

2022-2023 学年江苏省镇江中学高二（下）期末数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- (5 分) 计算 $\frac{2}{(1+i)^2}$ 的结果是 ()
A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$
- (5 分) 抛物线 $y=x^2$ 的焦点坐标为 ()
A. $(\frac{1}{2}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{4}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{4})$
- (5 分) 若直线 $3x - 4y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切，则 ()
A. $|m| < 5r$ B. $|m| > 5r$ C. $|m| = 5r$ D. $|mr| = 5$
- (5 分) 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$, 则平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} =$ ()
A. $(1, 1, 2)$ B. $(1, -1, 0)$ C. $(-1, 1, 2)$ D. $(-1, 1, 0)$
- (5 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{2023} = 2023$, 且 $a_3 + a_{2021} = m$, 则 $m =$ ()
A. 1 B. 2 C. 2023 D. 2024
- (5 分) 某校组织一次认识大自然的活动, 有 10 名同学参加, 其中有 6 名男生、4 名女生, 现要从这 10 名同学中随机抽取 3 名同学去采集自然标本. 抽取人中既有男生又有女生的抽取方法共 ()
A. 192 种 B. 120 种 C. 96 种 D. 24 种
- (5 分) 一个轴截面为边长为 6 的正三角形的圆锥, 用一个平行于圆锥底面的平面来截该圆锥, 截得一个小圆锥和一个圆台, 若截得小圆锥的底面面积等于 π , 则截得的圆台体积为 ()
A. $\frac{26\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $26\sqrt{3}\pi$ C. $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $4\sqrt{3}\pi$
- (5 分) 若函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 与函数 $g(x) = ae^x - x$ 有相等的极小值, 则实数 $a =$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. e^3 C. 2 D. $\frac{1}{e^2}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

(多选) 9. (5 分) 某地区从某一年开始进行了环境污染整治, 得到了如下数据:

第 x 年	1	2	3	4	5	6	7
污染指数	6.1	5.2	4.5	4.7	3.8	3.4	3.1
y							

根据成对数据进行相关分析，并计算得： $\bar{x}=4$ ， $\bar{y}=4.4$ ，线性相关系数 $r \approx -0.99$ ，线性回归方程 $y = -0.475x + a$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 两个变量 x, y 正相关
- B. 两个变量 x, y 负相关
- C. $a=6.3$
- D. 有相关系数判断两个变量线性相关性较强

（多选）10.（5分）若随机变量 $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ ，记 $f(k) = P(X=k)$ 为恰好发生 k 次 ($k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$) 的概率，下列说法正确的有（ ）

- A. $P(X > 0.5) = \frac{1023}{1024}$
- B. $f(k) = f(10 - k)$
- C. $\sum_{i=0}^{10} (i \cdot f(i)) = \frac{1}{2}$
- D. 当 $k=5$ 时， $f(k)$ 取得最大值

（多选）11.（5分）设 S_n 是公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 S_3, S_9, S_6 成等差数列，则下列说法正确的有（ ）

- A. $q^3 = \frac{1}{2}$
- B. a_3, a_9, a_6 成等差数列
- C. S_3, S_6, S_9 成等比数列
- D. S_6, S_{12}, S_9 成等差数列

（多选）12.（5分）已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E, F, G 分别是棱 D_1C_1, C_1B_1, AB 的中点，下列说法正确的有（ ）

- A. $EF \perp FG$
- B. $AC_1 \perp$ 平面 EFG
- C. 平面 EFG 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- D. A_1 到平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

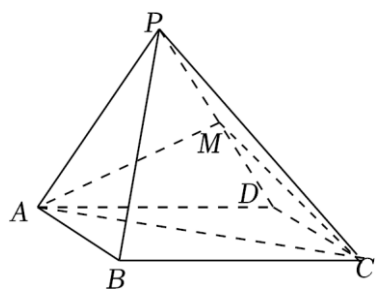
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.（5分）某连续型随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(\xi < c - 1) = P(\xi > c + 1)$ ，则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

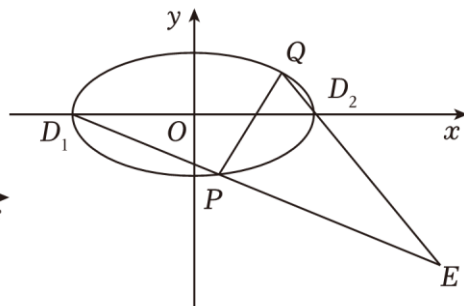
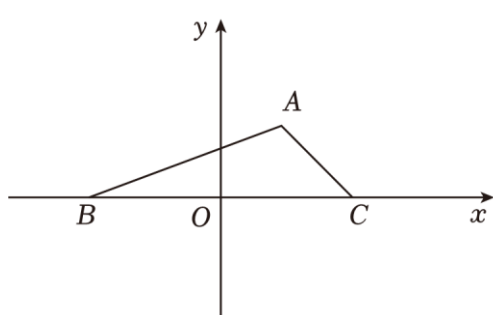
14. (5 分) $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 展开式中, 常数项是_____.
15. (5 分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 且直线 PF_2 的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的离心率为_____.
16. (5 分) 《九章算术》中把四个面都是直角三角形的四面体叫做“鳖臑”. 从正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点中选择 4 个顶点, 可组成_____个不同的“鳖臑”.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$, 正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 1, 2b_1 + b_2 = b_3$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{b_n - a_n\}$ 的前 10 项和 S_{10} .
18. (12 分) 体检时, 为了确定体检人是否患有某种疾病, 需要对其血液进行化验, 若结果呈阳性, 则患有该疾病; 若结果呈阴性, 则未患有该疾病. 已知每位体检人患有该疾病的概率均为 0.1, 而且每位体检人患有该疾病相互独立. 现有 5 位体检人的血液检查, 有以下两种化验方案:
- 方案甲: 逐个检查每位体检人的血液;
- 方案乙: 先将 5 位体检人的血液混在一起化验一次, 若呈阳性, 则再逐个化验; 若呈阴性, 则说明每位体检人均未患有该疾病, 化验结束.
- (1) 若选择方案甲, 设 5 人中呈阳性患者人数记为 X , 求 X 的分布列及数学期望;
- (2) 如果每次化验的费用为 100 元, 求方案乙的平均化验费用. (参考数据: $0.9^5 \approx 0.59$)
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值并画出函数的大致图像;
- (2) 求证: $f(x) \geq \ln(x+1)$.
20. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧面 PAD 是正三角形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = 2$, M 是 PD 的中点.
- (1) 求证: $AM \perp$ 平面 PCD ;
- (2) 求平面 BPD 与平面 PCD 所成二面角的余弦值.



