

## 2023-2024 学年江苏省镇江市高三（上）期初数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. (5 分) 设集合  $A = \{x \in \mathbb{N}^* | 2^x < 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 2\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{x | -1 < x < 2\}$     B.  $\{x | x < 2\}$     C.  $\{0, 1\}$     D.  $\{1\}$

2. (5 分) 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ , 若  $P(\xi > 2) = 0.061$ , 则  $P(-2 \leq \xi \leq 0)$  等于 ( )

- A. 0.484    B. 0.439    C. 0.878    D. 0.939

3. (5 分) 若  $x < 2$ , 则函数  $f(x) = x + \frac{9}{x-2}$  最大值为 ( )

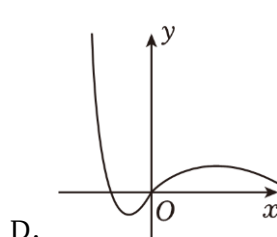
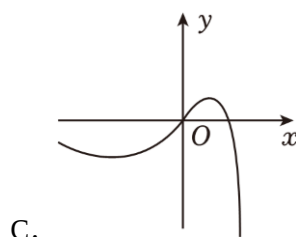
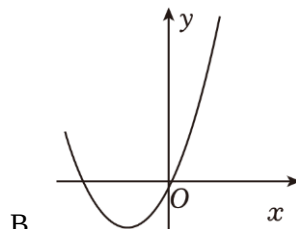
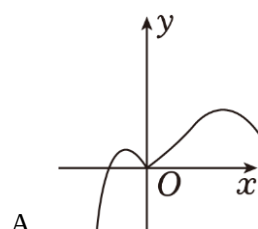
- A. 6    B. 8    C. -6    D. -4

4. (5 分) 已知随机变量  $X$  的分布列如下表所示, 若  $E(X) = \frac{1}{3}$ , 则  $D(X) =$  ( )

|     |     |               |     |
|-----|-----|---------------|-----|
| $X$ | -2  | 0             | 1   |
| $P$ | $a$ | $\frac{1}{3}$ | $b$ |

- A.  $\frac{49}{81}$     B.  $\frac{8}{9}$     C.  $\frac{23}{27}$     D.  $\frac{23}{81}$

5. (5 分) 函数  $f(x) = \frac{x^2 + x}{e^{x+1}}$  的大致图象是 ( )



6. (5 分) 已知实数  $a$  为常数, 且  $a \neq 0$ , 函数  $f(x) = (ax - 1)(x - a)$ . 甲同学:  $f(x) > 0$  的解集为  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ ; 乙同学:  $f(x) < 0$  的解集为  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ ; 丙同学:  $f(x)$  的极值为负数. 在这三个同学中, 只有一个同学的论述是错误的, 则  $a$  的范围为 ( )

- A.  $a < -1$     B.  $-1 < a < 0$     C.  $0 < a < 1$     D.  $a > 1$

7. (5 分) 我们称：两个相交平面构成四个二面角，其中较小的二面角称为这两个相交平面的夹角；由正方体的四个顶点所确定的平面统称为该正方体的“表截面”。则在正方体中，两个不重合的“表截面”的夹角大小不可能为 ( )

- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $90^\circ$

8. (5 分) 某校在校庆期间举办羽毛球比赛，某班派出甲、乙两名单打主力，为了提高两位主力的能力，体育老师安排了为期一周的对抗训练，比赛规则如下：甲、乙两人每轮分别与体育老师打 2 局，当两人获胜局数不少于 3 局时，则认为这轮训练过关；否则不过关。若甲、乙两人每局获胜的概率分别为  $p_1$ ,  $p_2$ ，且满足  $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$ ，每局之间相互独立。记甲、乙在  $n$  轮训练中训练过关的轮数为  $X$ ，若  $E(X) = 16$ ，则从期望的角度来看，甲、乙两人训练的轮数至少为 ( )

- A. 27                      B. 24                      C. 32                      D. 28

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (5 分) 小明，小华，小红，小兰四位同学分别到镇江的南山、焦山、北固山参观旅游，要求每位同学只去一个地方，每个地方至少安排一位同学参观，则下列选项正确的是 ( )

- A. 若安排两位同学去焦山，则有 12 种安排方法  
B. 若小红，小兰安排去同一个地方参观，则有 6 种安排方法  
C. 若小华不去南山参观，则有 24 种安排方法  
D. 共有 18 种安排方法

(多选) 10. (5 分) 一质地均匀的正四面体四个表面上分别标有数字 1, 2, 3, 4，抛掷该正四面体两次，记事件  $A$  为“第二次向下的数字为奇数”，事件  $B$  为“两次向下的数字之积为偶数”，则下列说法正确的是 ( )

- A. 事件  $A$  和事件  $B$  是对立事件  
B.  $P(AB) = \frac{1}{4}$   
C.  $P(A|B) = \frac{1}{3}$   
D. 事件  $A$  和事件  $B$  相互不独立

(多选) 11. (5 分) 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  为菱形， $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ ， $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ ，则下列说法正确的 ( )

- A. 四边形  $B_1BDD_1$  为矩形

B.  $\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AD}$

C.  $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$

D. 如果  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$ ，那么点  $M$  在平面  $A_1BD$  内

(多选) 12. (5 分) 已知  $x > 0$ ，函数  $f(x) = \ln x$  的图象记为  $C_1$ ， $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$  的图象记为  $C_2$ 。则 ( )

A. 函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  只有一个零点

B.  $C_1$  与  $C_2$  没有共同的切线

C. 当  $x \neq 1$  时，曲线  $C_2$  在曲线  $C_1$  的下方

D. 当  $1 < x < e$  时， $\frac{f(g(x))}{g(f(x))} < f(x)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分) 2023 年五一节日期间，通过对某一路口在具体时刻的瞬时速度进行观测统计发现，时刻  $x$  和瞬时速度  $y$  的关系如下：

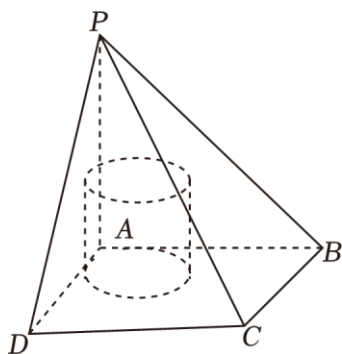
|          |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|
| $x$ (时)  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $y$ (速度) | 90 | 84 | 83 | 80 | 75 | 68 |

由表中数据得到的线性回归方程为  $y = -4x + a$ ，则由此可预测此路口 11 时的瞬时速度为 \_\_\_\_\_。

14. (5 分) 已知函数  $f(x) = ax^3 - \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + 3\sin x + 7$ ， $x \in [-2023, 2023]$  的最大值为  $M$ ，最小值为  $m$ ，则  $M + m =$  \_\_\_\_\_。

