

2024 年江苏省扬州中学、盐城中学、淮阴中学、丹阳中学四校高考数学调研试卷

一、单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 若 $(1+i)(1-z)=1$ (i 为虚数单位)，则复数 z 的模为 ()

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2
2. (5 分) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_2=4$, $S_4=6$, 则 $S_6=$ ()

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
3. (5 分) 将座位号为 1, 2, 3, 4 的四张电影票全部分给甲、乙两个人，每人至少一张，若分给同一人多张票，则必须连号，那么不同的分法种数为 ()

A. 4 B. 6 C. 7 D. 12
4. (5 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $y=ax^2$ 的焦点坐标为 ()

A. $(\frac{1}{16}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{8})$ C. $(\frac{1}{8}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{16})$
5. (5 分) 要测定古物的年代，可以用放射性碳法：在动植物的体内都含有微量的放射性 ^{14}C . 动植物死亡后，停止了新陈代谢， ^{14}C 不再产生，且原来的 ^{14}C 会自动衰变. 经过 5730 年，它的残余量只有原始量的一半. 现用放射性碳法测得某古物中 ^{14}C 含量占原来的 $\frac{1}{5}$, 推算该古物约是 m 年前的遗物（参考数据： $(\lg 2)^{-1} \approx 3.3219$ ），则实数 m 的值为 ()

A. 12302 B. 13304 C. 23004 D. 24034
6. (5 分) 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的无穷等比数列，则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
7. (5 分) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC=60^\circ$, 动点 P 在 BC 边上（包括端点），则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 ()

A. $[0, 1]$ B. $[-1, 2]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-1, 1]$

8. (5分) 设方程 $2^x + x + 3 = 0$ 和方程 $\log_2 x + x + 3 = 0$ 的根分别为 p, q , 设函数 $f(x) = (x+p)(x+q)$, 则 ()

- A. $f(2) = f(0) < f(3)$ B. $f(0) = f(3) > f(2)$
C. $f(3) < f(2) = f(0)$ D. $f(0) < f(3) < f(2)$

二、多项选择题：本大题共 3 个小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

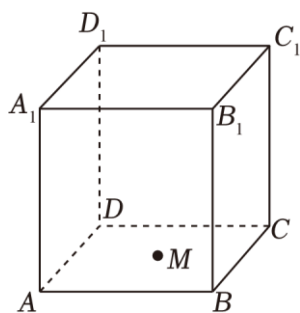
(多选) 9. (6分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + 3^{n-1}a_n = n \cdot 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列结论正确的是 ()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列
B. $S_n = 3n^2 + 6$
C. 数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 10 项和为 30
D. 数列 $\{|a_n - 20|\}$ 的前 20 项和为 284

(多选) 10. (6分) 设函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x$, $\omega > 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\forall \omega \in (0, 1)$, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增
B. 若 $\omega = 1$ 且 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$
C. 若 $|f(x)| = 1$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个不同的解, 则 ω 的取值范围为 $[\frac{5}{6}, \frac{4}{3})$
D. 存在 $\omega \in (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数为奇函数

(多选) 11. (6分) 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为平面 $ABCD$ 内一动点, 则 ()



- A. 若 M 在线段 AB 上, 则 $D_1M + MC$ 的最小值为 $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$
B. 平面 ACD_1 被正方体内切球所截, 则截面面积为 $\frac{\pi}{6}$
C. 若 C_1M 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 则点 M 的轨迹为椭圆
D. 对于给定的点 M , 过 M 有且仅有 3 条直线与直线 D_1A, D_1C 所成角为 60°

三、填空题：本大题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

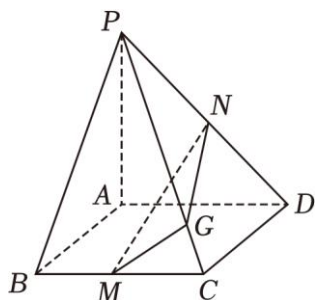
12. (5 分) $(x - 2y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是 _____。(用数字作答)
13. (5 分) 有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2、3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起，已知第 1、2、3 台车床加工的零件数分别占总数的 25%，30%，45%，现从加工出来的零件中任取一个零件，则取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为 _____。
14. (5 分) 已知长方体的表面积为 8，所有棱长和为 16，则长方体体积的最大值为 _____。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = 2$ ， M 是 BC 中点， N 是 PD 中点。

(1) 证明：直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ；

(2) 若 $\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{GC}$ ，求平面 PCD 与平面 GMN 的夹角的余弦值。



16. (15 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $(a+b+c)(a+b-c) = 3$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。

(1) 求角 C ；

(2) 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ ，求 $|CD|$ 的最小值。

17. (15 分) 甲、乙两人进行某棋类比赛，每局比赛时，若决出输赢则获胜方得 2 分，负方得 0 分；若平局则各得 1 分。已知甲在每局中获胜、平局、负的概率均为 $\frac{1}{3}$ ，且各局比赛结果相互独立。

