

2022-2023 学年江苏省扬州市高一（下）期初数学试卷（B 卷）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）．

- （5 分）已知集合 $A = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $(0, 2]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-1, 2]$ D. $(0, 3]$
- （5 分）若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()
 A. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$
 C. $\forall x \notin \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$
- （5 分）若函数 $f(x)$ 满足 $f(3^x) = x$, 则 $f(7) =$ ()
 A. 3^7 B. 7^3 C. $\log_3 7$ D. $\log_7 3$
- （5 分）下列各组函数，既是奇函数，又在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增的为 ()
 A. $y = \sin x, y = \cos x$ B. $y = \sin x, y = \tan x$
 C. $y = \tan x, y = \cos x$ D. $y = \tan x, y = -\sin x$
- （5 分）对于实数 a, b, c , 下列命题中正确的是 ()
 A. 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$
 B. 若 $a > b (ab \neq 0)$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 C. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$
 D. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$
- （5 分）某企业由于引进新的技术，产值逐年增长，如果从 2023 年起，每年的产值比上一年平均增加 20%，那么至少经过 () 年产值翻两番（即原来的 4 倍）．（参考数据： $\lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771$ ）
 A. 5 B. 8 C. 11 D. 14
- （5 分）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立．若 $f(m-1) > f(2m-3)$, 则实数 m 的取值范围为 ()
 A. $m < \frac{4}{3}$ 或 $m > 2$ B. $\frac{4}{3} < m < 2$ C. $m < \frac{2}{3}$ 或 $m > 4$ D. $\frac{2}{3} < m < 4$
- （5 分）已知函数 $f(x) = \begin{cases} |e^x - 1|, & x < 1 \\ -\sin \pi x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$

$$x_4), \text{ 则 } \frac{e^{x_3+x_4}}{e^{x_1}+e^{x_2}} = (\quad)$$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{e^3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{e^3}{2}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）

（多选）9.（5 分）下列说法中正确的有（ ）

- A. $0.5^{1.2} > 0.5^{1.5}$ B. $0.5^{\frac{2}{3}} > 0.8^{\frac{2}{3}}$
C. $\log_2 \pi > \log_2 3$ D. $\log_5 4 < \log_{0.2} 3$

（多选）10.（5 分）对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ ，下列说法中正确的有（ ）

- A. 若 $f(-3) = f(3)$ ，则 $f(x)$ 是偶函数
B. 若 $f(2) > f(3)$ ，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数
C. 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 和 $(0, +\infty)$ 上都单调递减，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数
D. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增．若 $x_1 + x_2 > 0$ ，则 $f(x_1) + f(x_2) > 0$

（多选）11.（5 分）已知 $x+3y=1$ ($x>0, y>0$)，则下列说法中正确的有（ ）

- A. xy 的最大值为 $\frac{1}{12}$
B. $2^x + 8^y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$
C. $x^2 + 9y^2$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $4 + 2\sqrt{3}$

（多选）12.（5 分）已知函数 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ ，则下列说法中正确的有（ ）

- A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 对称
B. $f(x)$ 的图象可由函数 $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的图象上每一个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）

得到

- C. 若 $f(x)$ 在区间 $(-\lambda, \lambda)$ 上单调，则实数 λ 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{6}]$
D. 若存在 $x_1, x_2 \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ ，使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 4$ ，则 $x_1 - 2x_2$ 的最大值为 $\frac{10}{3}\pi$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.（5 分）已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(3, \sqrt{3})$ ，则 $f(4)$ 的值等于_____.

14. (5分) 折扇(如图1)是我国传统文化的延续, 已有四千年左右的历史. 图2为其结构简化图, 在扇面 $ABCD$ 中, 延长 DA , CB 交于点 O , 已知 $OC=3OB=30\text{cm}$, 弧 CD 的长度为 60cm , 则该扇面 $ABCD$ 的面积为 _____ cm^2 .



图1

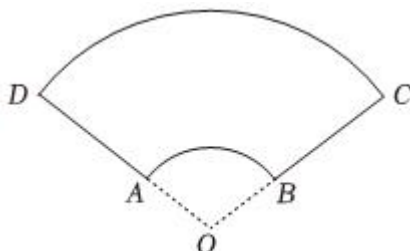


图2

15. (5分) 若函数 $f(x)$ 满足: ① $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+2) = f(x)$; ② $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$, 则 $f(x) =$ _____. (写出满足要求的一个函数即可)
16. (5分) 已知函数 $f(x) = |x-2| + |x+a|$, 实数 a 满足: $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}^*, a^2 - 2a + 1 - \frac{1}{n^2} < 0$, 则 a 的值为 _____, 若 $f(3m + \frac{1}{2}) < f(2m-1)$, 则实数 m 的取值范围为 _____.