15. (5 分) 现有两个罐子，1 号罐子中装有 3 个红球、2 个黑球，2 号罐子中装有 4 个红球、2 个黑球。现先从 1 号罐子中随机取出一个球放入 2 号罐子，再从 2 号罐子中取一个球，则从 2 号罐子中取出的球是红球的概率为 \_\_\_\_\_。

16. (5 分) 如图，四棱锥  $P - ABCD$  的底面是边长为 2 的正方形， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $PA = 2$ 。圆柱的底面在该四棱锥的底面上，当圆柱的侧面积最大时，圆柱的底面半径为 \_\_\_\_\_；当圆柱体积最大时，圆柱的底面半径为 \_\_\_\_\_。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在二项式  $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 的展开式中, \_\_\_\_\_, 给出下列条件:

- ①若展开式前三项的二项式系数的和等于 46;
- ②所有偶数项的二项式系数的和为 256;
- ③若展开式中第 7 项为常数项.

试在上面三个条件中选择一个补充在上面的横线上，并且完成下列问题：

- (1) 求展开式中系数最大的项;  
(2) 求展开式中的常数项.

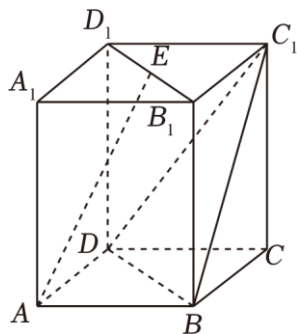
(备注：如果多个条件分别解答，按第一个条件计分)

18. (12 分) 设函数  $f(x) = 2^x + (p-1) \cdot 2^{-x}$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数.

- (1) 求  $p$  的值;
- (2) 若  $g(x) = f(2x) - 2k \cdot (2^x - 2^{-x})$  在  $[1, +\infty)$  上最小值为  $-4$ , 求  $k$  的值.

19. (12 分) 已知直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $AA_1=6$ ,  $AB=4$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $E$  为线段  $B_1D_1$  上中点.

- (1) 证明:  $AE \parallel$  平面  $BC_1D$ ;  
(2) 求  $CE$  与平面  $BC_1D$  所成角的正弦值.



20. (12 分) 某高校男、女学生人数基本相当, 为了解该校英语四级考试情况, 随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各 60 名学生的成绩, 情况如表:

|    | 合格 | 不合格 |
|----|----|-----|
| 男生 | 35 | 25  |
| 女生 | 45 | 15  |

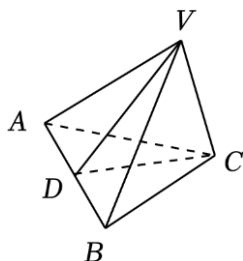
- (1) 是否有 99% 的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关？
- (2) 从这 60 名男生中任意选 2 人，求这 2 人中合格人数的概率分布及数学期望；
- (3) 将抽取的这 120 名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率。若学生首次考试不合格，则经过一段时间的努力，第二次参加考试合格的概率会增加  $\frac{1}{6}$ 。现从该校学生中任意抽取 2 名学生，求至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率。

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001  |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $k$             | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

21. (12 分) 在三棱锥  $V-ABC$  中， $VA=VB=AB=2$ ， $CB=CA=\sqrt{5}$ ， $BC=1$ ， $D$  是  $AB$  的中点。

- (1) 证明：平面  $VCD \perp$  平面  $ABC$ ；
- (2) 求二面角  $V-BC-A$  正弦值；
- (3) 求直线  $VA$  与平面  $VBC$  所成的角。



22. (12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ 。

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间；
- (2) 若对于任意的  $x \in (1, +\infty)$ ，关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq x+1+a \ln x$  恒成立，求实数  $a$  的取值范围。

## 2023-2024 学年江苏省镇江市高三（上）期初数学试卷

### 参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. (5 分) 设集合  $A = \{x \in \mathbb{N}^* | 2^x < 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 2\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{x | -1 < x < 2\}$     B.  $\{x | x < 2\}$     C.  $\{0, 1\}$     D.  $\{1\}$

【答案】C

【分析】求出集合  $A, B$ , 利用并集定义能求出  $A \cup B$ .

【解答】解：集合  $A = \{x \in \mathbb{N}^* | 2^x < 4\} = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 2\} = \{1\}$ ,

$$B = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 2\} = \{0, 1\},$$

$$\text{则 } A \cup B = \{0, 1\}.$$

故选：C.

2. (5 分) 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ , 若  $P(\xi > 2) = 0.061$ , 则  $P(-2 \leq \xi \leq 0)$  等于 ( )

- A. 0.484    B. 0.439    C. 0.878    D. 0.939

【答案】B

【分析】利用正态分布的对称性求得结果.

【解答】解：因为随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ ,

所以  $\mu = 0$ ,

$$\text{因为 } P(\xi > 2) = 0.061,$$

$$\text{所以 } P(\xi < -2) = 0.061,$$

$$\text{所以 } P(-2 < \xi < 2) = 1 - 2 \times 0.061 = 0.878,$$

$$\text{所以 } P(-2 \leq \xi \leq 0) = \frac{0.878}{2} = 0.439.$$

故选：B.

3. (5 分) 若  $x < 2$ , 则函数  $f(x) = x + \frac{9}{x-2}$  最大值为 ( )

- A. 6    B. 8    C. -6    D. -4

【答案】D

【分析】由已知根据基本不等式即可求解.

**【解答】**解：  $f(x) = x + \frac{9}{x-2} = x-2 + \frac{9}{x-2} + 2$ ,

由于  $x < 2$ , 所以  $2-x > 0$ ,

$$\text{故 } 2-x + \frac{9}{2-x} \geq 2\sqrt{(2-x)\left(\frac{9}{2-x}\right)} = 6,$$

当且仅当  $2-x = \frac{9}{2-x}$ , 即  $x = -1$  时等号成立,

$$\text{而 } x-2 + \frac{9}{x-2} = -\left[2-x + \frac{9}{2-x}\right] \leq -6,$$

$$\text{故 } f(x) = x + \frac{9}{x-2} = x-2 + \frac{9}{x-2} + 2 \leq -4,$$

所以  $f(x) = x + \frac{9}{x-2}$  最大值为  $-4$ .

故选：D.

