2023-2024 学年江苏省扬州市高邮市高二（上）期初数学试卷

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求．）

1．（5 分）在直角坐标系中，直线$\sqrt{3}x+y-2=0$的倾斜角是（　　）

A．30°　　B．60°　　C．150°　　D．120°

2．（5 分）直线 l_1：$mx-3y-1=0$，l_2：$(3m-2)x-my+2=0$，若 $l_1\perp l_2$，则实数 m 的值为（　　）

A．0　　B．3　　C．0 或$-\frac{1}{3}$　　D．0 或 3

3．（5 分）圆 $x^2+y^2-6y=0$ 在点$P(\sqrt{5}, 1)$处的切线方程为（　　）

A．$\sqrt{5}x-2y-3=0$　　B．$\sqrt{5}x-2y+3=0$　　C．$2x-\sqrt{5}y-3=0$　　D．$2x-\sqrt{5}y+3=0$

4．（5 分）两条平行直线 $3x-y+3=0$ 和 $ax-y+4=0$ 间的距离为 d，则 a，d 分别为（　　）

A．$a=3$，$d=\frac{1}{10}$　　B．$a=3$，$d=\frac{\sqrt{10}}{10}$

C．$a=-3$，$d=\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$a=-3$，$d=\frac{1}{10}$

5．（5 分）一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 10km 的圆形区域内，已知小岛中心位于轮船正西 10akm（$a>0$）处，港口位于小岛中心正北 20km 处，如果轮船沿直线返港，不会有触礁危险，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$　　B．$(1, +\infty)$　　C．$(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$　　D．$(2, +\infty)$

6．（5 分）已知圆 C：$(x-2)^2+(y-4)^2=35$，直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$，则直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为（　　）

A．5　　B．$4\sqrt{5}$　　C．10　　D．$2\sqrt{5}$

7．（5 分）已知 $x+y=0$，则$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$的最小值为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$2\sqrt{5}$

8．（5 分）已知圆 C：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 和两点 $A(a, 0)$，$B(-a, 0)$（$a>0$），若圆 C 上至少存在一点 P，使得$\angle APB>90°$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(3, 7)$　　B．$(3, +\infty)$　　C．$(3, 7]$　　D．$(0, 7)$

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．过点$(2, 4)$并且倾斜角为 90°的直线方程为 $x-2=0$

B．过点 $A(-2, -3)$且在两坐标轴上截距相等的直线 l 方程为 $x+y+5=0$

C．经过点 P（1，1），倾斜角为 θ 的直线方程为 $y-1=\tan\theta(x-1)$

D．过（5，1），（2，﹣2）两点的直线的方程为 $x-y-4=0$

（多选）10．（5 分）已知直线 l：$x+y-5=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+y^2=2$，若点 P 为直线 l 上的一个动点，下列说法正确的是（　　）

A．直线 l 与圆 C 相交

B．若点 Q 为圆 C 上的动点，则$|PQ|$的取值范围为 $[\sqrt{2}, +\infty)$

C．与直线 l 平行且截圆 C 的弦长为 2 的直线为 $x+y+\sqrt{2}-5=0$ 或 $x+y-\sqrt{2}-5=0$

D．圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（多选）11．（5 分）已知实数 x，y 满足曲线 C 的方程 $x^2+y^2-2x-3=0$，则下列选项正确的是（　　）

A．点（4，4）到曲线 C 上任意点距离最大为 7

B．x^2+y^2 的最大值是 3

C．$x+y$ 的最小值是 $1-2\sqrt{2}$

D．$\frac{y+2}{x}$的取值范围是 $(-\infty, -\frac{4}{3}]\cup[0, +\infty)$

（多选）12．（5 分）已知圆 M：$(x+4)^2+y^2=4$ 直线 l：$x+y-2=0$，点 P 在直线 l 上运动，直线 PA，PB 分别与圆 M 切于点 A，B．则下列说法正确的是（　　）

A．四边形 $PAMB$ 的面积最小值为 $2\sqrt{14}$

B．$|PA|$最短时，弦 AB 长为 $\frac{4\sqrt{7}}{3}$

C．$|PA|$最短时，弦 AB 直线方程为 $3x+3y-8=0$

D．直线 AB 过定点 $(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．（5 分）已知直线 l 与直线 $3x-4y+4=0$ 平行，且经过点（2，﹣3），则直线 l 的方程为 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

14．（5 分）已知点 A（﹣2，1），B（﹣1，0），C（2，3），D（a，3）四点共圆，则点 D 到坐标原点 O 的距离为 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

15．（5 分）已知直线 l：$kx-y-2k+3=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 有两个交点，则 k 的取值范围为 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

16．（5 分）已知圆 C_1：$(x+3)^2+(y-2)^2=4$ 和圆 C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$，设 P 为平面上的点，且满足：存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，则所有满足条件的点 P 的坐标

为 ____________________.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分.）

17.（10 分）△ABC 的三个顶点为 A（﹣2，﹣6），B（2，﹣4），C（3，4）．求：

（1）AB 所在直线的方程；

（2）AB 边上的中线所在直线的方程.