四、解答题(本大题共6小题, 计70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分) (1) 已知 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的值;

(2) 求值: $9^{\frac{1}{2}} + 2^{\log_2 3} - (\lg 4 + \lg 25)$.

18. (12分) 给出下列三个条件: ①角 α 的终边经过点 $P(3m, -4m)$ ($m \neq 0$); ② $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}$; ③ $3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha = 3$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$).

请从这三个条件中任选一个, 解答下列问题:

(1) 若 α 为第四象限角, 求 $\sin \alpha - 2\cos \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\sin(-\alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2(\pi - \alpha) - 2\cos^2(-\alpha)}$ 的值.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = 4x - \frac{a}{x}$, 且 $f(1) = 3$.

(1) 求实数 a 的值, 并用单调性定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 若当 $x \in [1, m]$ ($m > 1$) 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{15}{2}$, 求实数 m 的值.

20. (12分) 已知关于 x 的不等式 $(x+a+2)(x-a) > 0$ 的解集为 A , 函数 $y = 6\sin(x + \frac{\pi}{3}) - 9$ ($-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$) 的值域为 B .

(1) 若 $a=3$, 求 $(\mathbf{C}_{\mathbf{R}} A) \cup B$;

(2) 若 $B \subsetneq A$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $A(-\frac{\pi}{3}, 0)$.

(1) 若 A 到 $f(x)$ 图象对称轴的最近距离为 $\frac{\pi}{2}$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 问是否存在实数 ω , 使得 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调? 若

存在, 求出满足要求的所有 ω 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + ax + m$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 记 $D = [-1, \log_2(4 + \sqrt{15})]$,

① 当 $x \in D$ 时, 求 $f(x)$ 的值域 (用 m 表示);

② 若存在 $r, s, t \in D$, 使得 $f(r) + f(s) = f(t)$, 求实数 m 的范围.

2022-2023 学年江苏省扬州市高一（下）期初数学试卷（B 卷）

参考答案与试题解析

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）．

1. （5 分）已知集合 $A = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(0, 2]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-1, 2]$ D. $(0, 3]$

【答案】A

【分析】根据交集概念进行计算.

【解答】解：集合 $A = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x | 0 < x \leq 3\} \cap \{x | -1 \leq x \leq 2\} = (0, 2].$$

故选：A.

2. （5 分）若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$
C. $\forall x \notin \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$

【答案】D

【分析】存在改任意，将结论取反，即可求解.

【解答】解：命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$,

则 $\neg p$ 为 $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$.

故选：D.

3. （5 分）若函数 $f(x)$ 满足 $f(3^x) = x$, 则 $f(7) =$ ()

- A. 3^7 B. 7^3 C. $\log_3 7$ D. $\log_7 3$

【答案】C

【分析】由 $3^x = 7$ 求出 x 后代入可得结论.

【解答】解：令 $3^x = 7$,

$$\therefore x = \log_3 7,$$

$$\therefore f(7) = \log_3 7.$$

故选：C.

4. （5 分）下列各组函数，既是奇函数，又在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增的为 ()

A. $y=\sin x, y=\cos x$

B. $y=\sin x, y=\tan x$

C. $y=\tan x, y=\cos x$

D. $y=\tan x, y=-\sin x$

【答案】B

【分析】根据正弦函数、余弦函数和正切函数的性质分析判断即可.

【解答】解：因为 $y=\sin x, y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为奇函数， $y=\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为偶函数，所以排除 AC，

因为 $y=\sin x, y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增， $y=-\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 B 符合题意，D 不合题意.

故选：B.

5. (5 分) 对于实数 a, b, c ，下列命题中正确的是 ()

A. 若 $a>b$ ，则 $a^2>b^2$

B. 若 $a>b$ ($ab \neq 0$)，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. 若 $a>b$ ，则 $ac^2>bc^2$

D. 若 $ac^2>bc^2$ ，则 $a>b$

【答案】D

【分析】由特殊值判断选项 A, B, C 错误，由不等式的基本性质判断 D 正确.