4. (5分) 已知随机变量  $X$  的分布列如下表所示, 若  $E(X) = \frac{1}{3}$ , 则  $D(X) = (\quad)$

|     |     |               |     |
|-----|-----|---------------|-----|
| $X$ | -2  | 0             | 1   |
| $P$ | $a$ | $\frac{1}{3}$ | $b$ |

A.  $\frac{49}{81}$

B.  $\frac{8}{9}$

C.  $\frac{23}{27}$

D.  $\frac{23}{81}$

**【答案】**B

**【分析】**由题意, 根据分布列性质和期望公式求出  $a, b$  的值, 再代入方差公式中即可求解.

**【解答】**解: 易知  $a + \frac{1}{3} + b = 1$ ,

$$\text{解得 } a + b = \frac{2}{3}, \quad ①$$

$$\text{若 } E(X) = \frac{1}{3},$$

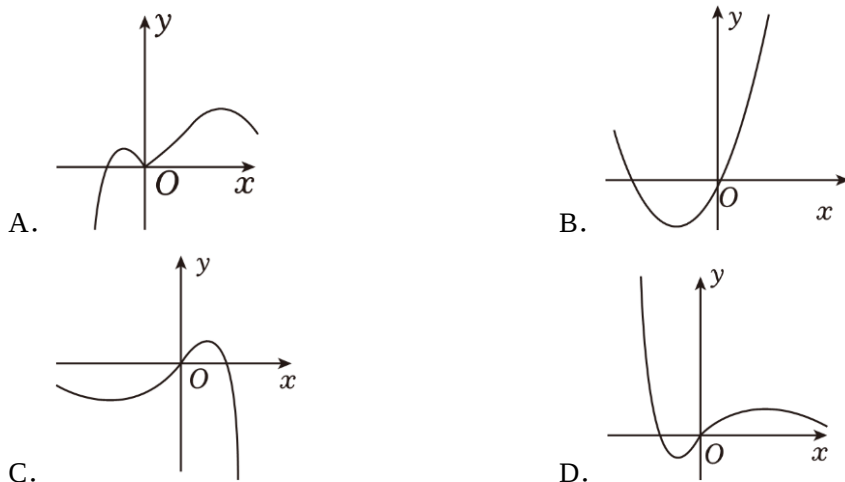
$$\text{此时 } E(X) = -2a + b = \frac{1}{3}, \quad ②$$

$$\text{联立①②, 解得 } a = \frac{1}{9}, \quad b = \frac{5}{9},$$

$$\text{则 } D(X) = \frac{1}{9} \times \left(-2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

故选：B.

5. (5分) 函数  $f(x) = \frac{x^2+x}{e^{x+1}}$  的大致图象是  $(\quad)$



【答案】D

【分析】当  $x < -1$  时， $f(x) > 0$ ，排除选项 A、C，当  $x \rightarrow +\infty$  时， $f(x) \rightarrow 0$ ，排除选项 B，进而得解。

【解答】解：当  $x < -1$  时， $x^2 + x > 0$ ， $e^{x+1} > 0$ ， $f(x) > 0$ ，排除选项 A、C；

当  $x \rightarrow +\infty$  时， $e^{x+1}$  远远大于  $x^2 + x$ ，则  $f(x) \rightarrow 0$ ，排除选项 B。

故选：D。

6. (5 分) 已知实数  $a$  为常数，且  $a \neq 0$ ，函数  $f(x) = (ax - 1)(x - a)$ 。甲同学： $f(x) > 0$  的解集为  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ ；乙同学： $f(x) < 0$  的解集为  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ ；丙同学： $f(x)$  的极值为负数。在这三个同学中，只有一个同学的论述是错误的，则  $a$  的范围为 ( )

A.  $a < -1$       B.  $-1 < a < 0$       C.  $0 < a < 1$       D.  $a > 1$

【答案】C

【分析】利用二次函数的极值，对  $a$  分类讨论，结合一元二次不等式的解法即可判断出正误。

【解答】解：函数  $f(x) = (ax - 1)(x - a) = ax^2 - (1+a^2)x + a = a(x - \frac{1+a^2}{2a})^2 - \frac{(a^2-1)^2}{4a}$ 。

若  $a < 0$ ，则  $x = \frac{1+a^2}{2a}$  时，函数  $f(x)$  取得极大值  $-\frac{(a^2-1)^2}{4a} \geq 0$ ，此时丙同学错误，而甲乙中必然有一个错误，不符合题意，舍去。

$\therefore a > 0$ ，则  $x = \frac{1+a^2}{2a}$  时，函数  $f(x)$  取得极小值  $-\frac{(a^2-1)^2}{4a} < 0$ ，此时丙同学正确，

且  $a < \frac{1}{a}$ ， $\therefore 0 < a < 1$ 。

由  $f(x) = (ax - 1)(x - a) > 0$  的解集为  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ ；

由  $f(x) = (ax - 1)(x - a) < 0$  的解集为  $(a, \frac{1}{a})$ 。

此时甲同学正确，而乙同学错误，符合题意，

$$\therefore 0 < a < 1.$$

故选：C.

7. (5 分) 我们称：两个相交平面构成四个二面角，其中较小的二面角称为这两个相交平面的夹角；由正方体的四个顶点所确定的平面统称为该正方体的“表截面”. 则在正方体中，两个不重合的“表截面”的夹角大小不可能为 ( )

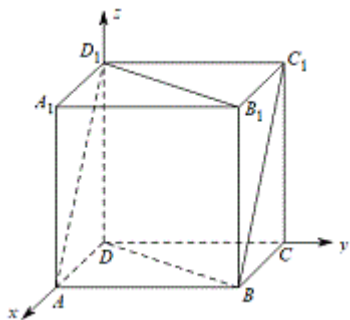
A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $90^\circ$

【答案】A

【分析】利用排除法思想，分别选取不同的平面，求其夹角，即可得解.

【解答】解：若表截面为面  $ABC_1D_1$  与面  $ABCD$ ，则它们的夹角为  $45^\circ$ ，即 B 正确；

若表截面为面  $ABC_1D_1$  与面  $BDD_1B_1$ ，以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



设正方体的棱长为 1，则  $D(0, 0, 0)$ ， $A_1(1, 0, 1)$ ， $A(1, 0, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ，

因为正方形  $ADD_1A_1$ ，所以  $A_1D \perp AD_1$ ，

因为  $AB \perp$  面  $ADD_1A_1$ ，且  $A_1D \subset$  面  $ADD_1A_1$ ，所以  $AB \perp A_1D$ ，

又  $AD_1 \cap AB = A$ ， $AD_1$ 、 $AB \subset$  面  $ABC_1D_1$ ，

所以  $A_1D \perp$  面  $ABC_1D_1$ ，即面  $ABC_1D_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = \vec{DA_1} = (1, 0, 1)$ ，

同理可证， $AC \perp$  面  $BDD_1B_1$ ，

所以面  $BDD_1B_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = \vec{AC} = (-1, 1, 0)$ ，

设面  $ABC_1D_1$  与面  $BDD_1B_1$  所成角为  $\theta$ ，则  $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，

所以  $\theta = 60^\circ$ ，即 C 正确；

若表截面为面  $ABB_1A_1$  与面  $ABCD$ ，则它们的夹角为  $90^\circ$ ，即 D 正确；

从排除法的角度来看，选项 A 不可能.

