$,

所以 $b+a=0.3$.

故选: A .

6. (5 分) 若某圆柱体的底面半径与某球体的半径相等, 圆柱体与球体的体积之比和它们的表面积之比的比值相等, 则该圆柱体的高与球体的半径的比值为 ()

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】D

【分析】由圆柱与球的表面积公式和体积公式列比例式求解.

【解答】解: 设圆柱底面半径为 r , 则球的半径为 r , 设圆柱的高为 h ,

$$V_1=\pi r^2 h, \quad V_2=\frac{4}{3}\pi r^3, \quad S_1=2\pi rh+2\pi r^2, \quad S_2=4\pi r^2,$$

$$\therefore \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{2\pi rh+2\pi r^2}{4\pi r^2}, \quad \therefore \frac{h}{r} = 2.$$

故选: D .

7. (5 分) 我国人脸识别技术处于世界领先地位. 所谓人脸识别, 就是利用计算机检测样本之间的相似度, 余弦距离是检测相似度的常用方法. 假设二维空间中有点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, O 为坐标原点, 余弦相似度为向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 夹角的余弦值, 记作 $\cos(A, B)$, 余弦距离为 $1 - \cos(A, B)$. 已知 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$, $R(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, 若 P, Q 的余弦距离为 $\frac{1}{3}$, $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{1}{7}$, 则 Q, R 的余弦距离为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{7}$

【答案】A

【分析】由题设得 $\overrightarrow{OP}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OQ}=(\cos\beta, \sin\beta)$, $\overrightarrow{OR}=(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, 利用向量夹角公式求得 $\cos(P, Q)$, $\cos(Q, R)$, 根据新定义即可求目标函数值.

【解答】解: 由题意得 $\overrightarrow{OP}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OQ}=(\cos\beta, \sin\beta)$, $\overrightarrow{OR}=(\cos\alpha, -\sin\alpha)$,

$$\text{则 } \cos(P, Q) = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \frac{2}{3},$$

$$\text{又 } \tan\alpha \tan\beta = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} = \frac{1}{7},$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta = 7 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{12}, \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{7}{12},$$

$$1 - \cos(Q, R) = 1 - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = 1 - \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}.$$

故选: A.

8. (5 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 作直线分别与双曲线的两渐近线相交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BF}$, 则该双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

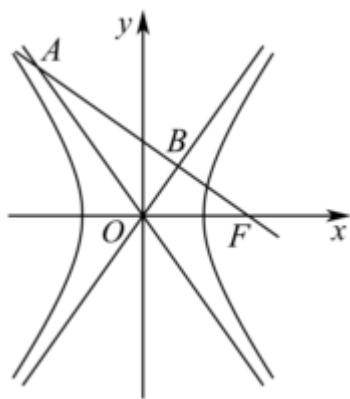
D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】由已知得 $OB \perp BF$, $|BF| = b$, $|OB| = a$, 利用 $\angle AOB = \pi - 2\angle FOB$, 借助正切值列方程求双曲线的离心率.

【解答】解: 双曲线的右焦点为 $F(c, 0)$, 渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \text{ 则有 } OB \perp BF, F \text{ 到渐近线的距离 } BF = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b,$$



$$|OF| = c, \quad |BF| = b, \quad \therefore |OB| = a, \quad |AB| = 2|BF| = 2b,$$

$$\text{则 } \tan \angle AOB = \frac{2b}{a}, \quad \tan \angle FOB = \frac{b}{a}, \quad \tan 2\angle FOB = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$\text{由 } \angle AOB = \pi - 2\angle FOB, \text{ 有 } \tan \angle AOB + \tan 2\angle FOB = 0, \text{ 即 } \frac{2b}{a} + \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0,$$

$$\text{解得 } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2, \text{ 则有 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 3, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}.$$

故选: B.