【解答】解：对于 A，由 $a>b$ ，取 $a=2, b=-3$ ，则 $a^2>b^2$ 不成立，故 A 错误；

对于 B，由 $a>b$ ($ab \neq 0$)，取 $a=1, b=-1$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立，故 B 错误；

对于 C，当 $c=0$ 时， $ac^2>bc^2$ 不成立，故 C 错误；

对于 D，因为 $ac^2>bc^2$ ，所以 $c^2>0$ ，故 $a \cdot c^2 > b \cdot c^2 \times \frac{1}{c^2}$ ，则 $a>b$ ，故 D 正确.

故选：D.

6. (5 分) 某企业由于引进新的技术，产值逐年增长，如果从 2023 年起，每年的产值比上一年平均增加 20%，那么至少经过 () 年产值翻两番 (即原来的 4 倍). (参考数据： $\lg 2=0.3010, \lg 3=0.4771$)

A. 5

B. 8

C. 11

D. 14

【答案】B

【分析】运用对数运算公式计算即可.

【解答】解：设至少经过 n 年产值翻两番，则 $(1+20\%)^n=4$,

解

得

:

$$n = \log_{1.2} 4 = \frac{\lg 4}{\lg 1.2} = \frac{2\lg 2}{\lg \frac{12}{10}} = \frac{2\lg 2}{\lg 12 - \lg 10} = \frac{2\lg 2}{\lg 3 + \lg 4 - 1} = \frac{2\lg 2}{\lg 3 + 2\lg 2 - 1} = \frac{2 \times 0.3010}{0.4771 + 2 \times 0.3010 - 1} \approx$$

7.61,

所以至少经过 8 年产值翻两番.

故选: B.

7. (5 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

成立. 若 $f(m-1) > f(2m-3)$, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m < \frac{4}{3}$ 或 $m > 2$ B. $\frac{4}{3} < m < 2$ C. $m < \frac{2}{3}$ 或 $m > 4$ D. $\frac{2}{3} < m < 4$

【答案】A

【分析】根据函数的奇偶性以及单调性, 即可转化为 $|m-1| < |2m-3|$, 即可求解.

【解答】解: 由任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$

单调递减,

由于 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增,

由 $f(m-1) > f(2m-3)$ 得 $|m-1| < |2m-3|$, 平方可得 $3m^2 - 10m + 8 > 0$,

解得 $m < \frac{4}{3}$ 或 $m > 2$.

故选: A.

8. (5 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |e^x - 1|, & x < 1 \\ -\sin \pi x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ ($x_1 < x_2 < x_3 <$

x_4), 则 $\frac{e^{x_3+x_4}}{e^{x_1} + e^{x_2}} = ()$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{e^3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{e^3}{2}$

【答案】D

【分析】根据指数函数的性质, 整理 x_1, x_2 的方程, 可得 $e^{x_1} + e^{x_2}$ 的值; 根据三角函数的对称性, 可得 $x_3 + x_4$ 的值, 可得答案.

【解答】解: 当 $x < 0$ 时, $0 < e^x < 1$, 则 $|e^x - 1| = 1 - e^x$, 当 $0 < x < 1$ 时, $1 < e^x < e$, 则 $|e^x - 1| = e^x - 1$;

由题意, 可得 $1 - e^{x_1} = e^{x_2} - 1$, 则 $e^{x_1} + e^{x_2} = 2$.

若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, $\because f(1) > f(0)$, 在 $\mathbf{R}$ 上不是减函数, 故 C 错误,

对于选项 D , 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 是奇函数图像关于原点对称,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上也单调递增,

于是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\because x_1 + x_2 > 0, x_1 > -x_2, \therefore f(x_1) > f(-x_2)$,

$\because f(x)$ 奇函数, $\therefore f(x_1) > -f(x_2)$,

则 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 故 D 正确.

故选: BD .

(多选) 11. (5 分) 已知 $x+3y=1$ ($x>0, y>0$), 则下列说法中正确的有 ()

A. xy 的最大值为 $\frac{1}{12}$

B. 2^x+8^y 的最小值为 $2\sqrt{2}$

C. x^2+9y^2 的最大值为 $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$

【答案】 ABD

【分析】 A 选项, 使用基本不等式得到 $x+3y \geq 2\sqrt{3xy}$, 求出 $xy \leq \frac{1}{12}$;

B 选项, 直接对 2^x+8^y 使用基本不等式求出答案;

C 选项, 利用 $x^2+9y^2 \geq 6xy$ 求出 x^2+9y^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 判断 C 错误;

D 选项, 利用基本不等式“1”的妙用求出最小值.