故选：A.

8. (5 分) 某校在校庆期间举办羽毛球比赛，某班派出甲、乙两名单打主力，为了提高两位主力的能力，

体育老师安排了为期一周的对抗训练，比赛规则如下：甲、乙两人每轮分别与体育老师打 2 局，当两人获胜局数不少于 3 局时，则认为这轮训练过关；否则不过关。若甲、乙两人每局获胜的概率分别为  $p_1$ ,  $p_2$ ，且满足  $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$ ，每局之间相互独立。记甲、乙在  $n$  轮训练中训练过关的轮数为  $X$ ，若  $E(X) = 16$ ，则从期望的角度来看，甲、乙两人训练的轮数至少为（ ）

- A. 27                      B. 24                      C. 32                      D. 28

【答案】A

【分析】由题意，设每一轮训练通过的概率为  $p$ ，求出  $p$  的表达式，结合二项分布的期望、基本不等式以及二次函数的性质进行求解即可。

【解答】解：不妨设每一轮训练通过的概率为  $p$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } p &= p_1^2 p_2^2 + C_2^1 p_1^2 \cdot (1-p_2) \cdot p_2 + C_2^1 p_1 \cdot p_2^2 \cdot (1-p_1) = -3p_1^2 p_2^2 + 2p_1 p_2 (p_1 + p_2) \\ &= -3p_1^2 p_2^2 + \frac{4}{3} \times 2p_1 p_2 = -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2, \end{aligned}$$

此时  $0 < p_1 p_2 \leq \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ，当且仅当  $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}$  时，等号成立，

易知函数  $y = -3x^2 + \frac{8}{3}x$  开口向下，对称轴  $x = \frac{4}{9}$ ，

$$\text{所以 } 0 < -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2 \leq -3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{8}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{27},$$

又每局之间相互独立，记甲、乙在  $n$  轮训练中训练过关的轮数为  $X$ ，

所以  $X \sim B(n, p)$ ，

$$\text{所以 } E(X) = np = n \left( -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2 \right) = 16,$$

$$\text{解得 } n = \frac{16}{-3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2} \geq \frac{16}{\frac{16}{27}} = 27,$$

则甲、乙两人训练的轮数至少为 27 轮。

故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（5 分）小明，小华，小红，小兰四位同学分别到镇江的南山、焦山、北固山参观旅游，要求每位同学只去一个地方，每个地方至少安排一位同学参观，则下列选项正确的是（ ）

- A. 若安排两位同学去焦山，则有 12 种安排方法  
B. 若小红，小兰安排去同一个地方参观，则有 6 种安排方法

C. 若小华不去南山参观，则有 24 种安排方法

D. 共有 18 种安排方法

【答案】ABC

【分析】根据题意，由排列组合数公式依次分析选项，综合可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，若安排两位同学去焦山，则剩下 2 人分别去南山、北固山参观旅游，则有  $C_4^2 A_2^2 = 12$  种安排方法，A 正确；

对于 B，若小红，小兰安排去同一个地方参观，有  $C_3^1 A_2^2 = 6$  种安排方法，B 正确；

对于 C，分 2 步进行分析，先将 4 人分为 3 组，有  $C_4^2 = 6$  种分组方法，将小华所在的组安排去焦山、北固山参观旅游，剩下 2 组任意安排，有  $2 A_2^2 = 4$  种情况，

则有  $6 \times 4 = 24$  种安排方法，C 正确；

对于 D，分 2 步进行分析，先将 4 人分为 3 组，有  $C_4^2 = 6$  种分组方法，再将 3 组安排到 3 个景点旅游，有  $A_3^3 = 6$  种情况，则有  $6 \times 6 = 36$  种安排方法，D 错误.

故选：ABC.

(多选) 10. (5 分) 一质地均匀的正四面体四个表面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 抛掷该正四面体两次，记事件 A 为“第二次向下的数字为奇数”，事件 B 为“两次向下的数字之积为偶数”，则下列说法正确的是 ( )

A. 事件 A 和事件 B 是对立事件

B.  $P(AB) = \frac{1}{4}$

C.  $P(A|B) = \frac{1}{3}$

D. 事件 A 和事件 B 相互不独立

【答案】BCD

【分析】用列举法，结合对立事件，独立事件，条件概率公式与古典概型的概率公式即可得解.

【解答】解：因为抛掷该正四面体两次的基本事件有 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4) 共 16 件，其中事件 A 有 (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3) 共 8 件，事件 B 有 (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4) 共 12 件，

3), (4, 4) 共 12 件,

事件  $AB$  有 (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), 共 4 件, 所以  $A$  与  $B$  可同时发生, 则事件  $A$  与事件  $B$  不是对立事件, 故  $A$  错误;

$P(AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ , 故  $B$  正确;

而  $P(B) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ , 则  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}$ , 故  $C$  正确;

而  $P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ , 则  $P(AB) \neq P(A)P(B)$ , 所以  $A, B$  相互不独立, 故  $D$  正确.

故选:  $BCD$ .

(多选) 11. (5 分) 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ ,  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ , 则下列说法正确的 ( )

A. 四边形  $B_1BDD_1$  为矩形

B.  $\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AD}$

C.  $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$

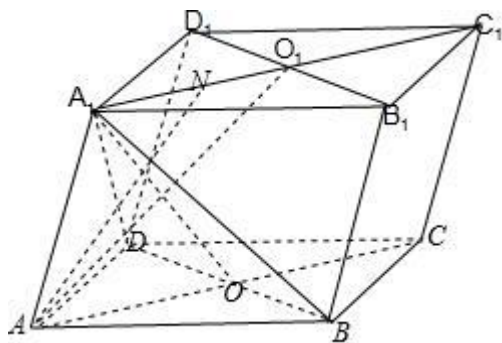
D. 如果  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$ , 那么点  $M$  在平面  $A_1BD$  内

**【答案】**  $ABD$

**【分析】** 直接利用向量的数量积, 余弦定理, 向量的线性运算判断  $A, B, C, D$  的结论.

**【解答】** 解: 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ ,  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ ,

如图所示:



对于  $A$ : 设  $AC \cap BD = O$ , 所以  $A_1B^2 = A_1A^2 + AB^2 - 2AA_1 \cdot AB \cdot \cos \angle A_1AB$ ,