(1) 若比赛共进行了三局，求甲共得 3 分的概率；

(2) 规定比赛最多进行五局，若一方比另一方多得 4 分则停止比赛，求比赛局数 X 的分布列与数学期望。

18. (17 分) 已知焦点在 x 轴上，中心在坐标原点的等轴双曲线 E 经过点 $A(\sqrt{2}, 1)$ ，过点 A 作两条互相垂直的直线分别交双曲线于 B, C 两点。

(1) 若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，求边 BC 所在的直线方程；

(2) 判断原点 O 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的位置关系，并说明理由．

19. (17分) 已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax^2 + 1$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若存在正数 x ，使 $f(x) \geq 0$ 成立，求 a 的取值范围；

(3) 若 $0 < x_1 < x_2$ ，证明：对任意 $a \in (0, +\infty)$ ，存在唯一的实数 $x_0 \in (x_1, x_2)$ ，使得

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ 成立.}$$

2024 年江苏省扬州中学、盐城中学、淮阴中学、丹阳中学四校高考数学调研试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 若 $(1+i)(1-z)=1$ (i 为虚数单位)，则复数 z 的模为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

【答案】C

【分析】利用复数的除法运算求出 z ，再利用求模公式计算即可.

【解答】解：由 $(1+i)(1-z)=1$,

$$\text{得 } 1-z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ 即 } z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\text{所以 } |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：C.

2. (5 分) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_2=4$, $S_4=6$, 则 $S_6=$ ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【答案】A

【分析】由等比数列的性质得 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列，从而得到关于 S_6 的方程，再求出 S_6 .

【解答】解： $\because S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_2=4$, $S_4=6$,

由等比数列的性质，可知 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列，

$$\therefore 4, 2, S_6 - 6 \text{ 成等比数列,}$$

$$\therefore 2^2 = 4(S_6 - 6), \text{ 解得 } S_6 = 7.$$

故选：A.

3. (5 分) 将座位号为 1, 2, 3, 4 的四张电影票全部分给甲、乙两个人，每人至少一张，若分给同一人多张票，则必须连号，那么不同的分法种数为 ()

- A. 4 B. 6 C. 7 D. 12

【答案】B

【分析】利用分类加法计数原理，结合排列组合知识求解．

【解答】解：①当甲分一张票，乙分三张票时，有 2 种不同的分法，

②当甲分两张票，乙分两张票时，有 2 种不同的分法，

③当甲分三张票，乙分一张票时，有 2 种不同的分法，

所以，一共有 $2+2+2=6$ 种不同的分法．

故选：B．

4. (5 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $y = ax^2$ 的焦点坐标为 ()

- A. $(\frac{1}{16}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{8})$ C. $(\frac{1}{8}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{16})$

【答案】D

【分析】根据椭圆 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，可得 $\sqrt{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解得 a ，进而得出抛物线 $y = ax^2$ 的焦点坐标．

【解答】解：∵椭圆 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

∴ $\sqrt{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解得 $a = 4$ ，

则 $y = ax^2$ 即 $x^2 = \frac{1}{4}y$ 的焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$ ．

故选：D．

5. (5 分) 要测定古物的年代，可以用放射性碳法：在动植物的体内都含有微量的放射性 ^{14}C ．动植物死亡后，停止了新陈代谢， ^{14}C 不再产生，且原来的 ^{14}C 会自动衰变．经过 5730 年，它的残余量只有原始量的一半．现用放射性碳法测得某古物中 ^{14}C 含量占原来的 $\frac{1}{5}$ ，推算该古物约是 m 年前的遗物（参考

数据： $(\lg 2)^{-1} \approx 3.3219$ ），则实数 m 的值为 ()

- A. 12302 B. 13304 C. 23004 D. 24034

【答案】B

【分析】设 ^{14}C 每年的衰变率为 P ，古物中原 ^{14}C 的含量为 a ，然后根据半衰期，建立方程，将已知条件代入取对数，利用对数性质运算即可．

【解答】解：设 ^{14}C 每年的衰变率为 P ，古物中原 ^{14}C 的含量为 a ，

由半衰期，得 $aP^{5730} = \frac{1}{2}a$ ．

所以 $P^{5730} = \frac{1}{2}$ ，即 $P = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730}}$ ．

由题意，知 $p^m = \frac{1}{5}$ ，即 $(\frac{1}{2})^{\frac{m}{5730}} = \frac{1}{5}$ 。

于是 $\frac{m}{5730} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = \log_2 5 = \frac{1 - \lg 2}{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2} - 1 \approx 2.3219$ 。

所以 $m \approx 5730 \times 2.3219 \approx 13304$ 。

故选：B。

6. (5分) 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的无穷等比数列，则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】根据题意，利用等比数列的通项与性质，对两个条件进行正反推理论证，可得所求结论。

【解答】解：根据题意，当 $\{a_n\}$ 为递增数列时，例如 $a_1 = -1$ ，公比 $q = \frac{1}{2}$ ，则 $a_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ ，

此时 $\{a_n\}$ 各项为负数，不存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ，故充分性不成立。

若存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ，则 $\{a_n\}$ 各项为正数，可知首项 $a_1 > 0$ ，公比 $q > 0$ ，