21. (12分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC=2\sqrt{3}$ ， $AB+AC=4$ ，若以 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 设动顶点 $A(x, y)$.



- (1) 求顶点 A 的轨迹方程；
 - (2) 记第(1)问中所求轨迹曲线为 M ，设 $D_1(-2, 0)$ ， $D_2(2, 0)$ ，过点 $(1, 0)$ 作动直线 l 与曲线 M 交于 P ， Q 两点（点 P 在 x 轴下方）. 求证：直线 D_1P 与直线 D_2Q 的交点 E 在一条定直线上.
22. (12分) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax$.
- (1) 当 $a = -1$ 时，求函数在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
 - (2) 若函数 $f(x)$ 存在不同的极值点 x_1, x_2 ，且以 $A(x_1, f(x_1))$ ， $C(x_2, f(x_2))$ 为对角线的正方形 $ABCD$ 的四顶点 A, B, C, D 都在函数 $y=f(x)$ 的图像上，求 a^2 的值.

2022-2023 学年江苏省镇江中学高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 计算 $\frac{2}{(1+i)^2}$ 的结果是 ()

- A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

【答案】D

【分析】直接利用复数代数形式的乘除运算化简

【解答】解：原式 $= \frac{2}{1+2i-1} = \frac{1}{i} = -i$

故选：D.

2. (5 分) 抛物线 $y=x^2$ 的焦点坐标为 ()

- A. $(\frac{1}{2}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{4}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{4})$

【答案】D

【分析】该抛物线的方程是 $x^2=2py$ ($p>0$) 的形式，由此不难得到 $2p=1$, $\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$ ，所以抛物线的焦点坐标为： $(0, \frac{1}{4})$.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y=x^2$ 的标准形式是 $x^2=y$,

$\therefore$ 抛物线焦点在 y 轴上，开口向上，可得 $2p=1$, $\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$

因此，抛物线的焦点坐标为： $(0, \frac{1}{4})$

故选：D.

3. (5 分) 若直线 $3x-4y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切，则 ()

- A. $|m|<5r$ B. $|m|>5r$ C. $|m|=5r$ D. $|mr|=5$

【答案】C

【分析】直线与圆相切，则圆心到直线的距离等于半径，由此即可得.

【解答】解：直线 $3x-4y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切，

则圆心 $(0, 0)$ 到直线 $3x-4y+m=0$ 的距离等于半径 r ,

则有 $r = \frac{|m|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, 即 $|m|=5r$.

故选: C.

4. (5分) 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$, 则平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} =$ ()

A. $(1, 1, 2)$ B. $(1, -1, 0)$ C. $(-1, 1, 2)$ D. $(-1, 1, 0)$

【答案】A

【分析】设平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 由向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$, 列出方程组, 能求出结果.

【解答】解: 设平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$\because$ 向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$,

$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = x+y-z=0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -x+y=0 \end{cases}$, 取 $x=1$, 得 $\vec{n} = (1, 1, 2)$.

故选: A.

5. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{2023} = 2023$, 且 $a_3 + a_{2021} = m$, 则 $m =$ ()

A. 1 B. 2 C. 2023 D. 2024

【答案】B

【分析】由已知结合等差数列的求和公式及性质即可求解.

【解答】解: 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{2023} = \frac{2023(a_1 + a_{2023})}{2} = 2023$,

所以 $a_1 + a_{2023} = 2$,

又 $a_3 + a_{2021} = a_1 + a_{2023} = 2 = m$,

则 $m = 2$.

故选: B.

6. (5分) 某校组织一次认识大自然的活动, 有 10 名同学参加, 其中有 6 名男生、4 名女生, 现要从这 10 名同学中随机抽取 3 名同学去采集自然标本. 抽取人中既有男生又有女生的抽取方法共 ()

A. 192 种 B. 120 种 C. 96 种 D. 24 种

【答案】C

【分析】根据条件分 1 男 2 女和 2 男 1 女两种情况, 利用组合数公式进行计算即可.

【解答】解: 若 1 男 2 女, 有 $C_6^1 C_4^2 = 36$,

若 2 男 1 女，有 $C_6^2 C_4^1 = 60$ ，

则共有 $36 + 60 = 96$ 种不同的抽取方法.

故选：C.

7. (5 分) 一个轴截面为边长为 6 的正三角形的圆锥，用一个平行于圆锥底面的平面来截该圆锥，截得一个小圆锥和一个圆台，若截得小圆锥的底面面积等于 π ，则截得的圆台体积为 ()

A. $\frac{26\sqrt{3}}{3} \pi$ B. $26\sqrt{3} \pi$ C. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \pi$ D. $4\sqrt{3} \pi$

【答案】A

【分析】根据题意，求出原来圆锥的高，分析所得小圆锥的底面半径和高，由此可得原来圆锥的体积和所得小圆锥的体积，进而计算可得答案.