18.（12 分）已知圆心为 C 的圆经过 A（0，3），B（1，2）两点，且圆心 C 在直线 l：$x+y=0$ 上.

（1）求圆 C 的标准方程；

（2）求过点（2，3）且与圆 C 相切的直线方程.

19.（12 分）已知直线 l 的方程为：（$2m+1$）$x+$（$m+1$）$y-7m-4=0$.

（1）求证：不论 m 为何值，直线必过定点 M；

（2）过点 M 引直线 l_1，使它与两坐标轴的正半轴所围成的三角形面积最小，求 l_1 的方程.

20.（12 分）在直角坐标系 xOy 中，点 A（0，3），圆 C 的圆心为 C（a，$2a-4$），半径为 1.

（1）若 $a=2$，直线 l 经过点 A 交圆 C 于 M、N 两点，且 $|MN|=\sqrt{2}$，求直线 l 的方程；

（2）若圆 C 上存在点 M 满足$|MA|=2|MO|$（O 为坐标原点），求实数 a 的取值范围.

21.（12 分）已知圆 C_1：$(x+1)^2+(y+2)^2=8$ 关于直线 l_1：$y=x-3$ 对称的图形为圆 C.

（1）求圆 C 的方程；

（2）直线 l：$y=k(x-1)$（$k>1$）与圆 C 交于 E，F 两点，若△OEF（O 为坐标原点）的面积为$\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

22.（12 分）已知圆 W 经过$A(3,3)$，$B(2,2\sqrt{2})$，$C(2,-2\sqrt{2})$三点.

（1）求圆 W 的方程.

（2）已知直线 l 与圆 W 交于 M，N（异于 A 点）两点，若直线 AM，AN 的斜率之积为 2，试问直线 l 是否经过定点？若经过，求出该定点坐标；若不经过，请说明理由.

2023-2024 学年江苏省扬州市高邮市高二（上）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求．）

1．（5 分）在直角坐标系中，直线$\sqrt{3}x+y-2=0$的倾斜角是（　　）

A．30°　　B．60°　　C．150°　　D．120°

【答案】D

【分析】先求出斜率，再结合倾斜角，即可求解．

【解答】解：直线$\sqrt{3}x+y-2=0$的斜率为$-\sqrt{3}$，

因为倾斜角的范围为[0，π)，

则该直线的倾斜角为$\frac{2}{3}\pi$，即 120°．

故选：D．

2．（5 分）直线 l_1：$mx-3y-1=0$，l_2：$(3m-2)x-my+2=0$，若 $l_1\perp l_2$，则实数 m 的值为（　　）

A．0　　B．3　　C．0 或$-\frac{1}{3}$　　D．0 或 3

【答案】C

【分析】根据直线垂直的充要条件列方程求解即可．

【解答】解：因为 l_1：$mx-3y-1=0$，l_2：$(3m-2)x-my+2=0$，$l_1\perp l_2$，

所以 $m(3m-2)+(-3)\times(-m)=0$，即 $3m^2+m=0$，

解得 $m=0$ 或$m=-\frac{1}{3}$．

故选：C．

3．（5 分）圆 $x^2+y^2-6y=0$ 在点$P(\sqrt{5},1)$处的切线方程为（　　）

A．$\sqrt{5}x-2y-3=0$　　B．$\sqrt{5}x-2y+3=0$　　C．$2x-\sqrt{5}y-3=0$　　D．$2x-\sqrt{5}y+3=0$

【答案】A

【分析】先计算出$k_{AP}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，从而由斜率乘积为－1 得到切线斜率，利用点斜式写出切线方程，得到答案．

【解答】解：因为$(\sqrt{5})^2+1^2-6\times1=0$，所以$P(\sqrt{5},1)$在圆 $x^2+y^2-6y=0$ 上，

$x^2+y^2-6y=0$ 的圆心为 $A(0,3)$，

故$k_{AP}=\frac{3-1}{0-\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

设圆 $x^2+y^2-6y=0$ 在点 $P(\sqrt{5}，1)$处的切线方程斜率为 k，

故 $k\bullet k_{AP}=-1$，解得 $k=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以圆 $x^2+y^2-6y=0$ 在点 $P(\sqrt{5}，1)$处的切线方程为$y-1=\frac{\sqrt{5}}{2}(x-\sqrt{5})$，

变形得到$2y-2=\sqrt{5}x-5$，即$\sqrt{5}x-2y-3=0$.