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 都有多个选项是正确的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 选错或不答的得 0 分. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

(多选) 9. (5 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 ()

A. $\omega = 2$

B. 直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴

C. 点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心

D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{5\pi}{6})$ 内只有一个零点

【答案】ACD

【分析】利用辅助角公式及三角函数的周期公式可得函数解析式, 结合三角函数的性质一一判定即可.

【解答】解: 由条件可得 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\therefore \omega = 2$, A 对;

由 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(-\frac{\pi}{6}) = 0$, $\therefore x = -\frac{\pi}{6}$ 不是对称轴, $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 是对称中心, B 错, C 对;

由 $0 < x < \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < 2\pi$, 而 $y = \sin x$ 在 $(\frac{\pi}{3}, 2\pi)$ 只有一个零点,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{5}{6}\pi)$ 有且只有一个零点, D 对.

故选: ACD.

(多选) 10. (5 分) 若一组不完全相同的数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 极差为 a , 中位数为 b , 方差为 s^2 , 在这组数据中加入一个数 $\bar{x}$ 后得到一组新数据 $\bar{x}, x_1, x_2, \dots, x_n$, 其平均数为 $\bar{x}'$, 极差为 a' , 中位数为 b' , 方差为 s'^2 , 则下列判断一定正确的是 ()

A. $\bar{x}' = \bar{x}$

B. $a' = a$

C. $b' = b$

D. $s'^2 = s^2$

【答案】AB

【分析】根据均值、极差、中位数、方差的定义判断.

【解答】解: $\bar{x} + x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+1)\bar{x}$, 因此平均数不变, 故 A 正确;

$\bar{x}, x_1, x_2, \dots, x_n$ 中最大值和最小值不变, 极差不变, 故 B 正确;

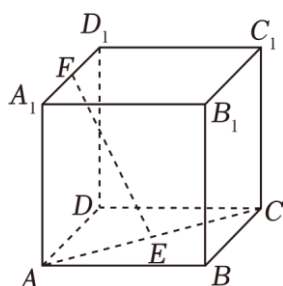
如果原来是偶数个数, 中位数是中间两个数的均值, 现在变成奇数个数,

中位是中间的一个数, 两个中位数可能不相等, 中位数可能改变,

而方差为 $s'^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{x})^2}{n+1}$,
 $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, 两者一定不相同, 故 CD 错误.

故选: AB.

(多选) 11. (5 分) 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别是线段 AC, A_1D_1 上的动点, $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_1F} = \mu \overrightarrow{A_1D_1}$, 且 $\lambda, \mu \in (0, 1)$. 记 EF 与 AA_1 所成角为 α , EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 β , 则 ()



- A. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 四面体 $F - AEB$ 的体积为定值
 B. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 存在 λ , 使得 $EF \parallel$ 平面 BDD_1B_1
 C. 对于任意 λ, μ , 总有 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
 D. 当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时, 在侧面 BCC_1B_1 内总存在一点 P , 使得 $PE \perp PF$

【答案】ABC

【分析】利用正方体的结构特征, 由三棱锥的体积计算判断 A; 取点 E , 借助面面平行推理判断 B; 利用线线角、线面角的意义判断 C; 建立空间直角坐标系, 借助空间向量计算判断 D 作答.

【解答】解: 对于 A, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, E 为 AC 的中点, $\triangle AEB$ 的面积为定值, 点 F 到平面 AEB 的距离为定值 2,

因此四面体 $F - AEB$ 的体积为定值, 故 A 正确;

对于 B, 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, F 为 A_1D_1 的中点, 取 AD 的中点 G , 令 $AC \cap BD = O$, 取 AO 的中点 H , 连接 EH, FH ,

显然 $FG \parallel DD_1$, $FG \not\subset$ 平面 BDD_1B_1 , $DD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 则 $FG \parallel$ 平面 BDD_1B_1 ,

而 $EH \parallel DO$, 同理 $EH \parallel$ 平面 BDD_1B_1 , 又 $EH \cap FG = H$, $EH, FG \subset$ 平面 EHG ,