【解答】解：根据题意，如图正三角形 $\triangle SAB$ 为圆锥的轴截面，底面半径为 r ，
用一个平行于圆锥底面的平面来截该圆锥，得到小圆锥的轴截面为 $\triangle SA'B'$ ，设小圆锥的底面半径为 r' ，

其中 $AB = 2r = 6$ ，则 $r = 3$ ，

$\triangle SAB$ 为等边三角形，则 $SO = \sqrt{3}OB = 3\sqrt{3}$ ，

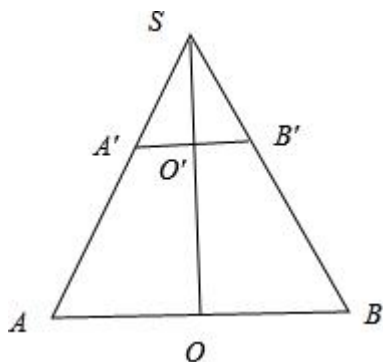
原来圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$ ，

若截得小圆锥的底面面积等于 π ，则 $\pi r'^2 = \pi$ ，解可得 $r' = 1$ ，

则有 $SO' = \sqrt{3}$ ，小圆锥的体积 $V' = \frac{1}{3} \times \pi \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$ ，

故截得的圆台体积为 $V - V' = \frac{26\sqrt{3}}{3} \pi$.

故选：A.



8. (5 分) 若函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 与函数 $g(x) = ae^x - x$ 有相等的极小值，则实数 $a =$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. e^3 C. 2 D. $\frac{1}{e^2}$

【答案】B

【分析】利用“对勾函数”的单调性求得 $f(x)$ 的极小值，可得 $g(x)$ 的极小值，然后结合导数求极值可得 a 的值.

【解答】解：由 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ，利用“对勾函数”的单调性，可知其最小值也是极小值为 4；

则函数 $g(x) = ae^x - x$ 有极小值为 4，

由 $g(x) = ae^x - x$ ，得 $g'(x) = ae^x - 1$ ，

当 $a < 0$ 时， $g'(x) = ae^x - 1 < 0$ 恒成立，函数在定义域内单调递减，无极小值；

当 $a > 0$ 时，由 $g'(x) = ae^x - 1 < 0$ ，得 $x < \ln \frac{1}{a}$ ，由 $g'(x) = ae^x - 1 > 0$ ，得 $x > \ln \frac{1}{a}$ ，

$\therefore g(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ ，单调增区间为 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$.

$\therefore$ 函数的极小值为 $a e^{\ln \frac{1}{a}} - \ln \frac{1}{a} = 1 - \ln \frac{1}{a} = 4$ ，解得 $a = e^3$.

故选：B.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

（多选）9.（5 分）某地区从某一年开始进行了环境污染整治，得到了如下数据：

第 x 年	1	2	3	4	5	6	7
污染指数 y	6.1	5.2	4.5	4.7	3.8	3.4	3.1

根据成对数据进行相关分析，并计算得： $\bar{x} = 4$ ， $\bar{y} = 4.4$ ，线性相关系数 $r \approx -0.99$ ，线性回归方程

$\hat{y} = -0.475x + a$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 两个变量 x, y 正相关
- B. 两个变量 x, y 负相关
- C. $a = 6.3$
- D. 有相关系数判断两个变量线性相关性较强

【答案】BCD

【分析】由线性回归方程判定 A 与 B；把样本点的中心的坐标代入线性回归方程求得 a 判断 C；由相关系数的绝对值近似等于 1 判断 D.

【解答】解：由线性回归方程 $\hat{y} = -0.475x + a$ ，可知两个变量 x, y 负相关，故 A 错误， B 正确；

$\because \bar{x} = 4, \bar{y} = 4.4, \therefore$ 样本点的中心的坐标为 $(4, 4.4)$ ，

代入 $\hat{y} = -0.475x + a$ ，得 $a = 4.4 + 0.475 \times 4 = 6.3$ ，故 C 正确；

$\because$ 线性相关系数 $r \approx -0.99$ ，且 $|r| = 0.99 \approx 1$ ，说明两个变量线性相关性较强，故 D 正确。

故选： BCD 。

（多选）10.（5分）若随机变量 $X \sim B(10, \frac{1}{2})$ ，记 $f(k) = P(X=k)$ 为恰好发生 k 次 ($k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$) 的概率，下列说法正确的有 ()

A. $P(X > 0.5) = \frac{1023}{1024}$

B. $f(k) = f(10-k)$

C. $\sum_{i=0}^{10} (i \cdot f(i)) = \frac{1}{2}$

D. 当 $k=5$ 时， $f(k)$ 取得最大值

【答案】ABD

【分析】根据题意，由二项分布的性质可得 $f(k) = C_{10}^k (\frac{1}{2})^{10}$ ，结合组合数的性质依次分析选项，综合可得答案。

【解答】解：根据题意，随机变量 $X \sim B(10, \frac{1}{2})$ ，则 $f(k) = P(X=k) = C_{10}^k (\frac{1}{2})^k (1 - \frac{1}{2})^{10-k}$
 $= C_{10}^k (\frac{1}{2})^{10}$ ，

依次分析选项：

对于 A ， $P(X > 0.5) = 1 - P(X=0) = 1 - (\frac{1}{2})^{10} = \frac{1023}{1024}$ ， A 正确；

对于 B ， $f(k) = C_{10}^k (\frac{1}{2})^{10}$ ， $f(10-k) = P(X=10-k) = C_{10}^{10-k} (\frac{1}{2})^{10} = C_{10}^k (\frac{1}{2})^{10}$ ，则有 $f(k) = f(10-k)$ ， B 正确；

对于 C ， $\sum_{i=0}^{10} (i \cdot f(i)) = E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ ， C 错误；

对于 D ， $f(k) = C_{10}^k (\frac{1}{2})^{10}$ ，由组合数的性质，当 $k=5$ 时， $f(k)$ 取得最大值， D 正确。

故选： ABD 。

（多选）11.（5分）设 S_n 是公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 S_3, S_9, S_6 成等差数列，则下列说

法正确的有（ ）

- A. $q^3 = \frac{1}{2}$
- B. a_3, a_9, a_6 成等差数列
- C. S_3, S_6, S_9 成等比数列
- D. S_6, S_{12}, S_9 成等差数列

【答案】BD

【分析】由已知求得等比数列的公比，然后逐一分析四个选项得答案.