故选：*A*.

4.（5 分）两条平行直线 $3x-y+3=0$ 和 $ax-y+4=0$ 间的距离为 d，则 a，d 分别为（　　）

A．$a=3，d=\frac{1}{10}$　　B．$a=3，d=\frac{\sqrt{10}}{10}$

C．$a=-3，d=\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$a=-3，d=\frac{1}{10}$

【答案】*B*

【分析】由两直线平行可推出 a，再根据平行线间距离公式可计算 d.

【解答】解：由题意可得 $3\times(-1)=-1\times a\Rightarrow a=3$，

再由平行线的距离公式得 $d=\frac{|4-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：*B*.

5.（5 分）一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 10*km* 的圆形区域内，已知小岛中心位于轮船正西 10*akm*（$a>0$）处，港口位于小岛中心正北 20*km* 处，如果轮船沿直线返港，不会有触礁危险，则 a 的取值范围是（　　）

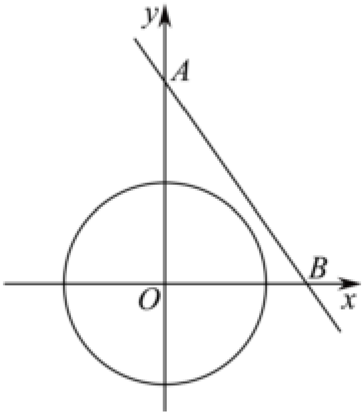
A．$(\frac{2\sqrt{3}}{3}，+\infty)$　B．$(1，+\infty)$　　C．$(\frac{4\sqrt{3}}{3}，+\infty)$　D．$(2，+\infty)$

【答案】*A*

【分析】建立平面直角坐标系，写出轮船沿直线返港时直线 *AB* 的方程及暗礁分布的圆形区域的边界⊙*O* 的方程，由轮船沿直线返港不会有触礁危险可得直线 *AB* 与⊙*O* 相离，进而可求得结果.

【解答】解：以小岛中心为原点 *O*，东西方向为 x 轴，南北方向为 y 轴建立平面直角坐标系，

则设轮船所在位置为点 *B*，港口所在位置为点 *A*，如图所示，



则 A（0，20），B（$10a$，0）（$a>0$），暗礁分布的圆形区域的边界⊙O 的方程为 $x^2+y^2=100$，

所以轮船沿直线返港时直线 AB 的方程为$y-20=\frac{0-20}{10a-0}x$，即 $2x+ay-20a=0$，

又因为轮船沿直线返港不会有触礁危险，

所以直线 AB 与⊙O 相离，

即圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-20a|}{\sqrt{4+a^2}}>10$（$a>0$），解得 $a>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 a 的取值范围是 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}，+\infty)$．

故选：A．

6．（5 分）已知圆 C：$(x-2)^2+(y-4)^2=35$，直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$，则直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为（　　）

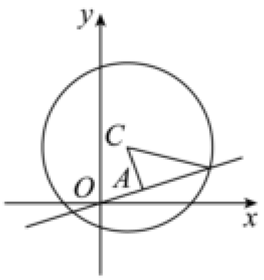
A．5　　B．$4\sqrt{5}$　　C．10　　D．$2\sqrt{5}$

【答案】C

【分析】先判定直线 l 过定点，再由弦长公式计算即可．

【解答】解：由 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0\Rightarrow m(2x+y-7)+x+y-4=0$，

$\begin{cases}x+y-4=0\\2x+y-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，即 l 过定点 A（3，1），



由 C：$(x-2)^2+(y-4)^2=35$ 得 C（2，4），半径 $r=\sqrt{35}$，

则当 $AC\perp l$ 时，C 到 l 的距离最远，此时 l 被圆 C 截得的弦长最小，

最小值为$2\sqrt{r^2-|AC|^2}=10$.

故选：C.

7.（5 分）已知 $x+y=0$，则$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$的最小值为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$2\sqrt{5}$

【答案】C

【分析】将原式化简为$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，表示直线 $x+y=0$ 上的点（x，y）到点 A（1，1），点 B（2，0）的距离之和的最小值，求出 A（1，1）关于直线 $x+y=0$ 的对称点 C（﹣1，1），再由两点间的距离公式求出$|BC|$的长度即得答案．

【解答】解：因为$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，表示点（$x$，$y$）到点（1，1），（2，0）的距离之和，