【解答】 解: A 选项, 因为 $x>0, y>0$, 所以 $x+3y \geq 2\sqrt{3xy}$, 即 $1 \geq 2\sqrt{3xy}$, 解得 $xy \leq \frac{1}{12}$,

当且仅当 $x=3y=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, A 正确;

B 选项, 因为 $2^x>0, 8^y>0$,

由基本不等式得 $2^x+8^y=2^x+2^{3y} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{3y}} = 2\sqrt{2^{x+3y}}$,

当且仅当 $x=3y=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, B 正确;

C 选项, 由基本不等式得 $x^2+9y^2 \geq 6xy$,

故 $2(x^2+9y^2) \geq x^2+9y^2+6xy = (x+3y)^2 = 1$, 故 $x^2+9y^2 \geq \frac{1}{2}$,

当且仅当 $x=3y=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 x^2+9y^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$, C 错误;

D 选项, 因为 $x>0, y>0$,

所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(x+3y) = 1+3+\frac{3y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4+2\sqrt{\frac{3y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 4+2\sqrt{3}$,

当且仅当 $\frac{3y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x=\sqrt{3}y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时, 等号成立,

故 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$, D 正确.

故选: ABD.

(多选) 12. (5 分) 已知函数 $f(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$, 则下列说法中正确的有 ()

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ 对称

B. $f(x)$ 的图象可由函数 $y=2\cos(x-\frac{\pi}{6})$ 的图象上每一个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)

得到

C. 若 $f(x)$ 在区间 $(-\lambda, \lambda)$ 上单调, 则实数 λ 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{6}]$

D. 若存在 $x_1, x_2 \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 4$, 则 $x_1 - 2x_2$ 的最大值为 $\frac{10}{3}\pi$

【答案】 ACD

【分析】 利用整体代入法可求得 $f(x)$ 的对称轴可判断 A 项, 运用图象伸缩变换可判断 B 项, 求出 $f(x)$ 的单调区间, 结合集合包含关系即可判断 C 项, 解方程 $\cos(2x_1 - \frac{\pi}{3}) \cos(2x_2 - \frac{\pi}{3}) = 1$, 再计算 $x_1 - 2x_2$ 比较即可判断 D 项.

【解答】 解: 对于 A 项, 令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ 得: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 则 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 故 A 项正确;

对于 B 项, $y=2\cos(x-\frac{\pi}{6})$ 的图象上每个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍后得到 $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})$, 故 B 项不成立;

对于 C 项, 由题意知, $\lambda - (-\lambda) > 0$, 所以 $\lambda > 0$,

又因为 $-\pi + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得: $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$,

当 $k=0$ 时, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减,

又因为 $f(x)$ 在区间 $(-\lambda, \lambda)$ 上单调,

所以 $0 < \lambda \leq \frac{\pi}{6}$, 故 C 项正确;

对于 D 项, 因为 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 4$, 即: $2\cos(2x_1 - \frac{\pi}{3}) \times 2\cos(2x_2 - \frac{\pi}{3}) = 4$,

所以 $\cos(2x_1 - \frac{\pi}{3}) \cos(2x_2 - \frac{\pi}{3}) = 1$,

所以 $\begin{cases} \cos(2x_1 - \frac{\pi}{3}) = 1 \\ \cos(2x_2 - \frac{\pi}{3}) = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos(2x_1 - \frac{\pi}{3}) = -1 \\ \cos(2x_2 - \frac{\pi}{3}) = -1 \end{cases}$,

又因为 $x_1, x_2 \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

所以解得: $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi, k_1 \in \{-1, 0, 1\} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + k_2\pi, k_2 \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + k_3\pi, k_3 \in \{-2, -1, 0\} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + k_4\pi, k_4 \in \{-2, -1, 0\} \end{cases}$,

所以 $x_1 - 2x_2 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi - 2(\frac{\pi}{6} + k_2\pi) = -\frac{\pi}{6} + (k_1 - 2k_2)\pi$, $k_1, k_2 \in \{-1, 0, 1\}$ 或

$x_1 - 2x_2 = \frac{2\pi}{3} + k_3\pi - 2(\frac{2\pi}{3} + k_4\pi) = -\frac{2\pi}{3} + (k_3 - 2k_4)\pi$, $k_3, k_4 \in \{-2, -1, 0\}$,

所以当 $k_3=0$ 且 $k_4=-2$ 时, $x_1 - 2x_2$ 取得最大值为 $\frac{10\pi}{3}$, 故 D 项正确.