当 $q \in (0, 1)$ 时，则 $\{a_n\}$ 为递减数列，此时存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n < 1$ ，不符合题意；

当 $q \in (1, +\infty)$ 时，则 $\{a_n\}$ 为递增数列，必定存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ 。

因此，若存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ，则可推出 $\{a_n\}$ 为递增数列。

综上所述，“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 1$ ”的必要不充分条件。

故选：B。

7. (5分) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle ABC = 60^\circ$ ，动点 P 在 BC 边上（包括端点），则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 ()
- A. $[0, 1]$ B. $[-1, 2]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-1, 1]$

【答案】C

【分析】设 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，由平面向量的线性运算和数量积运算可得 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} = 4\lambda - 2$ ，结合 λ 的范围即可求得。

【解答】解：由题可得： $\angle BAD = 2\angle ABC = 120^\circ$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos \angle BAD = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2,$$

因为动点 P 在 BC 边上（包括端点），

$$\text{所以设 } \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}^2 = 4\lambda - 2,$$

因为 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，所以 $4\lambda - 2 \in [-2, 2]$.

故选：C.

8. (5分) 设方程 $2^x + x + 3 = 0$ 和方程 $\log_2 x + x + 3 = 0$ 的根分别为 p, q ，设函数 $f(x) = (x+p)(x+q)$ ，则 ()

A. $f(2) = f(0) < f(3)$

B. $f(0) = f(3) > f(2)$

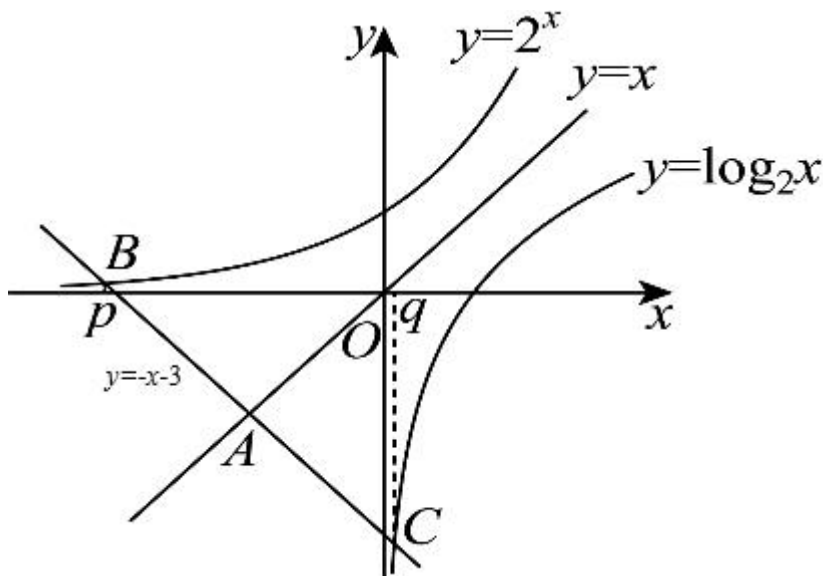
C. $f(3) < f(2) = f(0)$

D. $f(0) < f(3) < f(2)$

【答案】B

【分析】作出 $y=2^x$, $y=-x-3$, $y=\log_2 x$ 的图象，由函数的对称性可得 $\frac{p+q}{2} = -\frac{3}{2}$ ，结合二次函数性质即可得解.

【解答】解：由 $2^x + x + 3 = 0$ ，得 $2^x = -x - 3$ ，由 $\log_2 x + x + 3 = 0$ ，得 $\log_2 x = -x - 3$ ，在同一坐标系中作出 $y=2^x$, $y=-x-3$, $y=\log_2 x$ 这 3 个函数图象，如下图所示：



设 $y=2^x$, $y=-x-3$ 交于点 B , $y=-x-3$, $y=\log_2 x$ 交于点 C ,

由于 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=-x-3$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,

而 $y=-x-3$, $y=x$ 的交点为 $A(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$,

所以 p, q 关于 $x = -\frac{3}{2}$ 对称, 所以 $\frac{p+q}{2} = -\frac{3}{2}$,

又因为函数 $f(x) = (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{p+q}{2}$, 即 $x = -\frac{3}{2}$,

且二次函数 $f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线,

从而 $f(0) = f(3) > f(2)$.

故选: B.

二、多项选择题: 本大题共 3 个小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

(多选) 9. (6 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + 3^{n-1}a_n = n \cdot 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列结论正确的是 ()

A. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

B. $S_n = 3n^2 + 6$

C. 数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 10 项和为 30

D. 数列 $\{|a_n - 20|\}$ 的前 20 项和为 284

【答案】AC

【分析】由数列的递推式可得 $a_n = 3(2n+1)$, 由等差数列的通项公式和求和公式, 可判断 AB; 推得 $(-1)^n a_n = (-1)^n (6n+3)$, $|a_n - 20| = |6n - 17|$, 计算可判断 CD.