$A_1D^2 = A_1A^2 + AD^2 - 2AA_1 \cdot AD \cdot \cos \angle A_1AD$ ,

所以  $A_1B = A_1D$ ,

故  $A_1O \perp DB$ ,

由于  $AC \perp BD$ ,  $A_1O \cap AC = O$ , 所以  $BD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 由于  $AA_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 故  $BD \perp AA_1$ ;

由于  $AA_1 \parallel BB_1$ , 所以  $BD \perp BB_1$ ,

所以四边形  $BDD_1B_1$  为矩形, 故 A 正确;

对于 B: 由  $BD \perp AO_1$ , 所以  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AO_1} = 0$ , 故  $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AO_1} = 0$ , 整理得  $\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AD}$ , 故 B 正确;

对于 C:  $\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{A_1A} = 2\overrightarrow{AN}$ , 点 N 为  $A_1O_1$  的中点,

所以  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ , 由于  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \neq 2\overrightarrow{AN}$ , 所以  $\overrightarrow{AO_1} \neq \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$ , 故 C 错误;

对于 D:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$ , 由于  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , 所以 M、B、D、 $A_1$  四点共面, 故点 M 在平面  $A_1BD$  内, 故 D 正确.

故选: ABD.

(多选) 12. (5 分) 已知  $x > 0$ , 函数  $f(x) = \ln x$  的图象记为  $C_1$ ,  $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$  的图象记为  $C_2$ . 则 ( )

A. 函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  只有一个零点

B.  $C_1$  与  $C_2$  没有共同的切线

C. 当  $x \neq 1$  时, 曲线  $C_2$  在曲线  $C_1$  的下方

D. 当  $1 < x < e$  时,  $\frac{f(g(x))}{g(f(x))} < f(x)$

【答案】AC

【分析】利用导数, 根据函数零点、切线、最值、不等式等知识对选项进行分析, 从而确定正确答案.

【解答】解: A 选项,  $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x > 0)$ ,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

在区间  $(0, 1)$  上,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减,

在区间  $(1, +\infty)$  上,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增,

由于  $h(1) = 0$ , 所以函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  只有一个零点, 故 A 选项正确;

B 选项,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f'(1) = 1$ ,  $f(1) = 0$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g'(1) = 1$ ,  $g(1) = 0$ ,

所以  $C_1$  和  $C_2$  在点  $(1, 0)$  处的切线方程为  $y - 0 = 1 \times (x - 1)$ , 即  $y = x - 1$ , 故 B 选项错误;

C 选项, 由 A 选项的分析可知:  $h(x) \geq h(1) = 0$  恒成立, 所以  $f(x) \geq g(x)$  恒成立,

且当  $x \neq 1$  时,  $f(x) > g(x)$ , 所以当  $x \neq 1$  时, 曲线  $C_2$  在曲线  $C_1$  的下方, 故 C 选项正确;

D 选项，当  $1 < x < e$  时，令  $x=2$ ，

$$\begin{aligned} \text{则有 } \frac{f(g(2))}{g(f(2))} &= \frac{f(1-\frac{1}{2})}{g(\ln 2)} = \frac{f(\frac{1}{2})}{g(\ln 2)} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{1-\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{1-\ln 2} \cdot \ln 2 \\ &= \frac{\ln 2}{\ln \frac{e}{2}} \cdot \ln 2 = \log_{\frac{e}{2}} 2 \cdot \ln 2, \end{aligned}$$

由于  $\log_{\frac{e}{2}} 2 > 1$ ，所以  $\log_{\frac{e}{2}} 2 \cdot \ln 2 > \ln 2$ ，即  $\frac{f(g(2))}{g(f(2))} > \ln 2 = f(2)$ ，所以 D 选项错误。

故选：AC.

### 三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5 分) 2023 年五一节日期间，通过对某一路口在具体时刻的瞬时速度进行观测统计发现，时刻  $x$  和瞬时速度  $y$  的关系如下：

|          |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|
| $x$ (时)  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $y$ (速度) | 90 | 84 | 83 | 80 | 75 | 68 |

由表中数据得到的线性回归方程为  $y = -4x + a$ ，则由此可预测此路口 11 时的瞬时速度为 62。

【答案】62.

【分析】先求出样本中心，利用线性回归方程经过样本中心，求出  $a$  的值，再将  $x=11$  代入方程，求解即可。

【解答】解：由题意可得， $\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8+9}{6} = \frac{13}{2}$ ， $\bar{y} = \frac{90+84+83+80+75+68}{6} = 80$ ，

$$\text{则 } 80 = -4 \times \frac{13}{2} + a,$$

解得  $a=106$ ，

当  $x=11$  时， $y = -4 \times 11 + 106 = 62$ 。

故答案为：62.

14. (5 分) 已知函数  $f(x) = ax^3 - \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + 3\sin x + 7$ ， $x \in [-2023, 2023]$  的最大值为  $M$ ，最小值为  $m$ ，则  $M+m =$  14。

【答案】14.

【分析】构造  $g(x) = f(x) - 7$ ，定义判断奇偶性，利用对称性有  $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$ ，即可求解。

【解答】解：令  $g(x) = f(x) - 7 = ax^3 - \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + 3\sin x$ ，且  $x \in \mathbb{R}$ ，

$$\begin{aligned}
 \text{则 } g(-x) &= a(-x)^3 - \ln[\sqrt{(-x)^2 + 1} + (-x)] - 3\sin x \\
 &= -ax^3 - \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 3\sin x = -ax^3 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) - 3\sin x \\
 &= -ax^3 + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 3\sin x = -g(x),
 \end{aligned}$$

所以  $g(x)$  为奇函数，且在  $x \in [-2023, 2023]$  上连续，

根据奇函数的对称性可知， $g(x)$  在  $x \in [-2023, 2023]$  上的最大、最小值关于原点对称，

则  $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = M - 7 + m - 7 = 0$ ，故  $M + m = 14$ 。

故答案为：14。

15. (5 分) 现有两个罐子，1 号罐子中装有 3 个红球、2 个黑球，2 号罐子中装有 4 个红球、2 个黑球。现先从 1 号罐子中随机取出一个球放入 2 号罐子，再从 2 号罐子中取一个球，则从 2 号罐子中取出的球是红球的概率为  $\frac{23}{35}$ 。