因此平面 $EHG \parallel$ 平面 BDD_1B_1 , 又 $EF \subset$ 平面 EHG , 所以 $EF \parallel$ 平面 BDD_1B_1 , 故 B 正确;

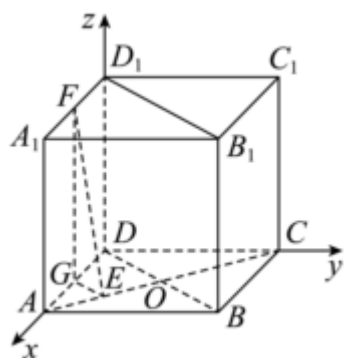
对于 C，过 F 作 $FG \parallel AA_1$ 交 AD 于 G，连接 EG，由 $AA_1 \perp$ 平面 ABCD，得 $FG \perp$ 平面 ABCD，而 $EG \subset$ 平面 ABCD，有 $FG \perp EG$ ，显然 $\angle FEG$ 是 EF 与平面 ABCD 所成的角，即 $\beta = \angle FEG$ ，由 $FG \parallel AA_1$ ，得 $\angle EFG$ 是 EF 与 AA_1 所成的角，即 $\alpha = \angle EFG$ ，所以 $\alpha + \beta = \angle EFG + \angle FEG = \frac{\pi}{2}$ ，故 C 正确；

对于 D，建立如图所示的空间直角坐标系，当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时， $E(1, 1, 0)$ ， $F(1, 0, 2)$ ，点 P 在侧面 BCC_1B_1 内，

设 $P(x, 2, z)$ ， $x, z \in [0, 2]$ ， $\overrightarrow{PE} = (1-x, -1, -z)$ ， $\overrightarrow{PF} = (1-x, -2, 2-z)$ ，

则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (1-x)^2 + 2 + z(z-2) = (1-x)^2 + (z-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ ，于是 $\angle EPF$ 始终为锐角，故 D 错误。

故选：ABC。



- (多选) 12. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x+1)$ 是奇函数， $g(x) = (x-1)f(x)$ ， $f'(x)$ ， $g'(x)$ 分别是函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的导函数，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递增，则 ()
- A. $f(1) = 0$
- B. $f'(1+x) = f'(1-x)$
- C. $g'(1+x) = g'(1-x)$
- D. $g(e^{0.1}) < g(1 - \ln 1.1) < 0$

【答案】ABD

【分析】由 $f(x+1)$ 是奇函数， $f(-x+1) = -f(x+1)$ ，令 $x=0$ 可求 $f(1)$ 判断选项 A，两边求导判断选项 B，由 $g(x) = (x-1)f(x)$ ，得到 $g(1+x)$ 和 $g(1-x)$ 的关系，求导判断选项 C，利用单调性判断选项 D。

【解答】解：对于 A，由 $f(x+1)$ 是奇函数，则 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ，令 $x=0$ ，有 $f(1) = 0$ ，A 正确。

对于 B , 由 $f(x+1)$ 是奇函数, 则 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 有 $-f'(-x+1) = -f'(x+1)$,
 $\therefore f'(1+x) = f'(1-x)$, B 正确.

对于 C , 由 $g(x) = (x-1)f(x)$, 有 $g(1+x) = xf(1+x)$, $g(1-x) = -xf(1-x)$,
 $\therefore g(1+x) = g(1-x)$, $\therefore g'(1+x) = -g'(1-x)$, C 错.

对于 D , 由 $g(1+x) = g(1-x)$ 知 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称,
 $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,
 $g(x) \leq g(1) = 0$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

令 $h(x) = e^x - x - 1$, 则 $h'(x) = e^x - 1$,

$h'(x) > 0$ 解得 $x > 0$, $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(0.1) > h(0)$, 即 $e^{0.1} - 0.1 - 1 > 0$, 有 $e^{0.1} - 1 > 0.1$.