又因为 $x+y=0$，

所以上述式子表示直线 $x+y=0$ 上的点（x，y）到点 A（1，1），点 B（2，0）的距离之和的最小值．

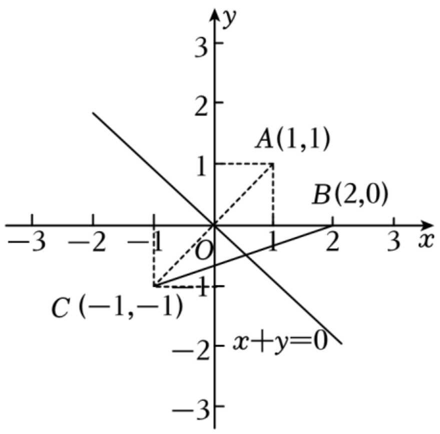
设 A（1，1）关于直线 $x+y=0$ 的对称点为 C（a，b），

则有$\begin{cases}\frac{b-1}{a-1}=1\\ \frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$，

所以$|BC|=\sqrt{(2+1)^2+1^2}=\sqrt{10}$，

所以直线 $x+y=0$ 上的点（x，y）到点 A（1，1），点 B（2，0）的距离之和的最小值为$|BC|=\sqrt{10}$．

故选：C．



8.（5 分）已知圆 C：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 和两点 A（a，0），B（﹣a，0）（$a>0$），若圆 C 上至少存在

一点 P，使得 $\angle APB>90°$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（3，7）　　　　B．（3，+∞）　　　　C．（3，7]　　　　D．（0，7）

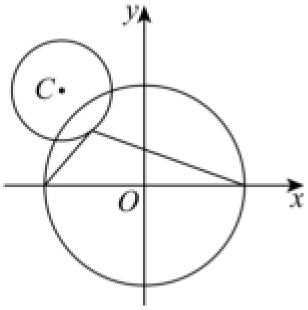
【答案】B

【分析】根据已知条件可得圆 C：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 与圆 O：$x^2+y^2=a^2$（$a>0$）位置关系为相交、内切或内含即可满足题意，进而求得 a 的值．

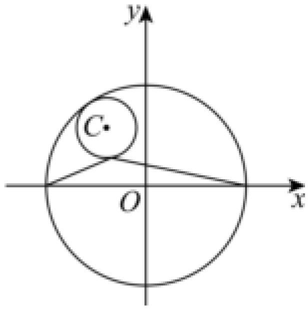
【解答】解：圆 C：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心 $C(-3,4)$，半径为 $r=2$，

因为圆 C 上至少存在一点 P，使得 $\angle APB>90°$，

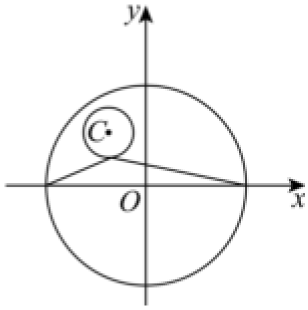
所以圆 C：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 与圆 O：$x^2+y^2=a^2$（$a>0$）位置关系为相交、内切或内含，如图所示，



或



或



所以 $|OC|<2+a$，

又因为 $|OC|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，所以 $5<2+a$，即 $a>3$．

故选：B．

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．过点（2，4）并且倾斜角为 90° 的直线方程为 $x-2=0$

B．过点 $A(-2,\ -3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线 l 方程为 $x+y+5=0$

C．经过点 $P(1,1)$，倾斜角为 θ 的直线方程为 $y-1=\tan\theta(x-1)$

D．过（5，1），（2，－2）两点的直线的方程为 $x-y-4=0$

【答案】AD

【分析】根据直线倾斜角与斜率的关系，结合截距的定义、直线的两点式方程进行逐一判断即可．

【解答】解：A：直线的倾斜角为 90°，所以该直线与横轴垂直，所以直线方程为 $x-2=0$，故本选项正确；

B：当直线在两坐标轴上截距都为零时，方程设为 $y=kx$，过点 $A(-2,\ -3)$，

所以有 $-3=(-2)\cdot k\Rightarrow k=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}x$，所以本选项不正确；

C：当直线的倾斜角为 90° 时，tanθ 没有意义，所以本选项不正确；

D：直线过（5，1），（2，﹣2）两点，所以有$\frac{y-1}{1+2}=\frac{x-5}{5-2}\Rightarrow x-y-4=0$，因此本选项正确．

故选：*AD*．

（多选）10．（5 分）已知直线 *l*：*x*+*y*﹣5＝0 与圆 *C*：（*x*﹣1）^{2}+y^2＝2，若点 *P* 为直线 *l* 上的一个动点，下列说法正确的是（　　）

A．直线 *l* 与圆 *C* 相交

B．若点 *Q* 为圆 *C* 上的动点，则|*PQ*|的取值范围为 $[\sqrt{2}，+\infty)$

C．与直线 *l* 平行且截圆 *C* 的弦长为 2 的直线为$x+y+\sqrt{2}-5=0$或$x+y-\sqrt{2}-5=0$

D．圆 *C* 上存在两个点到直线 *l* 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【答案】*BD*