**【答案】**  $\frac{23}{35}$ 。

**【分析】** 根据给定条件，利用全概率公式求解作答。

**【解答】** 解：记 1 号罐子中取出红球的事件为  $A_1$ ，取出黑球的事件为  $A_2$ ，从 2 号罐子中取出红球的事件为  $B$ ，

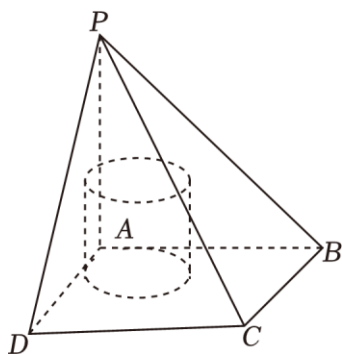
显然  $\Omega = A_1 \cup A_2$ ， $A_1, A_2$  互斥，

$$P(A_1) = \frac{3}{5}, P(A_2) = \frac{2}{5}, P(B|A_1) = \frac{5}{7}, P(B|A_2) = \frac{4}{7},$$

$$\text{所以 } P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{23}{35}.$$

故答案为：  $\frac{23}{35}$ 。

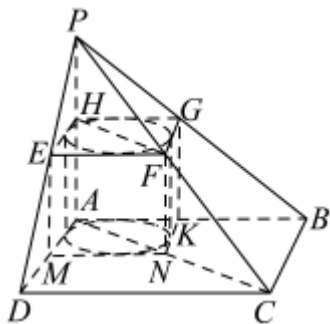
16. (5 分) 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面是边长为 2 的正方形， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $PA=2$ 。圆柱的底面在该四棱锥的底面上，当圆柱的侧面积最大时，圆柱的底面半径为  $\frac{1}{2}$ ；当圆柱体积最大时，圆柱的底面半径为  $\frac{2}{3}$ 。



【答案】 $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ .

【分析】在四棱锥  $P-ABCD$  内作正四棱柱  $AMNK-HEFG$ ，要使圆柱体侧面积最大和体积最大，需其底面圆为正四棱柱  $AMNK-HEFG$  的内切圆，设出圆柱的底面圆半径为  $r$ ，高为  $h$ ，由比例关系得到  $r = 1 - \frac{h}{2}$ ，从而求出圆柱侧面积关于半径的关系式，得到了大值及相应的半径，再表达出圆柱体积关系高的关系式，求导得到其单调性和最值，得到答案.

【解答】解：如图，在四棱锥  $P-ABCD$  内作正四棱柱  $AMNK-HEFG$ ，其中  $E, F, G, H, M, K$  分别在棱  $PB, PC, PD, PA, AB, AD$  上，要使圆柱体侧面积最大和体积最大，则需其底面圆为正四棱柱  $AMNK-HEFG$  的内切圆，连接  $HF$ ，设圆柱的底面圆半径为  $r$ ，高为  $h$ ，



则  $HF = 2\sqrt{2}r$ ， $AH = h$ ，连接  $AC$ ，则  $N$  在  $AC$  上，

在平面  $PAC$  内， $FH \parallel AC$ ，则  $\frac{HF}{AC} = \frac{PH}{PA}$ ， $\therefore \frac{2\sqrt{2}r}{2\sqrt{2}} = \frac{2-h}{2}$ ，

解得  $r = 1 - \frac{h}{2}$ ， $h = 2 - 2r$ ，

圆柱侧面积为  $S = 2\pi rh = 2\pi r(2 - 2r) = -4\pi(r^2 - r) = -4\pi(r^2 - r) = -4\pi(r - \frac{1}{2})^2 + \pi$ ，

$\therefore$  当  $r = \frac{1}{2}$  时，圆柱侧面积最大，

圆柱体积  $V = \pi r^2 h = \pi(1 - \frac{h}{2})^2 h = \frac{\pi}{4}(h^3 - 4h^2 + 4h)$ ， $0 < h < 2$ ，

$$\text{则 } V' = \frac{\pi}{4} (3h^2 - 8h + 4) = \frac{\pi}{4} (h - 2)(3h - 2),$$

当  $0 < h < \frac{2}{3}$  时,  $V' > 0$ ,  $V = \frac{\pi}{4} (h^3 - 4h^2 + 4h)$  单调递增,

当  $\frac{2}{3} < h < 2$  时,  $V' < 0$ ,  $V = \frac{\pi}{4} (h^3 - 4h^2 + 4h)$  单调递减,

$\therefore$  当  $h = \frac{2}{3}$  时, 圆柱体体积最大, 此时  $r = 1 - \frac{h}{2} = \frac{2}{3}$ .

故答案为:  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ .

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17. (10 分) 在二项式  $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 的展开式中, \_\_\_\_\_, 给出下列条件:

①若展开式前三项的二项式系数的和等于 46;

②所有偶数项的二项式系数的和为 256;

③若展开式中第 7 项为常数项.

试在上面三个条件中选择一个补充在上面的横线上, 并且完成下列问题:

(1) 求展开式中系数最大的项;

(2) 求展开式中的常数项.

(备注: 如果多个条件分别解答, 按第一个条件计分)

**【答案】** (1)  $126x^{-3}$ ;

(2) 84.

**【分析】** 分别对补充的条件进行分析, 选①直接可求出  $n$  的值, 进而即可解出;

选②进行转化解出  $n$  的值, 进而即可解出;

选③通过列出等式, 即可解出.

**【解答】** 解: 选择①:  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46$ , 即  $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$ ,

即  $n^2 + n - 90 = 0$ , 解得  $n = 9$  或  $n = -10$  (舍去).

选择②:  $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 256$ , 即  $2^{n-1} = 256$ , 解得  $n = 9$ .

选择③:  $T_{r+1} = (-1)^r C_n^r x^{\frac{3r-2n}{2}}$ , 则有  $\frac{3r-2n}{2} = 0$ , 所以  $n = \frac{3}{2}r$ .

因为展开式中第 7 项为常数项, 即  $r = 6$ , 所以  $n = 9$ .

(1) 展开式中系数最大的项为第 5 项,  $T_5 = C_9^4 (\frac{1}{x})^5 (-\sqrt{x})^4 = 126x^{-3}$ ,

(2) 展开式的通项为  $T_{r+1} = C_9^r \left(\frac{1}{x}\right)^{9-r} (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_9^r x^{\frac{3r-18}{2}}$ ,

$$\text{令 } \frac{3r-18}{2} = 0,$$

$$\therefore r = 6,$$

$$\therefore \text{展开式中常数项为第 7 项, 常数项为 } T_7 = C_9^6 (-1)^6 = 84.$$

18. (12 分) 设函数  $f(x) = 2^x + (p-1) \cdot 2^{-x}$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数.

(1) 求  $p$  的值;

(2) 若  $g(x) = f(2x) - 2k \cdot (2^x - 2^{-x})$  在  $[1, +\infty)$  上最小值为  $-4$ , 求  $k$  的值.