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, $x > 1$ 时 $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore \varphi(1.1) < \varphi(1)$, 有 $\ln 1.1 - 1.1 + 1 < 0$, 即 $\ln 1.1 < 0.1$.

而 $|e^{0.1} - 1| > 0.1 > \ln 1.1 = |1 - \ln 1.1 - 1|$,

$\therefore g(e^{0.1}) < g(1 - \ln 1.1) < 0$, D 正确.

故选: ABD .

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. (5 分) $(x + \frac{1}{x} + 1)(x+1)^6$ 的展开式常数项是 7. (用数字作答)

【答案】7.

【分析】根据乘法的运算法则, 结合二项式的通项公式进行求解即可.

【解答】解: $(x+1)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r}$,

所以 $(x + \frac{1}{x} + 1)(x+1)^6$ 展开式中常数项是: $\frac{1}{x} \times C_6^5 x + 1 \times C_6^6 x^0 = 6 + 1 = 7$,

所以 $(x + \frac{1}{x} + 1)(x+1)^6$ 的展开式常数项是 7.

故答案为: 7.

14. (5 分) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_3 + a_7 = -8$, $S_5 = 10$, 则 $S_{10} =$ -55.

【答案】-55.

【分析】根据等差数列的通项公式以及前 n 项和公式求得结果.

【解答】解：由题意得，
$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 6d = -8 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 10 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases},$$

$$S_{10} = 10 \times 8 + \frac{10 \times 9}{2} \times (-3) = -55.$$

故答案为：-55.

15. (5分) 请写出一条同时满足下列两个条件的直线方程： $x=1$ (或 $x-\sqrt{3}y-1=0$).

①过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点；

②与圆 $x^2+y^2-4x-2\sqrt{3}y-2=0$ 相交所得的弦长为 $4\sqrt{2}$.

【答案】 $x=1$ (或 $x-\sqrt{3}y-1=0$).

【分析】利用抛物线的概念及圆的弦长公式分类讨论计算即可.

【解答】解：易知抛物线的焦点为 $(1, 0)$ ，圆方程可化为 $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 9$,

则圆心 $(2, \sqrt{3})$ ，半径 $r=3$,

由直线与圆相交弦长为 $4\sqrt{2}$ ，可得圆心到直线距离为 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$,

当斜率不存在时， $x=1$ 满足条件.

当斜率存在时，可设 $y=k(x-1)$ ，则 $\frac{|2k-\sqrt{3}-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ ，解之得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

此时 $l: x-\sqrt{3}y-1=0$,

综上 l 方程为： $x=1$ 或 $x-\sqrt{3}y-1=0$.

故答案为： $x=1$ (或 $x-\sqrt{3}y-1=0$).

16. (5分) 已知函数 $f(x) = (\ln x)^2 - ax \ln x + ax^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则实数 a

的取值范围是 $\left(-\frac{1}{e^2-e}, 0\right)$ ； $\left(1-\frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1-\frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1-\frac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为 1.

【答案】 $\left(-\frac{1}{e^2-e}, 0\right)$ ；1.

【分析】①令 $\frac{\ln x}{x}=t$ ，则方程 $t^2 - at + a = 0$ 有两个不等的实根 t_1, t_2 ，数形结合，根据 $t = \frac{\ln x}{x}$ 的图象得

出结果；

②由韦达定理 $\begin{cases} t_1+t_2=a \\ t_1t_2=a \end{cases}$ 代入求值即可.

【解答】解：由 $(\ln x)^2 - ax \ln x + ax^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - a \cdot \frac{\ln x}{x} + a = 0$,

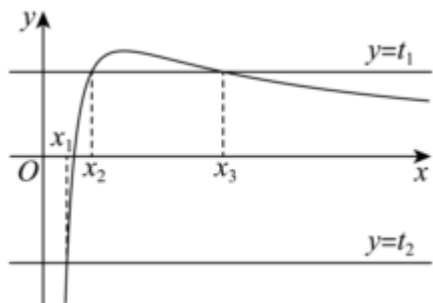
令 $\frac{\ln x}{x} = t$, $\therefore t^2 - at + a = 0$ (*),

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e$,

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x = e$ 时, $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$.