【解答】解: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + 3^{n-1}a_n = n \cdot 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$,

可得 $a_1 = 9$, 当 $n \geq 2$ 时, $3^{n-1}a_n = n \cdot 3^{n+1} - (n-1) \cdot 3^n = (2n+1) \cdot 3^n$,

化为 $a_n = 3(2n+1)$,

可得 $\{a_n\}$ 是首项为 9, 公差为 6 的等差数列, $S_n = \frac{1}{2}n(9+6n+3) = 3n^2 + 6n$, 故 A 正确, B 错误;

由 $(-1)^n a_n = (-1)^n (6n+3)$, 可得数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 10 项和为 $(-9+15) + (-21+27) + \cdots + (-57+63) = 5 \times 6 = 30$, 故 C 正确;

由 $|a_n - 20| = |6n - 17|$, 可得 $1 \leq n \leq 2$ 时, $a_n < 20$;

当 $3 \leq n \leq 20$ 时, $a_n > 20$,

则数列 $\{|a_n - 20|\}$ 的前 20 项和为 $11+5+(1+7+\cdots+103)$

$= 16 + \frac{1}{2} \times 18 \times (1+103) = 952$, 故 D 错误.

故选: AC.

(多选)10. (6分) 设函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x$, $\omega > 0$, 则下列结论正确的是()

A. $\forall \omega \in (0, 1)$, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

B. 若 $\omega=1$ 且 $|f(x_1) - f(x_2)|=2$, 则 $|x_1 - x_2|_{\min}=\pi$

C. 若 $|f(x)|=1$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个不同的解, 则 ω 的取值范围为 $[\frac{5}{6}, \frac{4}{3})$

D. 存在 $\omega \in (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数为奇函数

【答案】 ACD

【分析】 A. 根据函数的单调性进行判断; B. 根据条件得到 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 一个是最大值, 一个是最小值, 利用三角函数的对称性进行判断即可; C. 求出角的范围, 作出函数图象, 数形结合进行判断; D. 求出 $g(x)$ 的解析式, 根据 $g(x)$ 是奇函数, 求出 ω 的值, 进行判断.

【解答】 解: 因为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x$, $\omega > 0$,

所以 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6})$,

A. 当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $2\omega x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{6}]$,

因为 $\forall \omega \in (0, 1)$,

所以 $[-\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{6}] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

则此时 $f(x)$ 为增函数, 故 A 正确;

B. 当 $\omega=1$ 时, $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

若 $|f(x_1) - f(x_2)|=2$,

则 $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-1$ 或 $f(x_1)=-1$, $f(x_2)=1$,

即 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 一个是最大值, 一个是最小值,

则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \neq \pi$, 故 B 错误;

C. $x \in [0, \pi]$, 则 $2\omega x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, 2\omega\pi - \frac{\pi}{6}]$,

若 $|f(x)|=1$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个不同的解,

则 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\omega\pi - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$,

解得 $\frac{5}{6} \leq \omega < \frac{4}{3}$, 故 C 正确;

D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$,

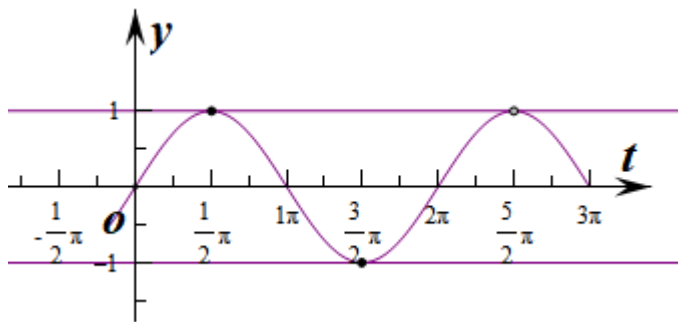
$$\text{则 } g(x) = \sin\left[2\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6}\right),$$

若 $g(x)$ 为奇函数，

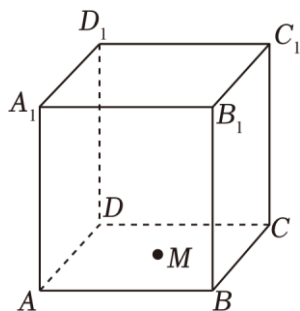
$$\text{则 } \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{解得 } \omega = 3k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

所以当 $k=0$ 时， $\omega = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ ，故 D 正确。

故选：ACD。



(多选) 11. (6分) 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为平面 $ABCD$ 内一动点，则 ()



A. 若 M 在线段 AB 上，则 $D_1M + MC$ 的最小值为 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

B. 平面 ACD_1 被正方体内切球所截，则截面面积为 $\frac{\pi}{6}$

C. 若 C_1M 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则点 M 的轨迹为椭圆

D. 对于给定的点 M ，过 M 有且仅有 3 条直线与直线 D_1A ， D_1C 所成角为 60°

【答案】 ABD

【分析】 对于 A，延长 DA 到 E ，使得 $AE = \sqrt{2}$ ，则 $D_1M + MC$ 是最小值，在 E, M, C 共线时取到；判断 A；

对于 B，求解小圆的半径，然后求解面积，判断 B；

对于 C， C_1M 与 AB 所成的角即为 C_1M 和 C_1D_1 所成角，求解 M 的轨迹是双曲线，判断 C；

对于 D，通过 $\angle PD_1C = \frac{\pi}{3}$ ，则 AD_1CP 是正四面体，的 P 有两种可能，直线 l 也有两种可能，若

$\angle PD_1C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 l 只有一种可能，说明直线 l 有三种可能．判断 D ．