**【答案】** (1) 2;

$$(2) k = \sqrt{6}.$$

**【分析】** (1) 由偶函数的定义可得  $f(-x) = f(x)$ , 结合恒等式的性质可得  $p$  的值;

(2) 求得  $g(x)$  的解析式, 设  $t = 2^x - 2^{-x}$ , 再设  $h(t) = t^2 - 2kt + 2$ , 对称轴为  $t = k$ , 讨论对称轴与区间的关系, 可得最小值, 求得  $k$  的值.

**【解答】** 解: (1) 根据题意, 函数  $f(x) = 2^x + (p-1) \cdot 2^{-x}$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数, 可得  $f(-x) = f(x)$ , 即为  $2^{-x} + (p-1) \cdot 2^x = 2^x + (p-1) \cdot 2^{-x}$ ,

$$\text{化为 } (2^x - 2^{-x})(p-2) = 0,$$

由  $x \in \mathbf{R}$ , 可得  $p-2=0$ , 即  $p=2$ ;

$$(2) \text{ 根据题意, } (2) g(x) = f(2x) - 2k \cdot (2^x - 2^{-x}) = 4^x + 4^{-x} - 2k(2^x - 2^{-x}),$$

设  $t = 2^x - 2^{-x}$ , 由  $x \geq 1$ ,  $t = 2^x - 2^{-x}$  递增, 可得  $t \geq \frac{3}{2}$ ,

设  $h(t) = t^2 - 2kt + 2$ , 对称轴为  $t = k$ ,

当  $k \leq \frac{3}{2}$  时,  $h(t)$  在  $[\frac{3}{2}, +\infty)$  递增, 可得  $h(t)$  的最小值为  $h(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 3k + 2 = -4$ ,

解得  $k = \frac{11}{4} > \frac{3}{2}$ , 舍去;

当  $k > \frac{3}{2}$  时,  $h(t)$  在  $t = k$  处取得最小值, 且为  $2 - k^2 = -4$ ,

$$\text{解得 } k = \sqrt{6} \text{ (} -\sqrt{6} \text{ 舍去),}$$

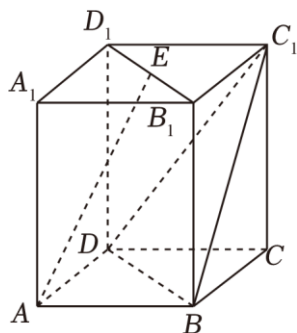
综上可得,  $k = \sqrt{6}$ .

19. (12 分) 已知直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,

$E$  为线段  $B_1D_1$  上中点.

(1) 证明:  $AE \parallel$  平面  $BC_1D$ ;

(2) 求  $CE$  与平面  $BC_1D$  所成角的正弦值.



【答案】(1) 证明见解答.

(2)  $30^\circ$ .

【分析】(1) 根据线面平行的判定定理即可证明.

(2) 建立空间直角坐标系, 利用向量的数量积即可.

【解答】(1) 证明: 取  $BD$  中点为点  $F$ ,  $EC_1 \parallel AF$ ,  $EC_1 = AF$ ,

所以四边形  $AFC_1E$  为平行四边形,

所以  $AE \parallel FC_1$ ,  $AE \notin$  平面  $BDC_1$ ,

$FC_1 \subset$  平面  $BDC_1$ ,

所以  $AE \parallel$  平面  $BDC_1$ .

(2) 解: 以  $\overrightarrow{FB}$  的方向为  $x$  轴正方向, 以  $\overrightarrow{FC}$  的方向为  $y$  轴正方向, 以  $\overrightarrow{FE}$  的方向为  $z$  轴正方向, 建立空间直角坐标系,

$C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ ,  $E(0, 0, 6)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $D(-2, 0, 0)$ ,  $C_1(2\sqrt{3}, 0, 6)$ ,

$\overrightarrow{CE} = (0, -2\sqrt{3}, 6)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (-4, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{3} - 2, 0, 6)$ ,

设平面  $BDC_1$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -4x = 0 \\ (2\sqrt{3} - 2)x + 6z = 0 \end{cases},$$

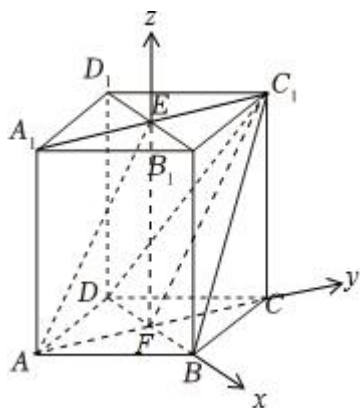
不妨令  $y = 1$ , 则  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ ,

设  $CE$  与平面  $BC_1D$  所成角为  $\theta$ ,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CE}|}{|\vec{n}| \times |\overrightarrow{CE}|} = \frac{1}{2},$$

所以  $90^\circ - \theta = 60^\circ$ ,

所以  $CE$  与平面  $BC_1D$  所成角为  $30^\circ$  .



20. (12 分) 某高校男、女学生人数基本相当, 为了解该校英语四级考试情况, 随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各 60 名学生的成绩, 情况如表:

|    | 合格 | 不合格 |
|----|----|-----|
| 男生 | 35 | 25  |
| 女生 | 45 | 15  |

- (1) 是否有 99% 的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关?
- (2) 从这 60 名男生中任意选 2 人, 求这 2 人中合格人数的概率分布及数学期望;
- (3) 将抽取的这 120 名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率. 若学生首次考试不合格, 则经过一段时间的努力, 第二次参加考试合格的概率会增加  $\frac{1}{6}$ . 现从该校学生中任意抽取 2 名学生, 求至多两次英语四级考试后, 这两人全部合格的概率.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001  |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $k$             | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

**【答案】** (1) 没有 99% 的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关;

(2) 分布列见解析, 数学期望为  $\frac{7}{6}$ ;

(3) 概率为  $\frac{289}{324}$ .

**【分析】** (1) 由题意, 代入公式求出观测值, 将其与临界值进行对比, 进而即可求解;

(2) 先得到  $X$  的所有可能取值, 求出相对应的概率, 列出分布列, 代入期望公式中即可求解;

(3) 结合概率乘法公式以及加法公式进行求解即可.