故选: ACD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. (5 分) 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(3, \sqrt{3})$, 则 $f(4)$ 的值等于 2.

【答案】2.

【分析】设幂函数 $f(x) = x^a$, 由 $f(x)$ 过点 $(3, \sqrt{3})$, 知 $3^a = \sqrt{3}$, 由此能求出 $f(4)$.

【解答】解: 设幂函数 $f(x) = x^a$,

$\because f(x)$ 过点 $(3, \sqrt{3})$,

$\therefore 3^a = \sqrt{3}$, $a = \frac{1}{2}$,

$\therefore f(4) = \sqrt{4} = 2$,

故答案为: 2.

14. (5 分) 折扇（如图 1）是我国传统文化的延续，已有四千年左右的历史．图 2 为其结构简化图，在扇

面 $ABCD$ 中，延长 DA ， CB 交于点 O ，已知 $OC=3OB=30\text{cm}$ ，弧 CD 的长度为 60cm ，则该扇面 $ABCD$ 的面积为 800cm^2 。



图1

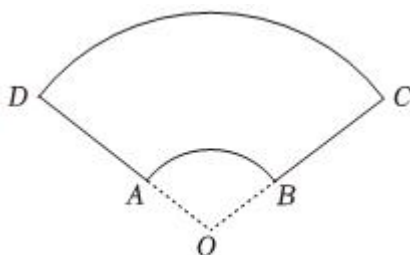


图2

【答案】800.

【分析】利用扇形的面积公式求解即可.

【解答】解：因为 $OC=3OB=30\text{cm}$ ，弧 CD 的长度为 60cm ，则弧 AB 的长度为 $60 \div 3 = 20\text{cm}$ ，

所以该扇面 $ABCD$ 的面积为 $S = S_{\text{扇形}OCD} - S_{\text{扇形}OAB} = \frac{1}{2} \times 60 \times 30 - \frac{1}{2} \times 20 \times 30 = 800\text{cm}^2$ 。

故答案为：800.

15. (5分) 若函数 $f(x)$ 满足：① $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x+2) = f(x)$ ；② $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$ ，则 $f(x) = \underline{\sin \pi x + 1}$ (答案不唯一). (写出满足要求的一个函数即可)

【答案】 $\sin \pi x + 1$ (答案不唯一).

【分析】根据函数的最小正周期和函数值域得到 $f(x) = \sin \pi x + 1$.

【解答】解：因为 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x+2) = f(x)$ ，最小正周期为 2，可考虑正弦函数，

又 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$ ，故可令 $f(x) = \sin \pi x + 1$.

故答案为： $\sin \pi x + 1$ (答案不唯一).

16. (5分) 已知函数 $f(x) = |x-2| + |x+a|$ ，实数 a 满足： $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $a^2 - 2a + 1 - \frac{1}{n^2} < 0$ ，则 a 的值为 1，若 $f(3m + \frac{1}{2}) < f(2m - 1)$ ，则实数 m 的取值范围为 $(-\frac{3}{2}, 0)$ 。

【答案】1， $(-\frac{3}{2}, 0)$ 。

【分析】根据恒成立结合一元二次不等式可得 $a=1$ ，由分段函数的对称性和单调性，对自变量进行分情况讨论，即可求解。

【解答】解：由于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $a^2 - 2a + 1 - \frac{1}{n^2} < 0$ ，

所以 $a^2 - 2a + 1 < \frac{1}{n^2}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，

故 $a^2 - 2a + 1 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \leq 0$ ，故 $a=1$ ，

$$\text{函数 } f(x) = |x-2| + |x+1| = \begin{cases} -2x+1, & x \leq -1 \\ 3, & -1 < x < 2 \\ 2x-1, & x \geq 2 \end{cases}$$

由于 $f(-x+1) = |-x+1-2| + |-x+1+1| = |x+1| + |x-2|$,

所以 $f(x) = f(-x+1)$,

因此 $f(x)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 且 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增,

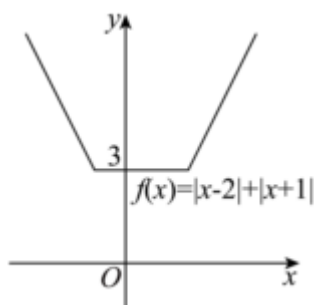
由对称性可知 $f(-2m+2) = f(2m-1)$, $f(3m+\frac{1}{2}) = f(-3m+\frac{1}{2})$,