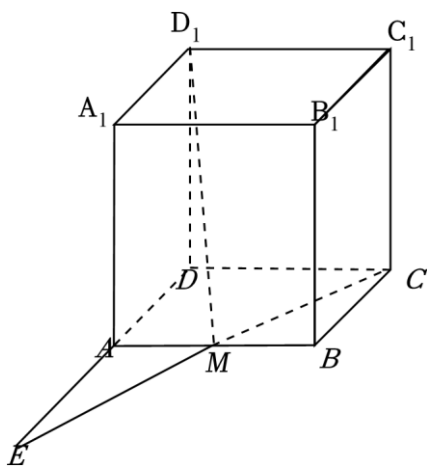
【解答】解：对于 A ，延长 DA 到 E ，使得 $AE = \sqrt{2}$ ，则 $D_1M + MC = EM + MC \geq EC = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ 等号在 E, M, C 共线时取到；故 A 正确；

对于 B ，由于球的半径为 $\frac{1}{2}$ ，球心到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，
故被截得的圆的半径为 $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，故面积为 $\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{6}$ ，故 B 正确；

对于 C ， C_1M 与 AB 所成的角即为 C_1M 和 C_1D_1 所成角，记 $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CD} + y\overrightarrow{CB}$ ，则 $x^2 + y^2 + 1 = 2(y^2 + 1)$ ，即 $x^2 - y^2 = 1$ ，所以 M 的轨迹是双曲线，故 C 错误；

对于 D ，显然过 M 的满足条件的直线数目等于过 D_1 的满足条件的直线 l 的数目，在直线 l 上任取一点 P ，使得 $D_1P = D_1A = D_1C$ ，不妨设 $\angle PD_1A = \frac{\pi}{3}$ ，若 $\angle PD_1C = \frac{\pi}{3}$ ，则 AD_1CP 是正四面体，所以 P 有两种可能，直线 l 也有两种可能，若 $\angle PD_1C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 l 只有一种可能，就是与 $\angle AD_1C$ 的角平分线垂直的直线，所以直线 l 有三种可能．故 D 正确．

故选：ABD．



三、填空题：本大题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. (5 分) $(x - 2y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是 -80．(用数字作答)

【答案】见试题解答内容

【分析】根据二项式定理求出展开式中含 x^2y^3 的项，由此即可求解．

【解答】解：根据二项式定理可得展开式中含 x^2y^3 的项为 $C_5^3 x^2 (-2y)^3 = -80x^2y^3$ ，

所以 x^2y^3 的系数为 -80，

故答案为：-80．

13. (5 分) 有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2、3 台加工的次品率均为

5%，加工出来的零件混放在一起，已知第 1、2、3 台车床加工的零件数分别占总数的 25%，30%，45%，现从加工出来的零件中任取一个零件，则取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为 $\frac{2}{7}$ 。

【答案】 $\frac{2}{7}$ 。

【分析】 可记 A_i 为事件“零件为第 i ($i=1, 2, 3$) 台车床加工”， B 为事件“任取一个零件为次品”，从而可知 $P(A_1)=0.25$, $P(A_2)=0.3$, $P(A_3)=0.45$ ，所以利用 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$ 可求出取到的零件是次品的概率，进一步根据 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}$ ，即可求出取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率。

【解答】 解：记 A_i 为事件“零件为第 i ($i=1, 2, 3$) 台车床加工”， B 为事件“任取一个零件为次品”，则 $P(A_1)=0.25$, $P(A_2)=0.3$, $P(A_3)=0.45$ ，

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$ ，

即 $P(B)=0.25 \times 0.06 + 0.3 \times 0.05 + 0.45 \times 0.05 = 0.0525$ ；

所以取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为：

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{0.3 \times 0.05}{0.0525} = \frac{2}{7}.$$

故答案为： $\frac{2}{7}$ 。

14. (5 分) 已知长方体的表面积为 8，所有棱长和为 16，则长方体体积的最大值为 $\frac{32}{27}$ 。

【答案】 $\frac{32}{27}$ 。

【分析】 设长方体的长，宽，高分别为 a, b, c ，则根据题意易得 $\begin{cases} ab+ac+bc=4 \\ a+b+c=4 \end{cases}$ ，从而可得 $ab=4-c$
 $(a+b)=4-c$ ， $(4-c)^2=4c^2-4c+4$ ，进而可得 $V=abc=c^3-4c^2+4c$, $c \in (0, \frac{4}{3}]$ ，再利用导数，即可求解。