【解答】解：由 S_3, S_9, S_6 成等差数列得： $2S_9 = S_3 + S_6$ ，得 $q \neq 1$ ，

$$\therefore 2 \times \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q},$$

$$\therefore 2q^9 = q^3 + q^6, \text{ 得 } 2(q^3)^2 - q^3 - 1 = 0,$$

故 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 或 $q^3 = 1$ (舍)，故 A 错误；

$$a_3 + a_6 = a_3 - \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}a_3, \quad 2a_9 = 2a_3q^6 = \frac{1}{2}a_3,$$

$\therefore a_3, a_9, a_6$ 成等差数列，故 B 正确；

$$S_3 = \frac{\frac{3}{2}a_1}{1-q}, \quad S_6 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q}, \quad S_9 = \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q},$$

$$\therefore \frac{S_6}{S_3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_9}{S_6} = \frac{3}{2}, \quad \therefore S_3, S_6, S_9 \text{ 不成等比数列，故 C 错误；}$$

$$S_{12} = \frac{\frac{15}{16}a_1}{1-q}, \quad S_6 + S_9 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q} + \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q}, \quad 2S_{12} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q},$$

满足 $S_6 + S_9 = 2S_{12}$ ，可得 S_6, S_{12}, S_9 成等差数列，故 D 正确.

故选：BD.

(多选) 12. (5 分) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E, F, G 分别是棱 D_1C_1, C_1B_1, AB 的中点，下列说法正确的有（ ）

A. $EF \perp FG$

B. $AC_1 \perp$ 平面 EFG

C. 平面 EFG 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. A_1 到平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】ACD

【分析】求得截面为正六边形 $EFKGLH$ ，由等边三角形的面积公式和正六边形的性质可判断 AC；由正方体的对称性和线面垂直的判定可判断 BD.

【解答】解：由点 E, F, G 分别是棱 D_1C_1, C_1B_1, AB 的中点，结合平面的基本性质可得截面为正六边形 $EFKGLH$ ，

且棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，面积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，故 C 正确；

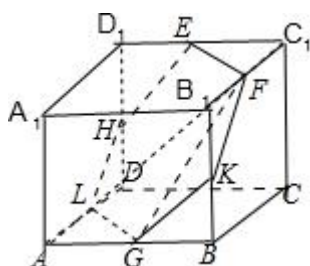
由于 $FK \parallel BC_1$ ， AC_1 不垂直于 BC_1 ，则 AC_1 不垂直于 FK ，即有 AC_1 不垂直于平面 EFG ，故 B 错误；

由正方体的对称性可得对角线 $A_1C \perp$ 平面 EFG ，且平面 EFG 过 A_1C 的中点，

可得 A_1 到平面 EFG 的距离为 $\frac{1}{2}A_1C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 D 正确；

由正六边形 $EFKGLH$ 可得 $EF \perp FG$ ，故 A 正确.

故选：ACD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5 分) 某连续型随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(\xi < c-1) = P(\xi > c+1)$ ，则 $c = \underline{2}$.

【答案】2.

【分析】根据给定条件，利用正态曲线的对称性列式计算作答.

【解答】解：某连续型随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ ，则对应正态曲线的对称轴为 $x=2$ ，

因为 $P(\xi < c-1) = P(\xi > c+1)$ ，因此 $(c-1) + (c+1) = 2 \times 2$ ，

解得 $c=2$ ，所以 $c=2$.

故答案为：2.

14. (5 分) $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 展开式中，常数项是 60.

【答案】见试题解答内容

【分析】据二项展开式的通项公式求得第 $r+1$ 项，令 x 的指数为 0 得常数项.

【解答】解： $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} (-\frac{2}{x})^r = (-2)^r C_6^r x^{3-\frac{3r}{2}}$

$$\text{令 } 3 - \frac{3r}{2} = 0 \text{ 得 } r=2$$

$$\text{故展开式的常数项为 } T_3 = (-2)^2 C_6^2 = 60$$

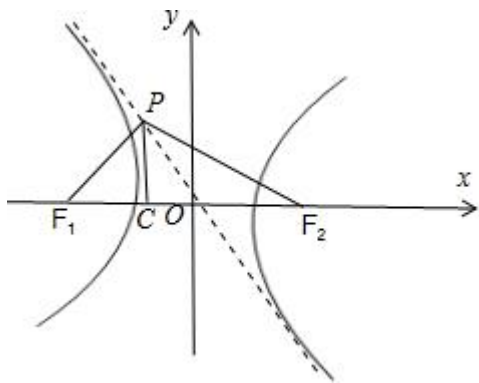
故答案为 60.

15. (5 分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 且直线 PF_2 的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【分析】根据题意求得 $|F_1P|$, 再结合面积相等求得 $|PC| = \frac{ab}{c}$, 进而求解结论.

【解答】解: $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P ,



对应的渐近线方程为: $bx+ay=0$,

$$\text{则 } |F_1P| = \frac{|-bc|}{\sqrt{b^2+a^2}} = b,$$

$$\therefore |F_1O| = c, |OP| = a,$$

过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 C ,

$$\text{则由 } \triangle OPF_1 \text{ 的面积相等可得: } ab = |PC|c, |PC| = \frac{ab}{c},$$

$$\therefore |OC| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{c}\right)^2} = \frac{a^2}{c},$$

$$\because \text{直线 } PF_2 \text{ 的斜率为 } -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \tan \angle PF_2O = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{ab}{c + \frac{a^2}{c}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 即 } \frac{ab}{a^2 + c^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 整理得: } (\sqrt{2}a - b)^2 = 0, \text{ 可得 } b = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore \text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

16. (5 分)《九章算术》中把四个面都是直角三角形的四面体叫做“鳖臑”。从正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点中选择 4 个顶点，可组成 24 个不同的“鳖臑”。

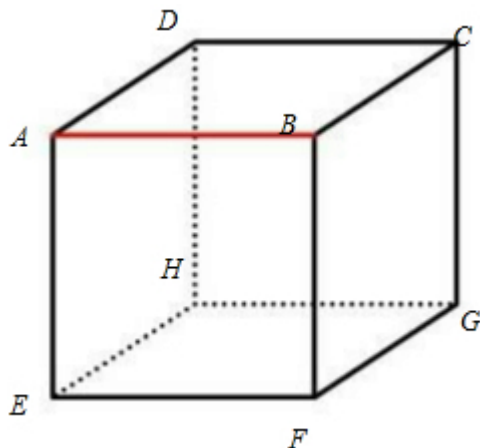
【答案】24.