若 $2 < 2m-1$, 则 $-2m+2 < 3m+\frac{1}{2} < 2m-1$, 此时无解,

若 $-1 \leq 2m-1 \leq 2$, 此时 $f(2m-1) = 3$, 显然不符合要求,

若 $2m-1 < -1$, 则 $f(x)$ 上单调递减, 要使 $f(3m+\frac{1}{2}) < f(2m-1)$, 则

$$2m-1 < 3m+\frac{1}{2} < -2m+2 \Rightarrow -\frac{3}{2} < m < 0.$$



故答案为: 1, $(-\frac{3}{2}, 0)$.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分) (1) 已知 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的值;

(2) 求值: $9^{\frac{1}{2}} + 2^{\log_2 3} - (\lg 4 + \lg 25)$.

【答案】 (1) 6; (2) 4.

【分析】 (1) 由幂指数的运算性质可求解,

(2) 由对数的运算性质以及指数的性质即可化简求值.

【解答】 解: (1) $x + \frac{1}{x} = (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$.

(2) $9^{\frac{1}{2}} + 2^{\log_2 3} - (\lg 4 + \lg 25) = 3 + 2^{\log_2 3} - \lg(4 \times 25) = 3 + 3 - 2 = 4$.

18. (12分) 给出下列三个条件: ①角 α 的终边经过点 $P(3m, -4m)$ ($m \neq 0$); ② $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}$;

③ $3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha = 3$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

请从这三个条件中任选一个, 解答下列问题:

(1) 若 α 为第四象限角, 求 $\sin \alpha - 2\cos \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\sin(-\alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2(\pi - \alpha) - 2\cos^2(-\alpha)}$ 的值.

【答案】 (1) -2.

(2) 6.

【分析】 (1) 选①应用任意角三角函数定义计算三角函数值可得; 选②③根据齐次式求正切, 再联立方程组求解;

(2) 先根据诱导公式化简, 再根据三角函数值代入计算即可.

【解答】 解: (1) 选①, 角 α 的终边经过点 $P(3m, -4m)$ ($m \neq 0$):

$$\because \text{角 } \alpha \text{ 的终边经过点 } P(3m, -4m) (m \neq 0), \therefore \tan \alpha = \frac{-4m}{3m} = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{3} \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \cos \alpha = \pm \frac{3}{5},$$

$$\because \alpha \text{ 为第四象限角}, \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \alpha - 2\cos \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -2.$$

$$\text{选②, } \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}:$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}, \therefore \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \therefore \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{3} \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}, \because \alpha \text{ 为第四象限角}, \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \alpha - 2\cos \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -2.$$

选③, $3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha = 3$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$):

$$\because 3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha = 3, \therefore -4\sin \alpha \cos \alpha = 3 - 3\cos^2 \alpha = 3\sin^2 \alpha,$$

$$\because \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore \sin \alpha \neq 0, \therefore \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \therefore \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{3} \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \cos \alpha = \pm \frac{3}{5},$$

$$\because \alpha \text{ 为第四象限角, } \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \alpha - 2\cos \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -2.$$

$$(2) \because \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{4}{3} < 0, \therefore \alpha \text{ 为第二或第四象限角,}$$

$$\text{①若 } \alpha \text{ 为第二象限角, 则 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{\sin(-\alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2(\pi - \alpha) - 2\cos^2(-\alpha)} = \frac{\frac{4}{5} \times (-\frac{3}{5})}{(\frac{4}{5})^2 - 2 \times (-\frac{3}{5})^2} = 6.$$

$$\text{②若 } \alpha \text{ 为第四象限角, 则 } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{\sin(-\alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2(\pi - \alpha) - 2\cos^2(-\alpha)} = \frac{(-\frac{4}{5}) \times \frac{3}{5}}{(-\frac{4}{5})^2 - 2 \times (\frac{3}{5})^2} = 6.$$

19. (12分) 已知函数 $f(x) = 4x - \frac{a}{x}$, 且 $f(1) = 3$.

(1) 求实数 a 的值, 并用单调性定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 若当 $x \in [1, m]$ ($m > 1$) 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{15}{2}$, 求实数 m 的值.

【答案】 (1) $a=1$, 证明见解析

(2) 2.