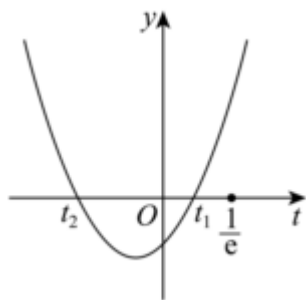
作出 $g(x)$ 大致图象如下, 要使原方程有三个不同的零点,



(*) 式关于 t 的一元二次方程有两个不等的实根 t_1, t_2 , 其中 $t_1 \in (0, \frac{1}{e})$, $t_2 \in (-\infty, 0)$,

令 $h(t) = t^2 - at + a$,

$$\therefore \begin{cases} h(0) = a < 0 \\ h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} - \frac{a}{e} + a > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{e^2 - e} < a < 0,$$



$$\text{且 } \frac{\ln x_1}{x_1} = t_2, \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_3}{x_3} = t_1, \begin{cases} t_1 + t_2 = a \\ t_1 t_2 = a \end{cases},$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right) = (1 - t_2)^2 \cdot (1 - t_1)^2 = [1 - (t_1 + t_2) + t_1 t_2]^2 = 1,$$

故答案为：($-\frac{1}{e^2 - e}$, 0); 1.

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足 $2a - b = 2c \cos B$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，点 D 为 AB 中点，且 $CD = \sqrt{13}$ ，求 c 边的长.

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$;

(2) $2\sqrt{7}$.

【分析】(1) 先利用正弦定理将边转化为角，再利用三角形内角和 π 消去角 A ，求角 C ;

(2) 先利用向量运算及三角形面积公式得到边 a, b 的关系，再利用余弦定理求边 c .

【解答】解：(1) 由 $2a - b = 2c \cos B$ 得 $2\sin A - \sin B = 2\sin C \cos B$

$$\Rightarrow 2\sin(B+C) - \sin B = 2\sin C \cos B$$

$$\Rightarrow 2\sin B \cos C + 2\cos B \sin C - \sin B = 2\sin C \cos B$$

$$\Rightarrow 2\sin B \cos C = \sin B,$$

因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $\sin B \neq 0$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{1}{2},$$

因为 $C \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由已知得 } \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2,$$

$$\text{所以 } 13 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 2ab \times \frac{1}{2}),$$

$$\text{所以 } a^2 + b^2 + ab = 52,$$

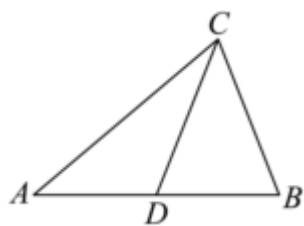
$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } 3\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{即 } ab = 12, a^2 + b^2 = 40,$$

$$\text{由余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= a^2 + b^2 - ab = 40 - 12 = 28,$$

$$\text{所以 } c = 2\sqrt{7}.$$



18. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及它的前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n + 1}{S_n S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < 1$.

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$, $S_n = 2^n - 1$;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q , 由已知列方程组求出首项和公差, 可得通项公式及它的前 n 项和;

(2) 根据数列通项的特征, 利用裂项相消求和, 可证明结论.

【解答】解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q , $\because a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1}$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = 3 \\ a_2 + a_3 = a_1 q + a_1 q^2 = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } q = 2, a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}, S_n = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1.$$

$$(2) \text{ 证明: } b_n = \frac{S_n + 1}{S_n S_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

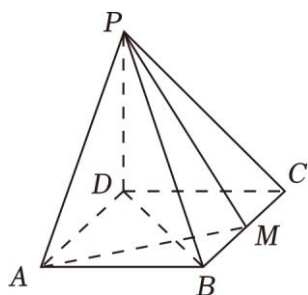
由 $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n+1} - 1 > 0$,

$$\therefore T_n = 1 - \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} < 1.$$

19. (12 分) 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = 2\sqrt{2}$, $PD = DC = 2$, M 为 BC 的中点.