【分析】每个顶点对应 6 个鳖臑，所以 8 个顶点对应 48 个鳖臑。但每个鳖臑都重复一次，再除 2。

【解答】解：当顶点为 A 时，三棱锥 $A - EHG$ ， $A - EFG$ ， $A - DCG$ ， $A - DHG$ ， $A - BCG$ ， $A - BFG$ ，为鳖臑。

所以 8 个顶点为 $8 \times 6 = 48$ 个。但每个鳖臑都重复一次，再除 2。所以个数为 24 个。

故答案为：24.



四、解答题：共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$ ，正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 1$ ， $2b_1 + b_2 = b_3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{b_n - a_n\}$ 的前 10 项和 S_{10} 。

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$ ， $b_n = 2^{n-1}$ ；

(2) 903.

【分析】(1) 设 $a_n = an + b$ ， $\{b_n\}$ 的公比为 q ，而后根据已知条件求解即可；

(2) 结合 (1) 进行求和。

【解答】解：(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以设 $a_n = an + b$ ，

由 $a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$ 得 $a(n+1) + b = 2an + 2b - 2n + 1$ ，

即 $an + a + b = (2a - 2)n + 2b + 1$ ，

令 $a=2a-2$, $a+b=2b+1$,

解得 $a=2$, $b=1$,

所以 $a_n=2n+1$,

由于数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q ,

由题意得 $2+q=q^2$,

解得 $q=2$ 或 -1 ,

又数列 $\{b_n\}$ 为正项数列,

所以 $q=2$, $b_n=2^{n-1}$;

(2) 结合 (1) 可知 $b_n - a_n = 2^{n-1} - (2n+1)$,

所以 $S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} - (3 \times 10 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2) = 1023 - 120 = 903$.

18. (12 分) 体检时, 为了确定体检人是否患有某种疾病, 需要对其血液进行化验, 若结果呈阳性, 则患有该疾病; 若结果呈阴性, 则未患有该疾病. 已知每位体检人患有该疾病的概率均为 0.1, 而且每位体检人患有该疾病相互独立. 现有 5 位体检人的血液检查, 有以下两种化验方案:

方案甲: 逐个检查每位体检人的血液;

方案乙: 先将 5 位体检人的血液混在一起化验一次, 若呈阳性, 则再逐个化验; 若呈阴性, 则说明每位体检人均未患有该疾病, 化验结束.

(1) 若选择方案甲, 设 5 人中呈阳性患者人数记为 X , 求 X 的分布列及数学期望;

(2) 如果每次化验的费用为 100 元, 求方案乙的平均化验费用. (参考数据: $0.9^5 \approx 0.59$)

【答案】(1) 分布列见解析; 数学期望为 0.5;

(2) 方案乙的平均化验费用为 305 元.

【分析】(1) 由题意, 易知方案甲中呈阳性患者人数 X 服从二项分布 $X \sim B(5, 0.1)$, 得到 X 的所有取值和相对应的概率, 列出分布列, 结合二项分布期望公式进行求解即可;

(2) 设 5 人中呈阳性患者人数记为 Y , 得到 Y 的所有取值, 求出相对应的概率, 代入期望公式中得到 $E(Y)$, 设方案乙中的检查费用为 Z 元, 可得 $Z=100Y$, 根据期望公式的性质进行求解即可.

【解答】解: (1) 已知每位体检人患有该疾病的概率均为 0.1, 而且每位体检人患有该疾病相互独立, 所以在方案甲中呈阳性患者人数 X 服从二项分布 $X \sim B(5, 0.1)$,

此时 $P(X=0) = 0.9^5$, $P(X=1) = C_5^1 \times 0.1 \times (0.9)^4$, $P(X=2) = C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3$, $P(X=3) = C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2$, $P(X=4) = C_5^4 \times (0.1)^4 \times 0.1$, $P(X=5) = 0.1^5$,

则 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4	5
P	0.9^5	$C_5^1 \times 0.1 \times (0.9)^4$	$C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3$	$C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2$	$C_5^4 \times (0.1)^4 \times 0.1$	0.1^5
			3	2		

所以 $E(X) = 5 \times 0.1 = 0.5$;

(2) 设 5 人中呈阳性患者人数记为 Y ,

可得 Y 的所有取值为 1, 6,

此时 $P(Y=1) = 0.9^5 \approx 0.59$, $P(Y=6) = 1 - 0.59 = 0.41$,

可得 $E(Y) = 1 \times 0.59 + 6 \times 0.41 = 3.05$,

设方案乙中的检查费用为 Z 元,

此时 $Z = 100Y$,

所以 $E(Z) = 100E(Y) = 100 \times 3.05 = 305$,

故方案乙的平均化验费用为 305 元.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值并画出函数的大致图像;

(2) 求证: $f(x) \geq \ln(x+1)$.

【答案】(1) 极小值为 $-e^{-1}$, 无极大值, 函数图象见解析;

(2) 证明过程见解析.

【分析】(1) 由题意, 对函数 $f(x)$ 进行求导, 利用导数得到函数 $f(x)$ 的单调性, 进而可得函数 $f(x)$ 的极值, 作出函数大致图象;

(2) 构造函数 $g(x) = f(x) - \ln(x+1)$, 将问题转化成求证函数 $g(x)$ 的最值问题, 对函数 $g(x)$ 进行求导, 利用导数的几何意义进行求解即可.