解。

【解答】 解：设长方体的长，宽，高分别为 a, b, c ，

则根据题意可知 $\begin{cases} 2(ab+ac+bc)=8 \\ 4(a+b+c)=16 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} ab+ac+bc=4 \\ a+b+c=4 \end{cases},$$

$$\therefore ab=4-c(a+b)=4-c(4-c)=c^2-4c+4,$$

$$\therefore \text{长方体体积 } V=abc=c^3-4c^2+4c,$$

$$\text{不妨设 } c \leq b \leq a, a+b+c=4, \therefore c \in (0, \frac{4}{3}],$$

$$\text{又 } V' = 3c^2 - 8c + 4 = (3c - 2)(c - 2),$$

∴ 当 $c \in (0, \frac{2}{3})$ 时, $V' > 0$, V 单调递增;

当 $c \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 时, $V' < 0$, V 单调递减,

$$\therefore V_{\max} = V|_{c=\frac{2}{3}} = (\frac{2}{3})^3 - 4 \times (\frac{2}{3})^2 + 4 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{27}.$$

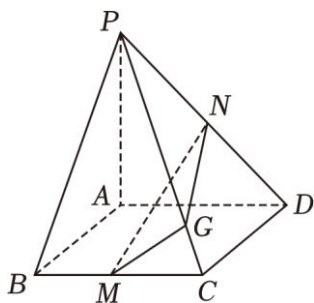
故答案为: $\frac{32}{27}$.

四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=2$, M 是 BC 中点, N 是 PD 中点.

(1) 证明: 直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 若 $\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{GC}$, 求平面 PCD 与平面 GMN 的夹角的余弦值.



【答案】 (1) 证明过程请见解答; (2) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$.

【分析】 (1) 取 PA 的中点为 Q , 连接 QB , QN , 先证四边形 $BMNQ$ 为平行四边形, 可得 $MN \parallel BQ$, 再由线面平行的判定定理, 即可得证;

(2) 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系, 利用向量法求平面与平面的夹角, 即可得解.

【解答】 (1) 证明: 取 PA 的中点为 Q , 连接 QB , QN ,

∵ Q , N 分别为 PA , PD 的中点,

$$\therefore QN = \frac{1}{2}AD \text{ 且 } QN \parallel AD,$$

$$\text{又 } BM = \frac{1}{2}AB, \text{ } BM \parallel AB,$$

∴ $QN = BM$ 且 $QN \parallel BM$, 即四边形 $BMNQ$ 为平行四边形,

$$\therefore MN \parallel BQ,$$

又 $MN \not\subset$ 平面 PAB , $BQ \subset$ 平面 PAB ,

∴ 直线 $MN \parallel$ 平面 PAB .

(2) 解：以 A 为坐标原点， AB ， AD ， AP 所在直线分别为 x ， y ， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(2, 0, 0)$ ， $C(2, 2, 0)$ ， $D(0, 2, 0)$ ， $P(0, 0, 2)$ ， $N(0, 1, 1)$ ， $M(2, 1, 0)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CD} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{MN} = (-2, 0, 1),$$

$$\because \overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{GC}, \therefore G\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right), \overrightarrow{GM} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right),$$

$$\text{设平面 } PCD \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_1} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PD} = (x, y, z) \cdot (0, 2, -2) = 2y - 2z = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CD} = (x, y, z) \cdot (-2, 0, 0) = -2x = 0 \end{cases},$$

取 $y=1$ ，得 $\overrightarrow{n_1} = (0, 1, 1)$ ，

设平面 GMN 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (a, b, c)$ ，则

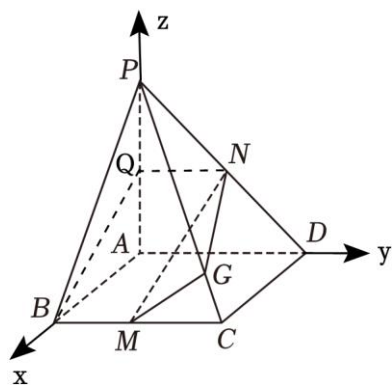
$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{MN} = (a, b, c) \cdot (-2, 0, 1) = -2a + c = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{GM} = (a, b, c) \cdot \left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}a - \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c = 0 \end{cases},$$

取 $a=1$ ，得 $\overrightarrow{n_2} = \left(1, -\frac{2}{3}, 2\right)$ ，

设平面 PCF 与平面 GMN 的夹角为 θ ，

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{0 - \frac{2}{3} + 2}{\sqrt{2} \times \frac{7}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{7},$$

故平面 PCF 与平面 GMN 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ 。



16. (15 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，若 $(a+b+c)(a+b-c)=3$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。

(1) 求角 C ；

(2) 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, 求 $|CD|$ 的最小值.

【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$;

(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【分析】(1) 由题意利用余弦定理可求 $ab=\frac{3}{2(1+\cos C)}$, 利用三角形的面积公式以及三角函数恒等变换的应用可求 $\sin(C-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可求得 $C-\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, 进而可求 C 的值;

(2) 由 (1) 知: $C=\frac{2\pi}{3}$, $ab=\frac{3}{2(1+\cos C)}=3$, 由题意可得 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, 两边平方, 利用平面向量数量积的运算以及基本不等式即可求解.