(1) 求证: $AM \perp$ 平面 PDB ;

(2) 求平面 PAM 与平面 PBM 夹角的余弦值.



【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

【分析】(1) 根据线面垂直的性质，结合相似三角形的判定定理和性质、线面垂直的判定定理进行证明即可；

(2) 建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角公式进行求解即可.

【解答】解：(1) 证明：在矩形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle ABM = 90^\circ$ ，

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BM} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BMA,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle ADB,$$

设 AM 与 BD 交于 O 点，

$$\therefore \angle DOM = \angle ADB + \angle DAM = \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ,$$

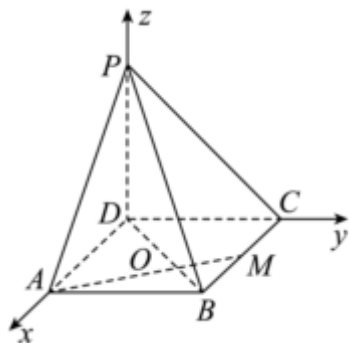
$$\therefore AM \perp BD, \text{ 又 } PD \perp \text{平面 } ABCD, AM \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore PD \perp AM,$$

$$\text{又 } BD \cap PD = D, BD, PD \subset \text{平面 } PDB,$$

$$\therefore AM \perp \text{平面 } PDB.$$

(2) 如图建系， $\therefore P(0, 0, 2), A(2\sqrt{2}, 0, 0), M(\sqrt{2}, 2, 0), B(2\sqrt{2}, 2, 0)$.



$$\therefore \vec{PA} = (2\sqrt{2}, 0, -2), \vec{PM} = (\sqrt{2}, 2, -2), \vec{BM} = (-\sqrt{2}, 0, 0),$$

设平面 PAM 为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n_1} \cdot \vec{PA} = 0 \\ \vec{n_1} \cdot \vec{PM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2\sqrt{2}x_1 - 2z_1 = 0 \\ \sqrt{2}x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases},$$

取 $y_1 = 1$, 则 $\vec{n_1} = (\sqrt{2}, 1, 2)$.

设平面 PBM 的一个法向量 $\vec{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n_2} \cdot \vec{BM} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \vec{PM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{2}x_2 = 0 \\ \sqrt{2}x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases},$$

取 $y_2 = 1$, 则 $\vec{n_2} = (0, 1, 1)$,

设平面 PAM 与平面 PBM 的夹角为 θ ,

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| |\vec{n_2}|} = \frac{|\sqrt{2} \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{2+1+4} \times \sqrt{0+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14},$$

$\therefore$ 平面 PAM 与平面 PBM 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

20. (12分) 某校为了弘扬中华优秀传统文化, 在校艺术节上举办班级“古诗词双人团体赛”, 每班限报一队, 每队两人, 每队通过回答多个问题的形式进行竞赛. 现甲, 乙两队进行竞答比赛, 比赛规则是: 每轮比赛中每队仅派一人代表答题, 两人都全部答对或者都没有全部答对则均记1分; 一人全部答对而另一人没有全部答对, 则全部答对的队伍记3分, 没有全部答对的记0分. 设每轮比赛中甲队全部答对的概率为 $\frac{3}{4}$, 乙队全部答对的概率为 $\frac{2}{3}$, 甲, 乙两队答题相互独立, 且每轮比赛互不影响.

(1) 经过1轮比赛, 设甲队的得分为 X , 求 X 的分布列和期望;

(2) 若比赛采取3轮制, 请计算第3轮比赛后甲队累计得分低于乙队累计得分的概率.

【答案】 (1) 分布列见解析, $E(X) = \frac{4}{3}$;

(2) $\frac{211}{864}$.