【分析】根据圆心到直线的距离即可求解 *ABD*，由平行的斜率关系，结合弦长公式即可求解 *C*．

【解答】解：对于选项 *A*：圆心（1，0）到直线 *l*：*x*+*y*﹣5＝0 的距离为$d=\frac{|1+0-5|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>r=\sqrt{2}$，

故直线与圆 *C* 相离，所以选项 *A* 错误，

对于选项 *B*，圆上的点到直线的最小距离为$d-r=\sqrt{2}$，故|*PQ*|的取值范围为$[\sqrt{2}，+\infty)$，所以选项 *B* 正确，

对于选项 *C*，设与 *l*：*x*+*y*﹣5＝0 平行的直线为 *x*+*y*+*m*＝0，

由于圆心到直线的距离为$d=\sqrt{r^2-(\frac{2}{2})^2}=1$，所以$d=\frac{|1+0+m|}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow m=-1\pm\sqrt{2}$，

故直线为$x+y+\sqrt{2}-1=0$或$x+y-\sqrt{2}-1=0$，故选项 *C* 错误，

对于选项 *D*，由于圆上的点到直线的最小距离为$d-r=\sqrt{2}$，最大距离为$d+r=3\sqrt{2}$，

而$\sqrt{2}<\frac{3\sqrt{2}}{2}<3\sqrt{2}$，故圆 *C* 上存在两个点到直线 *l* 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以选项 *D* 正确．

故选：*BD*．

（多选）11．（5 分）已知实数 *x*，*y* 满足曲线 *C* 的方程 $x^2+y^2-2x-3=0$，则下列选项正确的是（　　）

A．点（4，4）到曲线 *C* 上任意点距离最大为 7

B．x^2+y^2 的最大值是 3

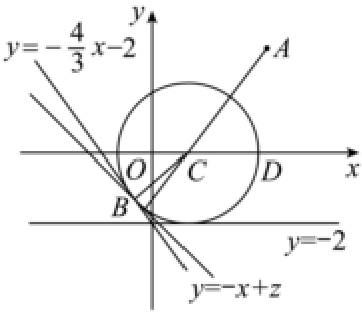
C．*x*+*y* 的最小值是 $1-2\sqrt{2}$

D．$\frac{y+2}{x}$的取值范围是$(-\infty,\ -\frac{4}{3}]\cup[0,\ +\infty)$

【答案】*ACD*

【分析】根据题意，利用点与圆的位置关系，数形结合判断出 *A* 正确；由两点距离公式算出 *B* 不正确；最后由直线与圆的位置关系判断出 *C*、*D* 的正误．

【解答】解：根据题意，曲线 *C* 的方程可化为$(x-1)^2+y^2=4$，表示以 *C*（1，0）为圆心，半径 $r=2$ 的圆．



如图所示，设 *A*（4，4），圆心 *C*（1，0），半径 $r=2$，连接 *AC* 并延长，交圆 *C* 于 *B* 点，

此时$|AB|$长为点（4，4）到曲线 *C* 上任意一点距离的最大值，

可知$|AB|=|AC|+r=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}+2=7$，故 *A* 正确；

由$x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2$，可知x^2+y^2为圆上一点到原点距离的平方，

延长 *OC* 交圆 *C* 于 *D* 点，则$(x^2+y^2)_{max}=|OD|^2=(r+1)^2=9$，故 *B* 错误；

令 $z=x+y$，则 $y=-x+z$，可得 $x+y$ 的值为过圆上一点的直线 $y=-x+z$ 在纵轴上的的截距，

当直线与圆相切时，$x+y$ 取得最值，此时点 *C* 到直线 $y=-x+z$ 的距离等于半径，

而$d=\frac{|z-1|}{\sqrt{2}}=r=2\Rightarrow z=\pm2\sqrt{2}+1\Rightarrow(x+y)_{min}=1-2\sqrt{2}$，故 *C* 正确；

由$\frac{y+2}{x}=\frac{y-(-2)}{x-0}$，可知$\frac{y+2}{x}$为圆 *C* 上一点与点（0，－2）的斜率，

当直线与圆 *C* 相切时斜率取得最大或最小值，

设该切线方程为 $y=kx-2$，则$\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=r=2\Rightarrow k=0$或$k=-\frac{4}{3}$，

结合图象可知：$k\in(-\infty,\ -\frac{4}{3}]\cup[0,\ +\infty)$，故 *D* 正确．

故选：*ACD*．

（多选）12．（5 分）已知圆 *M*：$(x+4)^2+y^2=4$ 直线 *l*：$x+y-2=0$，点 *P* 在直线 *l* 上运动，直线 *PA*，*PB* 分别与圆 *M* 切于点 *A*，*B*．则下列说法正确的是（　　）