【解答】解: (1) $\because (a+b+c)(a+b-c)=3$,

$$\therefore 3=(a+b)^2-c^2=a^2+b^2-c^2+2ab,$$

结合余弦定理得 $3=2ab\cos C+2ab=2ab(1+\cos C)$,

$$\therefore ab=\frac{3}{2(1+\cos C)},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \frac{\sin C}{1+\cos C}=\sqrt{3},$$

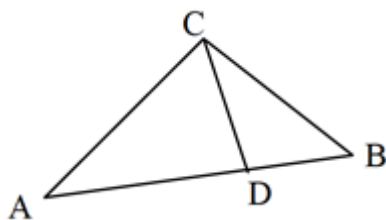
$$\therefore \sin C=\sqrt{3}(1+\cos C),$$

$$\therefore \sin(C-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because C\in(0, \pi), \text{ 可得 } C-\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}),$$

$$\therefore C-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$\text{故 } C=\frac{2\pi}{3};$$



$$(2) \text{ 由 (1) 知: } C=\frac{2\pi}{3}, ab=\frac{3}{2(1+\cos C)}=3,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)^2 = \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}ab\cos C = \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{9}b^2 \cdot \frac{4}{9}a^2} - \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 当且仅当 } b=2a=\sqrt{6} \text{ 时, } CD \text{ 长取最小值, 此时 } CD = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore CD \text{ 长的最小值为 } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

17. (15 分) 甲、乙两人进行某棋类比赛，每局比赛时，若决出输赢则获胜方得 2 分，负方得 0 分；若平局则各得 1 分。已知甲在每局中获胜、平局、负的概率均为 $\frac{1}{3}$ ，且各局比赛结果相互独立。

(1) 若比赛共进行了三局，求甲共得 3 分的概率；

(2) 规定比赛最多进行五局，若一方比另一方多得 4 分则停止比赛，求比赛局数 X 的分布列与数学期望。

【答案】(1) $\frac{7}{27}$;

(2) X 的分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{41}{81}$

$$E(X) = \frac{317}{81}.$$

【分析】(1) 甲得 3 分包含以下情形：三局均为平局，三局中甲一胜一平一负，再结合独立事件的概率乘法公式求解；

(2) 由题意可知 X 的可能取值为 2, 3, 4, 5，求出相应的概率，得到 X 的分布列，再结合期望公式求解。

【解答】解：(1) 设事件 A 表示“三局比赛后，甲得 3 分”，

甲得 3 分包含以下情形：三局均为平局，三局中甲一胜一平一负，

$$\text{所以 } P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + A_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27};$$

(2) 依题意知， X 的可能取值为 2, 3, 4, 5，

$$\text{则 } P(X=2) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3) = 2 \times C_2^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{27},$$

$$P(X=4)=2 \times [C_2^1 (\frac{1}{3})^4 + C_3^1 (\frac{1}{3})^4] = \frac{10}{81},$$

$$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=1-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}-\frac{10}{81}=\frac{41}{81},$$

所以 X 的分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{41}{81}$

$$\text{所以 } E(X)=2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{4}{27} + 4 \times \frac{10}{81} + 5 \times \frac{41}{81} = \frac{317}{81}.$$

18. (17 分) 已知焦点在 x 轴上，中心在坐标原点的等轴双曲线 E 经过点 $A(\sqrt{2}, 1)$ ，过点 A 作两条互相垂直的直线分别交双曲线于 B, C 两点.

(1) 若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，求边 BC 所在的直线方程；

(2) 判断原点 O 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的位置关系，并说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{4}$;

(2) O 在 $\triangle ABC$ 的外接圆的内部.

【分析】 (1) 由题意，先求出双曲线 E 的方程，设出直线 BC 的方程，将直线 BC 的方程与双曲线方程联立，结合根与系数的关系以及斜率公式求出 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，设 BC 中点为 $M(x_0, y_0)$ ，求出 M 点的坐标，代入公式中求出 b 的值，进而可得直线 BC 的方程；

(2) 当 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，将直线 BC 的方程与双曲线方程联立，利用韦达定理以及向量的坐标运算再进行求解即可.

【解答】 解：(1) 不妨设双曲线 E 的方程为 $x^2 - y^2 = \lambda$,

因为等轴双曲线 E 经过点 $A(\sqrt{2}, 1)$,

所以 $2 - 1 = \lambda$,

解得 $\lambda = 1$,

则双曲线 E 的方程为 $x^2 - y^2 = 1$,

不妨设直线 BC 的方程为 $y = kx + b$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + b \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (1 - k^2)x^2 - 2kbx - b^2 - 1 = 0,$$

此时 $1 - k^2 \neq 0$ 且 $\Delta > 0$,

解得 $k^2 \neq 1$, $b^2 + 1 > k^2$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{2kb}{1-k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{b^2+1}{k^2-1}$,

因为 $AB \perp AC$,

所以 $\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}} \cdot \frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}} = -1$,

整理得 $(kx_1+b-1)(kx_2+b-1) + (x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2}) = 0$,

即 $(k^2+1)\frac{b^2+1}{k^2-1} + [k(b-1)-\sqrt{2}]\frac{2kb}{1-k^2} + (b-1)^2+2=0$,