【解答】解: (1) 已知 $f(x) = xe^x$, 函数定义域为 $\mathbf{R}$,

可得 $f'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

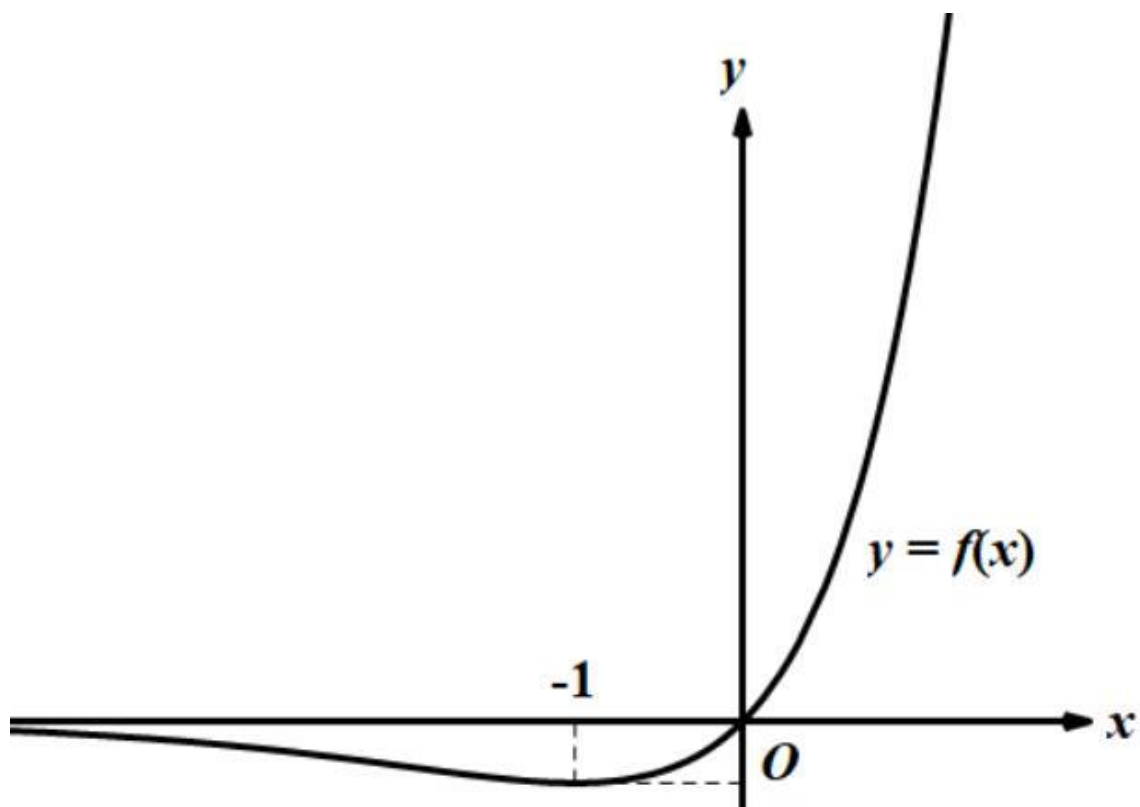
当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 极小值 $f(-1) = -e^{-1}$, 无极大值,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$,

又 $f(0) = 0$,

则函数 $f(x)$ 大致图象如下所示:

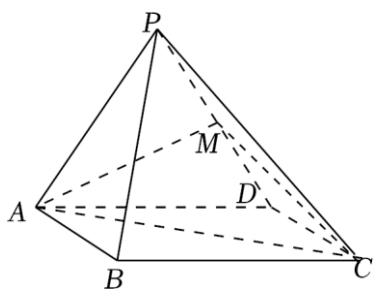


(2) 证明：不妨设 $g(x) = f(x) - \ln(x+1) = xe^x - \ln(x+1)$ ，函数定义域为 $(-1, +\infty)$ ，
 可得 $g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x+1}$ ，
 不妨设 $h(x) = g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x+1}$ ，函数定义域为 $(-1, +\infty)$ ，
 可得 $h'(x) = (x+2)e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ ，
 所以函数 $h(x)$ 在定义域上单调递增，
 即函数 $g'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，
 又 $g'(0) = 0$ ，
 所以当 $-1 < x < 0$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减；
 当 $x > 0$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，
 此时 $g(x) \geq g(0) = 0$ ，
 故 $f(x) \geq \ln(x+1)$ 。

20. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 PAD 是正三角形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD=2$ ， M 是 PD 的中点。

(1) 求证： $AM \perp$ 平面 PCD ；

(2) 求平面 BPD 与平面 PCD 所成二面角的余弦值。



【答案】(1) 证明过程见解答；(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

【分析】(1) 利用面面垂直的性质可得 $CD \perp$ 平面 PAD ，进而得到 $CD \perp AM$ ，利用正三角形的性质可知 $AM \perp PD$ ，再由线面垂直的判定得证；

(2) 建立空间直角坐标系，求得平面 BPD 与平面 PCD 的法向量，利用向量的夹角公式得解.