A．四边形 $PAMB$ 的面积最小值为 $2\sqrt{14}$

B．$|PA|$最短时，弦 AB 长为$\frac{4\sqrt{7}}{3}$

C．$|PA|$最短时，弦 AB 直线方程为 $3x+3y-8=0$

D．直线 AB 过定点 $(-\frac{10}{3}，\frac{2}{3})$

【答案】ABD

【分析】A 选项，四边形的面积可以看成两个直角三角形的面积之和，又因切线长定理可知，当$|AP|$最短时，面积最小．

B 选项，由圆的弦长公式结合锐角三角函数即可求解．

C 选项，两垂直直线的斜率相乘等于－1，两平行直线斜率相等．

D 选项，由向量积公式求定点坐标．

【解答】解：对于选项 A，圆 M：$(x+4)^2+y^2=4$ 直线 l：$x+y-2=0$，点 P 在直线 l 上运动，直线 PA，PB 分别与圆 M 切于点 A，B．如图：

四边形的面积可以看成两个直角三角形的面积之和，

即 $S_{四边形PAMB}=S_{\triangle MPA}+S_{\triangle MPB}=2S_{\triangle MPA}=2\times\frac{1}{2}\times|PA||AM|=2|PA|=2\sqrt{PM^2-AM^2}=2\sqrt{PM^2-4}$，

∴$|MP|$最短时，面积最小，故当 $MP\perp l$ 时，$|MP|$最短，

即$MP=d=\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

∴ $S_{四边形PAMB}=2\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4}=2\sqrt{14}$，即四边形 $PAMB$ 的面积最小值为 $2\sqrt{14}$，故选项 A 正确．

对于选项 B，由上述选项 A 的解答可知，$MP\perp l$ 时，$|MP|$最短，故$|PA|$最小，且最小值为 $|PA|=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4}=\sqrt{14}$，

∴ $|AB|=2|AM|\sin\angle AMP=2|AM|\frac{|AP|}{|PM|}=2\times2\times\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{7}}{3}$，即$|PA|$最短时，弦 AB 长为$\frac{4\sqrt{7}}{3}$，

故选项 B 正确，

对于选项 C，当$|PA|$最短时，则 $MP\perp l$，又 $MP\perp AB$，∴$l\parallel AB$，$k_l=-1$，∴$k_{AB}=-1$，

可设 AB 的直线方程为 $x+y+m=0$，

∴圆心 $M(-4，0)$到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-4+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{AM^2-(\frac{AB}{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

解得 $m=\frac{8}{3}$，$m=\frac{16}{3}$，

由于直线 AB 在圆心 $M(-4，0)$的右侧，且在直线 l 的左侧，∴ $-4<-m<2\Rightarrow-2<m<4$，

$\therefore m=\frac{8}{3}$，$m=\frac{16}{3}$（舍去），

即直线 AB 的方程为 $x+y+\frac{8}{3}=0$．与$|PA|$最短时，弦 AB 直线方程为 $3x+3y-8=0$ 不符，故选项 C 错误．

对于选项 D，设圆上一点 A 为（x_A，y_A），B（x_B，y_B），P（x_P，y_P），

$\therefore \overrightarrow{MA}=(x_A+4, y_A)$，$\overrightarrow{MB}=(x_B+4, y_B)$，$\overrightarrow{PA}=(x_A-x_P, y_A-y_P)$，

易知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{MA}=0\Rightarrow(x_A+4)(x_A-x_P)+y_A(y_A-y_P)=0$，由于 $(x_A+4)^2+y_A^2=4$，

$\therefore$（x_P+4）（x_A+4）$+y_P\cdot y_A=4$，

同理 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow(x_P+4)(x_B+4)+y_P\cdot y_B=4$，

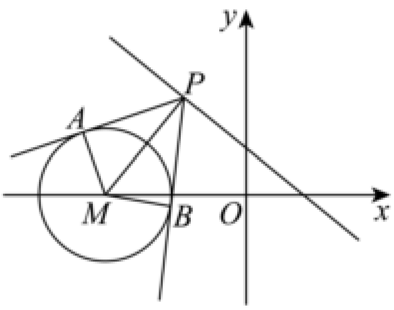
$\therefore AB$：（$x+4$）（x_P+4）$+y\cdot y_P=4$．

$\because y_P=-x_P+2$，$\therefore$（$x+4$）（x_P+4）$+y$（$2-x_P$）$=4$，

将 $(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ 代入得 $\frac{2}{3}\cdot(x_P+4)+\frac{2}{3}(2-x_P)=4$ 等号成立，

故直线 AB 过定点为 $(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$，故选项 D 正确．

故选：ABD．



三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.（5 分）已知直线 l 与直线 $3x-4y+4=0$ 平行，且经过点（2，-3），则直线 l 的方程为 <u>$3x-4y-18=0$</u>．