【分析】 (1) 由单调性的定义即可求解,

(2) 利用单调性即可求解最值.

【解答】 解: (1) 由 $f(1) = 4 - a = 3$ 得 $a=1$,

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = 4x_1 - \frac{1}{x_1} - 4x_2 + \frac{1}{x_2} = 4(x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$4(x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left(4 + \frac{1}{x_1 x_2}\right).$$

$$\text{由 } x_2 > x_1 > 0, \text{ 得 } x_1 - x_2 < 0, \quad 4 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0,$$

所以 $(x_1 - x_2) \left(4 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) < 0$,

所以 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由(1)知 $f(x)$ 在 $[1, m]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = f(m) = \frac{15}{2}$,

即 $4m - \frac{1}{m} = \frac{15}{2}$, 解得 $m=2$ 或 $m=-\frac{1}{8}$ (舍去), 所以 $m=2$.

20. (12分) 已知关于 x 的不等式 $(x+a+2)(x-a) > 0$ 的解集为 A , 函数

$y = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 9 \left(-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$ 的值域为 B .

(1) 若 $a=3$, 求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$;

(2) 若 $B \subsetneq A$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $[-9, 3]$.

(2) $(-3, 1)$.

【分析】 (1) 根据三角函数的性质可得 $B = [-9, -3]$, 进而由一元二次不等式化简集合 A , 由集合的交并补运算即可求解,

(2) 分类讨论一元二次不等式, 进而由真子集的关系即可求解.

【解答】 解: (1) 因为 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 所以 $0 \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [0, 1]$,
所以 $6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [0, 6]$, 所以 $6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 9 \in [-9, -3]$, 所以 $B = [-9, -3]$.

当 $a=3$ 时, $A = \{x | x^2 + 2x - 15 > 0\} = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -5\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$,

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = [-9, 3]$.

(2) $A = \{x | (x+a+2)(x-a) > 0\}$,

① 当 $a = -a-2$, 即 $a = -1$ 时, $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 满足 $B \subsetneq A$;

② 当 $a > -a-2$, 即 $a > -1$ 时, $A = (-\infty, -a-2) \cup (a, +\infty)$, 由 $B \subsetneq A$, 得 $-3 < -a-2$ 或 $a < -9$, 解得 $a < -9$ 或 $a < 1$, 又 $a > -1$, 所以 $-1 < a < 1$;

③ 当 $a < -a-2$, 即 $a < -1$ 时, $A = (-\infty, a) \cup (-a-2, +\infty)$, 由 $B \subsetneq A$, $-3 < a$ 或 $-a-2 < -9$, 得 $a > -3$ 或 $a > 7$,

又 $a < -1$, 所以 $-3 < a < -1$.

综上得: a 的取值范围是 $(-3, 1)$.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$, ($\omega > 0$, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $A\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

(1) 若 A 到 $f(x)$ 图象对称轴的最近距离为 $\frac{\pi}{2}$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称, 问是否存在实数 ω , 使得 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调? 若存在, 求出满足要求的所有 ω 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$;

(2) 存在实数 $\omega=1$ 或 3 .

【分析】 (1) 由函数的周期以及经过的点即可求解 $\omega=1$, $\phi=\frac{\pi}{3}$, 进而可求解析式,

(2) 利用函数的对称性可得 $\omega=2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$), 由单调性可得 $\omega \leq 6$, 进而分别代入 $\omega=1, 3, 5$, 检验在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 的单调性, 即可求解.

【解答】 解: (1) 因为 A 到 $f(x)$ 图象对称轴的最近距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的周期为 2π , 又 $\omega > 0$, 所以 $2\pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 则 $\omega=1$.

代入点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 得 $\sin(-\frac{\pi}{3} + \phi) = 0$, 所以 $-\frac{\pi}{3} + \phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又因为 $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\phi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

(2) 因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称.

所以 $-\frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_1\pi$ ①, $\frac{\pi}{6}\omega + \phi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}$ ②, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

② - ① 得 $\frac{\pi}{2}\omega = (k_2 - k_1)\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2(k_2 - k_1) + 1$,

因为 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $\omega > 0$, 所以 $\omega = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$), 即 ω 为正奇数.

因为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调, 所以 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \leq \frac{T}{2}$, 即 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{3}$, 解得 $\omega \leq 6$,

所以 $\omega=1, 3$ 或 5 .