【解答】解：(1) 证明：在正方形 $ABCD$ 中， $CD \perp AD$ ，

又侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD ，

又 $AM \subset$ 平面 PAD ，

所以 $CD \perp AM$ ，

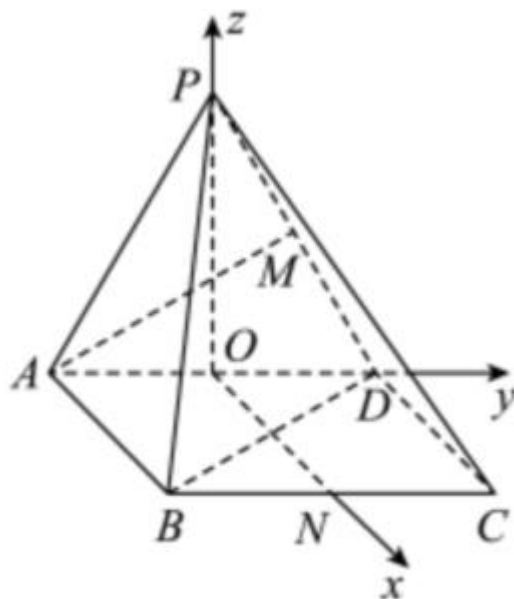
因为是正三角形， M 是 PD 的中点，

所以 $AM \perp PD$ ，

又 $CD \cap PD = D$ ， $CD, PD \subset$ 平面 PCD ，

所以 $AM \perp$ 平面 PCD ；

(2) 取 AD 中点为 O ， BC 中点为 N ，连接 OP ， ON ，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$, $B(2, -1, 0)$, $M(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以 $\overrightarrow{PD} = (0, 1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$,

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$, 可取 $\vec{n} = (3, 3, \sqrt{3})$,

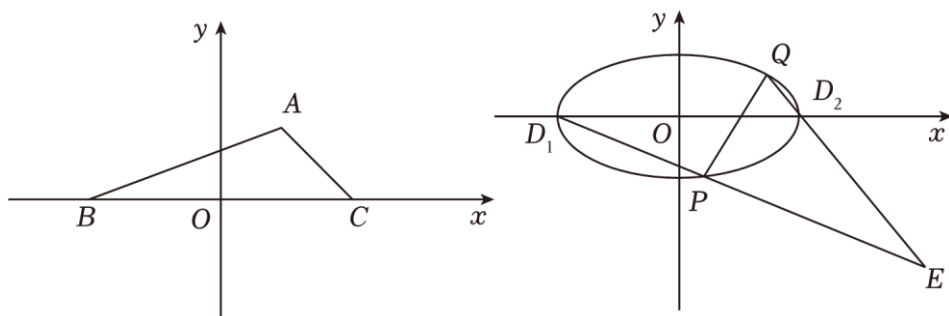
由 (1) 知 $\overrightarrow{AM}$ 是平面 PCD 的一个法向量, $\overrightarrow{AM} = (0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AM}| |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{3} \times \sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

由图象可知, 平面 BPD 与平面 PCD 所成二面角的平面角为锐角,

则平面 BPD 与平面 PCD 所成二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

21. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2\sqrt{3}$, $AB + AC = 4$, 若以 BC 所在直线为 x 轴, 以 BC 的中垂线为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 设动顶点 $A(x, y)$.



(1) 求顶点 A 的轨迹方程;

(2) 记第 (1) 问中所求轨迹曲线为 M , 设 $D_1(-2, 0)$, $D_2(2, 0)$, 过点 $(1, 0)$ 作动直线 l 与曲线 M 交于 P, Q 两点 (点 P 在 x 轴下方). 求证: 直线 D_1P 与直线 D_2Q 的交点 E 在一条定直线上.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq 0)$; (2) 证明过程见解答.

【分析】 (1) 易知点 A 的轨迹为以 B, C 为焦点的椭圆, 再根据题意求得 a, b 的值, 即可得到答案;

(2) 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 联立直线与椭圆方程, 得到两根之和与两根之积, 再表示出直线 QD_1 , PD_2 的直线方程, 联立整理方程, 即可得出结论.

【解答】 解: (1) 由 $AB + AC = 4 > BC = 2\sqrt{3}$,

则 A 的轨迹为以 B, C 为焦点的椭圆,

且 $2a = 4$, $a = 2$, $2c = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$,

$$\text{则 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\text{故 } A \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq 0);$$

(2) 证明: 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 可得 } (m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 4m^2 + 12(m^2 + 4) > 0,$$

设 $Q(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 4},$$

$$\text{即 } 2my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2),$$

$$\text{设 } QD_2: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2), PD_1: y = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2),$$

$$\text{联立上述两方程, 消去 } y \text{ 可得 } \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2) = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2),$$

$$\text{则 } \frac{y_1}{x_1 - 2}x - \frac{y_2}{x_2 + 2}x = \frac{2y_1}{x_1 - 2} + \frac{2y_2}{x_2 + 2},$$

$$\text{即 } [y_1(x_2 + 2) - y_2(my_1 - 1)]x = 2y_1(x_2 + 2) + 2y_2(x_1 - 2),$$

$$\text{化简可得 } (3y_1 + y_2)x = 4my_1 y_2 + 6y_1 - 2y_2,$$

$$\text{又 } 4my_1 y_2 = 6(y_1 + y_2),$$

$$\text{则 } (3y_1 + y_2)x = 6(y_1 + y_2) + 6y_1 - 2y_2 = 12y_1 + 4y_2, 3y_1 + y_2 \neq 0,$$

$$\text{解得 } x = 4,$$

综上所述, 动点 E 的轨迹方程为直线 $x = 4$, 即直线 D_1P 与直线 D_2Q 的交点 E 在一条定直线上.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 存在不同的极值点 x_1, x_2 , 且以 $A(x_1, f(x_1)), C(x_2, f(x_2))$ 为对角线的正方形 $ABCD$ 的四顶点 A, B, C, D 都在函数 $y = f(x)$ 的图像上, 求 a^2 的值.

【答案】(1) 切线方程为 $4x - y - 2 = 0$;

$$(2) a^2 = \frac{27 + 9\sqrt{17}}{8}.$$

【分析】(1) 由题意, 将 $a = -1$ 代入函数 $f(x)$ 解析式中, 对函数 $f(x)$ 进行求导, 得到 $f'(1), f$

(1), 代入切线方程中即可求解;

(2) 对函数 $f(x)$ 进行求导, 利用导数得到函数 $f(x)$ 的单调性和极值, 求出点 A 和点 C 的坐标, 利用 AC 的中点为原点, 以及 $ABCD$ 为正方形求出点 D 的坐标, 将其代入函数解析式中即可求出 a^2 的值.