【分析】 (1) X 的所有可能取值为 0, 1, 3, 由独立事件的概率公式和互斥事件的概率公式计算出概率得分布列, 再由期望公式计算出期望;

(2) 甲队累计得分低于乙的情形为: ①甲至少有2场负于乙; ②甲有一场负于乙, 另两场打平, 再结合独立重复试验的概率公式计算.

【解答】 解: (1) X 的所有可能取值为 0, 1, 3,

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, \quad P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}, \quad P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$\therefore X$ 的分布列如下:

X	0	1	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

(2) 甲队累计得分低于乙的情形为：①甲至少有 2 场负于乙；

②甲有一场负于乙，另两场打平。

$$\text{所求概率为：} P = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + C_3^2 \left(\frac{7}{12}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{211}{864}.$$

21. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $A(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(\sqrt{2}, 0)$,

$D(1, 1)$ 中恰有三点在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 点 P 为椭圆 E 上的一动点, 设直线 PA , PB 的斜率分别为 k_1 , k_2 .

①求 $k_1 \cdot k_2$ 的值;

②若不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 E 于 M , N 两点, O 为坐标原点, $OM \parallel PA$, $ON \parallel PB$, 求 $\triangle OMN$ 的面积.

【答案】 (1) 方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) ① $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$;

② $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【分析】 (1) 由题意, 结合对称性判定在椭圆上的三个点, 再根据待定系数法进行计算即可;

(2) ①设 $P(x_0, y_0)$, 利用斜率公式结合椭圆方程即可得到 $k_1 \cdot k_2$ 的值;

②设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 利用①中所得信息及点在椭圆上得出 $|x_1 y_2 - x_2 y_1| = \sqrt{2}$, 再结合三角形面积公式计算即可.

【解答】 解: (1) 由椭圆的对称性可知点 A , B 在椭圆 E 上, 点 D 不可能在椭圆 E 上, 点 C 在椭圆 E 上,

所以 $a = \sqrt{2}$,

$$\text{又 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2b^2} = 1,$$

解得 $b = 1$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) ①不妨设 $P(x_0, y_0)$,

此时满足 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$,

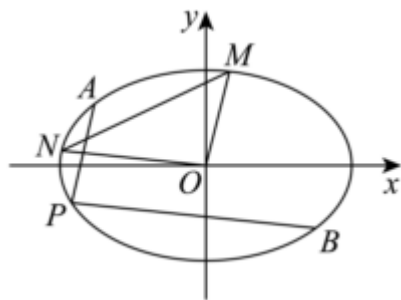
$$\text{则 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0 + 1} \cdot \frac{y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0 - 1} = \frac{y_0^2 - \frac{1}{2}}{x_0^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x_0^2}{2}}{x_0^2 - 1} = -\frac{1}{2};$$

②因为 $OM \parallel PA$, $ON \parallel PB$,

由①知 $k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{1}{2}$,

不妨设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

此时 $\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{ON} = (x_2, y_2)$,



$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{整理得 } y_1 y_2 = -\frac{1}{2} x_1 x_2,$$

$$\text{又 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \\ \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{整理得 } (\frac{x_1 x_2}{2} + y_1 y_2)^2 + \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = 1,$$

$$\text{即 } |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \sqrt{2},$$

$$\text{则 } S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \rangle = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \rangle}$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|)^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + (x+1)^2$, $g(x) = e^{2x} + ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的极小值点, 求 a 的值;

(2) 若对任意 $x \in [0, +\infty)$, 恒有 $g(x) \geq f(x)$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a = -2$

(2) $[-2, +\infty)$.

【分析】 (1) 根据 a 的符号讨论函数的单调性, 然后根据相同极值点建立方程, 结合函数的单调性求解即可;

(2) 方法一: 构造函数, 把不等式恒成立问题转化为 $F(x) \geq F(\ln(x+1))$, 从而得 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 进而 $F'(x) \geq 0$ 对 $\forall x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 分离参数求解即可;

方法二: 作差构造函数 $F(x) = e^{2x} + ax - a \ln(x+1) - (x+1)^2$, 根据命题成立的必要性结合 $F(0) = 0$ 分析函数单调性, 求出 a 的范围, 另一方面, 在 $a \geq -2$ 的前提下判断函数不等式恒成立, 即可求得.