【答案】$3x-4y-18=0$．

【分析】运用直线平行的性质可设直线 l 的方程，将点的坐标代入可得参数的值，进而可得所求的直线的方程．

【解答】解：因为直线 l 与直线 $3x-4y+4=0$ 平行，

设直线 l 的范围为：$3x-4y+a=0$，

将（2，-3）点的坐标代入可得：$3\times2-4\times(-3)+a=0$，

解得 $a=-18$，所以直线 l 的方程为：$3x-4y-18=0$．

故答案为：$3x-4y-18=0$．

14．（5 分）已知点 $A(-2,1)$，$B(-1,0)$，$C(2,3)$，$D(a,3)$ 四点共圆，则点 D 到坐标原点 O 的距离为 __$\sqrt{13}$__．

【答案】$\sqrt{13}$．

【分析】运用待定系数法求得过 A、B、C 的圆的方程，由点 D 在此圆上可求得 a^2 的值，再根据两点间距离公式即可求得结果．

【解答】解：设过 A、B、C 的圆的方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$），

由已知得$\begin{cases}4+1-2D+E+F=0\\1-D+F=0\\4+9+2D+3E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}D=0\\E=-4\\F=-1\end{cases}$，

所以过 A、B、C 的圆的方程为：$x^2+y^2-4y-1=0$，

又因为点 D 在此圆上，

所以 $a^2+3^2-4\times3-1=0$，解得 $a^2=4$，

所以点 D 到坐标原点 O 的距离为$\sqrt{a^2+3^2}=\sqrt{4+3^2}=\sqrt{13}$．

故答案为：$\sqrt{13}$．

15．（5 分）已知直线 l: $kx-y-2k+3=0$ 与曲线$y=\sqrt{4-x^2}$有两个交点，则 k 的取值范围为 __$(\frac{5}{12},\frac{3}{4}]$__．

【答案】$(\frac{5}{12},\frac{3}{4}]$．

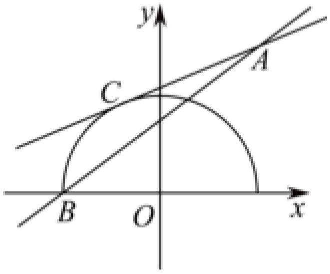
【分析】由直线与圆的位置关系数形结合计算即可．

【解答】解：直线 l：$kx-y-2k+3=0\Rightarrow k(x-2)-(y-3)=0$，即 l 过定点 $A(2,3)$，

$y=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=4(y\geqslant0)$，即曲线$y=\sqrt{4-x^2}$为原点为圆心，2 为半径的半圆，

如图所示，设 l：$kx-y-2k+3=0$ 与曲线$y=\sqrt{4-x^2}$切于点 C，

曲线$y=\sqrt{4-x^2}$与横轴负半轴交于点 B，



则$k_{AB}=\frac{3-0}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$，$\frac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Rightarrow k=\frac{5}{12}$，故$k\in(\frac{5}{12},\frac{3}{4}]$．

故答案为：$(\frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$.

16.（5 分）已知圆 C_1：$(x+3)^2+(y-2)^2=4$ 和圆 C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$，设 P 为平面上的点，且满足：存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，则所有满足条件的点 P 的坐标为 <u>（﹣1，7）或（2，0）</u>．

【答案】（﹣1，7）或（2，0）．

【分析】根据已知条件设出直线 l_1 与直线 l_2 的方程，由两圆半径相等且弦长相等，结合圆的弦长公式可得⊙C_1 的圆心到直线 l_1 的距离等于⊙C_2 的圆心到直线 l_2 的距离，再运用点到直线的距离公式列式，再结合含参直线方程恒过定点即可求得结果．

【解答】解：由题意知，直线 l_1、l_2 的斜率均存在且不为 0，设点 P（a，b）满足条件，

不妨设直线 l_1 的方程为 $y-b=k(x-a)$（$k\neq 0$），则直线 l_2 的方程为$y-b=-\frac{1}{k}(x-a)$，

因为⊙C_1 和⊙C_2 的半径都为 2，且直线 l_1 被⊙C_1 截得的弦长与直线 l_2 被⊙C_2 截得的弦长相等，

所以⊙C_1 的圆心到直线 l_1 的距离等于⊙C_2 的圆心到直线 l_2 的距离，

即$\frac{|2-k(-3-a)-b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5+\frac{1}{k}(4-a)-b|}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}$，

整理得$|2+3k+ak-b|=|5k+4-a-bk|$，

所以 $2+3k+ak-b=5k+4-a-bk$ 或 $2+3k+ak-b=-(5k+4-a-bk)$，

即 $(a+b-2)k+a-b-2=0$ 或 $(a+8-b)k+6-a-b=0$，

因为 k 的取值有无穷多个，

所以$\begin{cases}a+b-2=0\\a-b-2=0\end{cases}$或$\begin{cases}a+8-b=0\\6-a-b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=7\end{cases}$，