【解答】解: (1) 已知 $f(x) = x^3 - ax$, 函数定义域为 $\mathbf{R}$,

当 $a = -1$ 时, $f(x) = x^3 + x$,

可得 $f'(x) = 3x^2 + 1$,

此时 $f'(1) = 4$,

又 $f(1) = 2$,

所以函数在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 2 = 4(x - 1)$,

即 $4x - y - 2 = 0$;

(2) 易知 $f'(x) = 3x^2 - a$,

若函数 $f(x)$ 存在不同的极值点 x_1, x_2 ,

此时 $a > 0$ 恒成立,

当 $x < -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $-\frac{\sqrt{3a}}{3} < x < \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以当 $x = -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 极大值 $f(-\frac{\sqrt{3a}}{3}) = \frac{2a\sqrt{3a}}{9}$,

当 $x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 极小值 $f(\frac{\sqrt{3a}}{3}) = -\frac{2a\sqrt{3a}}{9}$,

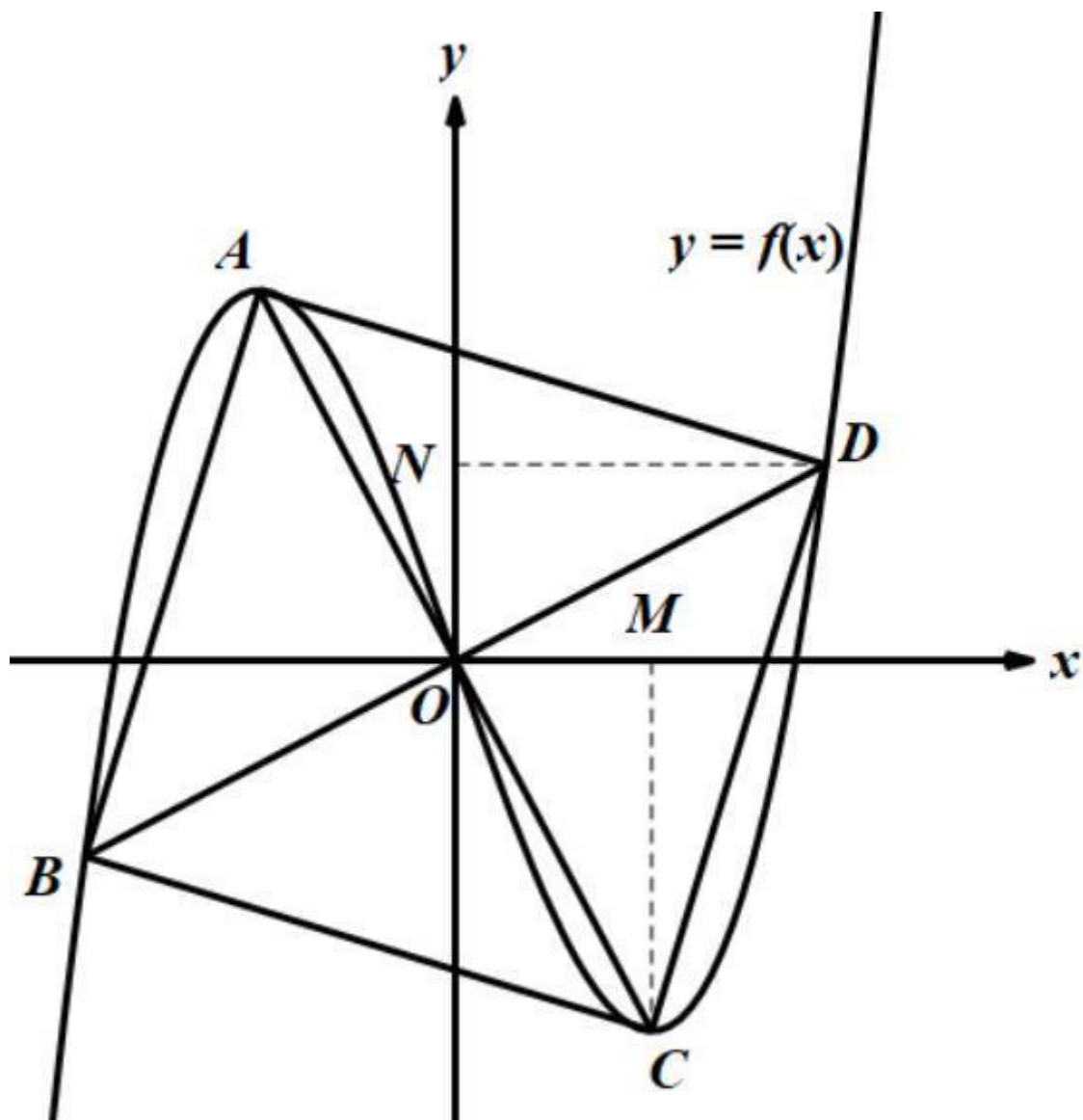
则 $A(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{2a\sqrt{3a}}{9})$, $C(\frac{\sqrt{3a}}{3}, -\frac{2a\sqrt{3a}}{9})$,

此时 AC 的中点为原点 O ,

在正方形 $ABCD$ 中, 过点 C 作 $CM \perp x$ 轴于点 M , 过点 D 作 $CN \perp y$ 轴于点 N ,

易知 $\triangle OCM \cong \triangle ODN$,

所以 $D(\frac{2a\sqrt{3a}}{9}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$,



又点 D 在函数 $f(x)$ 图象上，

$$\text{所以 } f\left(\frac{2a\sqrt{3a}}{9}\right) = \frac{\sqrt{3a}}{3},$$

$$\text{此时 } \left(\frac{2a\sqrt{3a}}{9}\right)^3 - a\left(\frac{2a\sqrt{3a}}{9}\right) = \frac{\sqrt{3a}}{3},$$

$$\text{整理得 } 8a^4 - 54a^2 - 81 = 0,$$

$$\text{解得 } a^2 = \frac{27+9\sqrt{17}}{8}.$$