【解答】 解: (1) ①当 $a \geq 0$ 时, 由单调性的性质知 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均无极小值, 舍去;

②当 $a < 0$ 时, 因为 $f(x) = a \ln(x+1) + (x+1)^2$,

所以 $f'(x) = \frac{a}{x+1} + 2(x+1) = \frac{2(x+1)^2 + a}{x+1}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{-\frac{a}{2}} - 1$,

当 $-1 < x < \sqrt{-\frac{a}{2}} - 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \sqrt{-\frac{a}{2}} - 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的极小值点为 $\sqrt{-\frac{a}{2}} - 1$;

又 $g(x) = e^{2x} + ax$, 所以 $g'(x) = 2e^{2x} + a$, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2} \ln(-\frac{a}{2})$,

当 $x < \frac{1}{2} \ln(-\frac{a}{2})$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{2} \ln(-\frac{a}{2})$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 的极小值点为 $\frac{1}{2} \ln(-\frac{a}{2})$,

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的极小值点, 所以 $\sqrt{-\frac{a}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \ln(-\frac{a}{2}) = \ln \sqrt{-\frac{a}{2}}$,

令 $h(x) = 1 + \ln x - x$, 可得 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$, 令 $\frac{1}{x} - 1 = 0$, 可得 $x = 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 是增函数,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 是减函数,

所以 $x=1$ 时, 函数 $h(x)$ 取得最大值 $1+\ln 1-1=0$, 所以 $h(x) \leq g(1)=0$,

即 $\ln x \leq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 时取 "=",

所以 $\sqrt{\frac{a}{2}}=1$, 解得 $a=-2$.

(2) 方法一: 由 $e^{2x+ax} \geq a \ln(x+1) + (x+1)^2 = e^{2 \ln(x+1)} + a \ln(x+1)$,

令 $G(x) = e^{2x+ax}$, 则 $G(x) \geq G(\ln(x+1))$, 由 $x-1 \geq \ln x$ 知 $x \geq \ln(x+1)$,

又 $x \in [0, +\infty)$, 所以 $x \geq \ln(x+1) \geq 0$,

所以 $G(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $G'(x) = 2e^{2x+a} \geq 0$ 对 $[0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $a \geq -2e^{2x}$ 对 $[0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $a \geq (-2e^{2x})_{\max}$,

又函数 $y = -2e^{2x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $a \geq (-2e^{2x})_{\max} = -2$.

方法二: 由 $e^{2x+ax} - a \ln(x+1) - (x+1)^2 \geq 0$ 对 $\forall x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 且 $F(0) = 0$,

令 $F(x) = e^{2x+ax} - a \ln(x+1) - (x+1)^2$, 则 $F(x) \geq F(0)$,

有 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $F'(x) = 2e^{2x+a} - \frac{a}{x+1} - 2(x+1)$, 且 $F'(0) = 0$,

则 $F'(x) \geq F'(0)$, 记 $H(x) = F'(x) = 2e^{2x+a} - \frac{a}{x+1} - 2(x+1)$,

则 $H'(x) = 4e^{2x} + \frac{a}{(x+1)^2} - 2$, 所以 $H'(0) = 2+a \geq 0$, 所以 $a \geq -2$; (必要性)

下证充分性, 当 $a \geq -2$ 时, $x \geq 0$ 时,

$$F'(x) \geq 2e^{2x} - 2(x+1) - \frac{2x}{x+1} \geq 2(2x+1) - 2x - 2 - \frac{2x}{x+1} = \frac{2x^2}{x+1} \geq 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $F(x) \geq F(0) = 0$, 符合,

综上 a 的取值范围为 $[-2, +\infty)$.