**【解答】** 解: (1) 易知在随机抽取该校首次参加英语四级考试的男、女各 60 名学生的成绩,

其中合格人数为  $35+45=80$ （人），不合格人数为  $25+15=40$ （人），

$$\text{则 } K^2 = \frac{120 \times (35 \times 15 - 45 \times 25)^2}{60 \times 60 \times 80 \times 40} = 3.75 < 6.635,$$

所以我们没有 99% 的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关；

（2）记从这 60 名男生中任意选 2 人，这 2 人中合格人数为  $X$ ，

则  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2，

$$\text{此时 } P(X=0) = \frac{C_{25}^2}{C_{60}^2} = \frac{10}{59}, \quad P(X=1) = \frac{C_{35}^1 C_{25}^1}{C_{60}^2} = \frac{175}{354}, \quad P(X=2) = \frac{C_{35}^2}{C_{60}^2} = \frac{119}{354},$$

所以  $X$  的分布列为：

|     |                 |                   |                   |
|-----|-----------------|-------------------|-------------------|
| $X$ | 0               | 1                 | 2                 |
| $P$ | $\frac{10}{59}$ | $\frac{175}{354}$ | $\frac{119}{354}$ |

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{10}{59} + 1 \times \frac{175}{354} + 2 \times \frac{119}{354} = \frac{7}{6};$$

（3）已知该校学生首次参加英语四级考试成绩合格的概率为  $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ ，

而首次不合格第二次合格的概率为  $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ ，

所以两位同学都首次参加英语四级考试成绩合格的概率为  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ，

两位同学其中一位首次合格，另一位同学首次不合格，第二次合格的概率为  $2 \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$ ，

两位同学都首次不合格，第二次都合格的概率为  $(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{324}$ ，

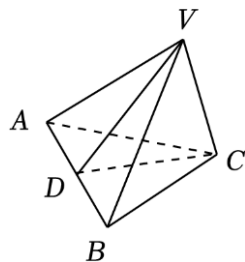
所以至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率为  $\frac{4}{9} + \frac{10}{27} + \frac{25}{324} = \frac{289}{324}$ 。

21.（12 分）在三棱锥  $V-ABC$  中， $VA=VB=AB=2$ ， $CB=CA=\sqrt{5}$ ， $BC=1$ ， $D$  是  $AB$  的中点。

（1）证明：平面  $VCD \perp$  平面  $ABC$ ；

（2）求二面角  $V-BC-A$  正弦值；

（3）求直线  $VA$  与平面  $VBC$  所成的角。



【答案】(1) 证明过程见解答；(2)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ；(3)  $\frac{\pi}{3}$ .

【分析】(1) 通过证明  $AB \perp$  平面  $VCD$ ，能证明平面  $VCD \perp$  平面  $ABC$ ；

(2) 建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角  $V-BC-A$  的余弦值，再转化为正弦值.

(3) 利用向量法求出直线  $VA$  与平面  $VBC$  所成角的正弦值，进而能求出结果.

【解答】解：(1) 证明： $\because VA=VB, CB=CA, D$  是  $AB$  的中点，

$\therefore AB \perp VD, AB \perp CD,$

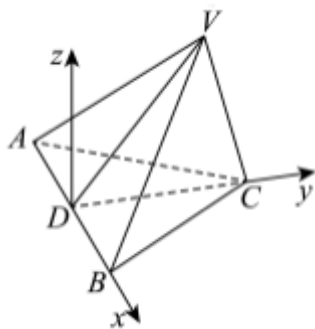
$\because CD \cap VD = D, \therefore AB \perp$  平面  $VCD,$

$\because AB \subset$  平面  $ABC, \therefore$  平面  $VCD \perp$  平面  $ABC;$

(2)  $\because VD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, CD = \sqrt{5 - 1} = 2, VC = 1,$

$\therefore VD^2 + VC^2 = CD^2, \therefore VD \perp VC,$  且  $\angle VDC = 30^\circ,$

以  $D$  为坐标原点，建立空间直角坐标系，如图，



则  $B(1, 0, 0), C(0, 2, 0), A(-1, 0, 0), V(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$

$\overrightarrow{VA} = (-1, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{VB} = (1, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{BC} = (-1, 2, 0),$

平面  $ABC$  的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1),$

设平面  $VBC$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z),$

则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{VB} = x - \frac{3}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x + 2y = 0 \end{cases}$ , 取  $z=1$ , 得  $\vec{m} = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1),$

设二面角  $V-BC-A$  为  $\theta$ ，由图知  $\theta$  为锐角，

$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{12+3+1}} = \frac{1}{4},$

$\therefore$  二面角  $V-BC-A$  正弦值为  $\sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4};$

(3) 设直线  $VA$  与平面  $VBC$  所成角为  $\alpha$ ,

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{VA}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{VA}|} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$  线面角的取值范围是  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$\therefore$  直线  $VA$  与平面  $VBC$  所成的角为  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

22. (12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若对于任意的  $x \in (1, +\infty)$ , 关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq x+1+a\ln x$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

**【答案】** (1) 单调递减区间为  $(-\infty, 0)$  和  $(0, 3)$ , 单调递增区间为  $(3, +\infty)$ ;

(2)  $(-\infty, -3]$ .

**【分析】** (1) 求导, 根据导数确定到导函数的正负即可求解;

(2) 分离参数, 将问题转化为  $\frac{e^x - x - 1}{\ln x} \geq a$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 构造函数  $n(x) = e^x - x - 1$ , 利用放缩法即可求解, 构造  $g(x) = x - 3\ln x$  求解等号成立的条件即可.

**【解答】** 解: (1) 由  $f(x) = \frac{e^x}{x^3} (x \neq 0)$ , 得  $f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 则  $x = 3$ ,

所以当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减;

当  $0 < x < 3$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减;

当  $x > 3$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增,

故  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\infty, 0)$  和  $(0, 3)$ , 单调递增区间为  $(3, +\infty)$ .

(2) 由  $f(x) \geq x+1+a\ln x$ , 可得  $\frac{e^x}{x^3} \geq x+1+a\ln x$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

所以  $\frac{\frac{e^x}{x^3} - x - 1}{\ln x} \geq a$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

设  $n(x) = e^x - x - 1$ , 则  $n'(x) = e^x - 1$ ,

当  $x > 0$  时,  $n'(x) > 0$ ,  $n(x)$  单调递增; 当  $x < 0$ ,  $n'(x) < 0$ ,  $n(x)$  单调递减,

所以  $n(x) \geq n(1) = 0$ , 故  $e^x \geq x+1$ , 当且仅当  $x=0$  时等号成立,

$$\frac{\frac{e^x}{x^3} - x - 1}{\ln x} = \frac{e^{x-3} \ln x - x - 1}{\ln x} \geq \frac{x - 3 \ln x + 1 - x - 1}{\ln x} = -3, \text{ 当且仅当 } x - 3 \ln x = 0 \text{ 时取等号,}$$

令  $g(x) = x - 3 \ln x$ , 因为  $g(1) = 1 > 0$ ,  $g(e) = e - 3 < 0$ ,

所以存在  $x_0 \in (1, e)$  使  $g(x_0) = 0$ , 所以等号取得到,

故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -3]$ .