当 $\omega=1$ 时, $-\frac{\pi}{3} + \phi = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\phi = \frac{\pi}{3}$, 此时 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

因为 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{2\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 符合题意;

当 $\omega=3$ 时, $-\pi + \phi = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\phi = 0$, 此时 $f(x) = \sin 3x$.

因为 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\pi < 3x < \frac{3\pi}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 符合题意;

当 $\omega=5$ 时, $-\frac{5\pi}{3} + \phi = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\phi = -\frac{\pi}{3}$, 此时 $f(x) = \sin(5x - \frac{\pi}{3})$.

因为 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{4\pi}{3} < 5x - \frac{\pi}{3} < \frac{13\pi}{6}$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上不单调, 不符合题意.

综上得: 存在实数 $\omega=1$ 或 3 , 使得 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + ax + m$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 记 $D = [-1, \log_2(4 + \sqrt{15})]$,

① 当 $x \in D$ 时, 求 $f(x)$ 的值域 (用 m 表示);

② 若存在 $r, s, t \in D$, 使得 $f(r) + f(s) = f(t)$, 求实数 m 的范围.

【答案】 (1) $a = -1$;

(2) ① $[m+1, m+3]$; ② $m \in [-5, 1]$.

【分析】 (1) 利用偶函数定义可得 $2x = -2ax$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 即可得答案; (2) ① 由 (1) 可得 $f(x) = \log_2(2^x + \frac{1}{2^x}) + m$, 令 $u = 2^x$, 由函数 $g(u) = u + \frac{1}{u}$ 单调性结合 u 范围可得答案; ② 由 ①, 则问题等价于 $[2m+2, 2m+6] \cap [m+1, m+3] \neq \emptyset$ 即可得答案.

【解答】 解: (1) $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. $\therefore f(x) = f(-x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 即 $\log_2(4^x + 1) + ax + m = \log_2(4^{-x} + 1) - ax + m$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立,

即 $\log_2 \frac{4^x + 1}{4^{-x} + 1} = -2ax$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 即 $\log_2 4^x = -2ax$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立,

即 $2x = -2ax$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 所以 $a = -1$.

(2) ① 由 (1) 得 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x + m = \log_2(2^x + \frac{1}{2^x}) + m$,

当 $x \in [-1, \log_2(4 + \sqrt{15})]$ 时, 令 $u = 2^x$, 则 $u \in [\frac{1}{2}, 4 + \sqrt{15}]$, $2^x + \frac{1}{2^x} = u + \frac{1}{u}$,

令 $g(u) = u + \frac{1}{u}$, 下面证明 $g(u)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 4 + \sqrt{15}]$ 上单调递增,

当 $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,

对任意 $u_1, u_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ 且 $u_1 < u_2$,

$$g(u_1) - g(u_2) = (u_1 + \frac{1}{u_1}) - (u_2 + \frac{1}{u_2}) = (u_1 - u_2) (\frac{u_1 u_2 - 1}{u_1 u_2}),$$

$\because u_1 - u_2 < 0, u_1 u_2 \in (\frac{1}{4}, 1), \therefore g(u_1) - g(u_2) > 0, \therefore g(u)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减,

同理可证 $g(u)$ 在 $[1, 4 + \sqrt{15}]$ 上单调递增,

$$\therefore u + \frac{1}{u} \in [2, 8], \therefore \log_2(2^x + \frac{1}{2^x}) + m = \log_2(u + \frac{1}{u}) + m \in [m+1, m+3],$$

$$\therefore \log_2(2^x + \frac{1}{2^x}) + m = \log_2(u + \frac{1}{u}) + m \in [m+1, m+3],$$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[m+1, m+3]$

②由①可知 $f(r), f(s), f(r), f(s), f(t) \in [m+1, m+3]$, 所以 $f(r) + f(s) \in [2m+2, 2m+6]$,

存在实数 $r, s, t \in [-1, \log_2(4 + \sqrt{15})]$, 使得 $f(r) + f(s) = f(t)$

等价于 $[2m+2, 2m+6] \cap [m+1, m+3] \neq \emptyset$,

而若 $[2m+2, 2m+6] \cap [m+1, m+3] = \emptyset$, 则 $m+1 > 2m+6$ 或 $m+3 < 2m+2$, 即 $m < -5$ 或 $m > 1$,

故当 $[2m+2, 2m+6] \cap [m+1, m+3] \neq \emptyset$ 时, $-5 \leq m \leq 1$, 所以 $m \in [-5, 1]$.