化简得 $(\sqrt{2}k+b-1)(\sqrt{2}k+1)=0$,

因为直线 BC 不经过点 A ,

所以 $\sqrt{2}k+b-1 \neq 0$,

则 $\sqrt{2}k+1=0$,

解得 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时直线 BC 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b$,

不妨设 BC 中点为 $M(x_0, y_0)$,

此时 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{kb}{1-k^2} = -\sqrt{2}b$,

所以 $y_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_0 + b = 2b$,

因为 $AM \perp BC$,

所以 $k_{AM} = \sqrt{2}$,

即 $\frac{2b-1}{-\sqrt{2}b-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

解得 $b = -\frac{1}{4}$,

则直线 BC 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{4}$;

(2) 当 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

联立 $\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $x^2 + 2\sqrt{2}bx - 2b^2 - 2 = 0$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -2\sqrt{2}b$, $x_1 x_2 = -2b^2 - 2$,

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right) \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right) = \frac{3}{2}x_1 x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}b(x_1 + x_2) + b^2 \\ &= 3(-b^2 - 1) + 2b^2 + b^2 = -3, \end{aligned}$$

所以 $\angle BOC > \frac{\pi}{2}$,

故 O 在 $\triangle ABC$ 的外接圆的内部.

19. (17 分) 已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax^2 + 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在正数 x , 使 $f(x) \geq 0$ 成立, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $0 < x_1 < x_2$, 证明: 对任意 $a \in (0, +\infty)$, 存在唯一的实数 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ 成立.}$$

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty)$ 上单调递减;

(2) $(-\infty, 1]$;

(3) 详见解答过程.

【分析】 (1) 计算 $f'(x)$, 然后分类讨论即可得到单调性;

(2) 对 $a \leq 1$ 和 $a > 1$ 两种情况分别讨论, 即可得到取值范围是 $(-\infty, 1]$;

(3) 首先证明 $f'(x)$ 单调递减, 即得唯一性; 然后求导证明对任意的 $0 < t < 1$, 都有 $\frac{1 \ln t}{t-1} > 1$; 而对任意的 $t > 1$, 都有 $\frac{1 \ln t}{t-1} < 1$. 再利用该结论证明 $f'(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_2)$, 从而得到存在性. 最后综合两方面即证得结论.

【解答】 解: (1) 对 $f(x) = 2\ln x - ax^2 + 1$ 求导得 $f'(x) = \frac{2}{x} - 2ax = \frac{2(1-ax^2)}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, 对 $x > 0$ 有 $f'(x) = \frac{2(1-ax^2)}{x} \geq \frac{2}{x} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 有 $f'(x) = \frac{2(1-ax^2)}{x} = \frac{2(1+x\sqrt{a})(1-x\sqrt{a})}{x} = \frac{2\sqrt{a}(1+x\sqrt{a})}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - x\right)$, 而当 $x > 0$ 时, $\frac{2\sqrt{a}(1+x\sqrt{a})}{x} > 0$,

故当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 若 $a \leq 1$, 由于 $f(1) = 1 - a \geq 0$, 故存在正数 $x=1$ 使得 $f(x) \geq 0$, 条件满足;

若 $a > 1$, 则由 (1) 的结论, 知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 上单调递减,

从而此时对任意的 $x > 0$ 都有 $f(x) \leq f(\frac{1}{\sqrt{a}}) = 2\ln\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 + 1 = -\ln a < 0$, 条件不满足.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

(3) 证明: 令 $F(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x > 0)$,

$$\text{则 } F(x) = \frac{2}{x} - 2ax - \frac{2\ln x_2 - ax_2^2 - 2\ln x_1 + ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{2}{x} - 2ax - \frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_2 - x_1} + a(x_2 + x_1),$$

因为 $a > 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上单调递减,

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{2}{x_1} - 2ax_1 - \frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_2 - x_1} + a(x_2 + x_1) = \frac{2}{x_1} - \frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_2 - x_1} + a(x_2 - x_1) \\ &= \frac{2}{x_2 - x_1} \left(\frac{x_2}{x_1} - 1 - \ln \frac{x_2}{x_1} \right) + a(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

$$\text{令 } g(t) = t - 1 - \ln t, (t > 0), \text{ 则 } g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t},$$

所以当 $t \in (0, 1)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减,

$t \in (1, +\infty)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增, 所以当 $t=1$ 时, $g(t)_{\min} = g(1) = 0$,

又 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} - 1 - \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$ 恒成立,

又因为 $a > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. 所以 $F(x_1) > 0$.

同理可得 $F(x_2) = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(1 - \frac{x_2}{x_1} - \ln \frac{x_2}{x_1} \right) + a(x_1 - x_2)$, 由 $t - 1 - \ln t \geq 0$ ($t=1$ 时等号成立).

又 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$, 所以 $1 - \frac{x_1}{x_2} - \ln \frac{x_1}{x_2} < 0$ 恒成立,

又 $a > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $F(x_2) < 0$,

所以区间 (x_1, x_2) 上存在唯一的实数 x_0 ，使得 $F(x_0) = 0$ ，

所以对任意 $a \in (0, +\infty)$ ，存在唯一的实数 $x_0 \in (x_1, x_2)$ ，使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立。