所以满足条件的点 P 的坐标为（﹣1，7）或（2，0）．

故答案为：（﹣1，7）或（2，0）．

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分．）

17.（10 分）△ABC 的三个顶点为 A（﹣2，﹣6），B（2，﹣4），C（3，4）．求：

（1）AB 所在直线的方程；

（2）AB 边上的中线所在直线的方程．

【答案】（1）$x-2y-10=0$；

（2）$y=3x-5$．

【分析】（1）根据两点斜率公式以及点斜式即可求解，

（2）根据中点坐标以及斜截式即可求解．

【解答】解：（1）因为 $A(-2,\ -6)$，$B(2,\ -4)$，所以直线 AB 的斜率 $k=\frac{-6-(-4)}{-2-2}=\frac{1}{2}$，

所以直线 AB 的方程为 $y-(-6)=\frac{1}{2}(x+2)$，整理可得：$x-2y-10=0$．

（2）由中点坐标公式可得 AB 中点坐标为 $(0,\ -5)$，$C(3,\ 4)$，所以 AB 边上的中线所在直线的斜率为 $k'=\frac{-5-4}{0-3}=3$．

故直线方程为 $y=3x-5$．

18．（12 分）已知圆心为 C 的圆经过 $A(0,3)$，$B(1,2)$ 两点，且圆心 C 在直线 l：$x+y=0$ 上．

（1）求圆 C 的标准方程；

（2）求过点（2，3）且与圆 C 相切的直线方程．

【答案】（1）$(x+1)^2+(y-1)^2=5$；

（2）$y=\frac{3-\sqrt{10}}{2}x+\sqrt{10}$ 和 $y=\frac{3+\sqrt{10}}{2}x-\sqrt{10}$．

【分析】（1）求出线段 AB 的垂直平分线方程，圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线上，故联立两直线方程，求出圆心坐标，进而求出半径，得到圆的方程；

（2）设出切线方程，由点到直线距离公式得到方程，求出 $k=\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$，得到切线方程．

【解答】解：（1）AB 的中点为 $(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2})$，$k_{AB}=-1$，所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $x-y+2=0$，

由垂径定理可知，圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线上，

所以它的坐标是方程组 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+2=0\end{cases}$ 的解，解之得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$

所以圆心 C 的坐标是 $(-1,1)$，圆的半径 $r=|AC|=\sqrt{5}$，

所以圆 C 的标准方程是 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$．

（2）由题意可得切线的斜率不存在时不满足，所以设切线方程为 $y=k(x-2)+3$ 即 $kx-y-2k+3=0$，

由已知得 $\frac{|-3k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{5}$，解得 $k=\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$，

所以切线方程为 $y=\frac{3-\sqrt{10}}{2}x+\sqrt{10}$ 和 $y=\frac{3+\sqrt{10}}{2}x-\sqrt{10}$．

19．（12 分）已知直线 l 的方程为：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$．

（1）求证：不论 m 为何值，直线必过定点 M；

（2）过点 M 引直线 l_1，使它与两坐标轴的正半轴所围成的三角形面积最小，求 l_1 的方程．

【答案】（1）证明见解析；

（2）$x+3y-6=0$．

【分析】（1）将直线方程改写成 $m(2x+y-7)+x+y-4=0$ 形式，解方程组$\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$即可．

（2）设出直线 l_1 的方程，分别令 $x=0$、$y=0$ 求出相对于的 y 值、x 值，结合三角形面积公式及基本不等式即可求得结果．

【解答】解：（1）证明：由 $(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$ 可得：$m(2x+y-7)+x+y-4=0$，

令$\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，

所以直线 l 过定点 $M(3,1)$．

（2）由（1）知，直线 l_1 恒过定点 $M(3,1)$，

所以设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-3)+1$（$k<0$），

令 $x=0$，则 $y=1-3k$；令 $y=0$，则$x=3-\frac{1}{k}$，

所以$S=\frac{1}{2}|(1-3k)(3-\frac{1}{k})|=\frac{1}{2}|(-9k)+(-\frac{1}{k})+6|\geqslant\frac{1}{2}(2\sqrt{(-9k)(-\frac{1}{k})}+6)=6$，

当且仅当$-9k=\frac{1}{-k}$，即$k=-\frac{1}{3}$时，三角形面积最小，

此时 l_1 的方程为 $x+3y-6=0$．

20.（12 分）在直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，圆 C 的圆心为 $C(a,2a-4)$，半径为 1．

（1）若 $a=2$，直线 l 经过点 A 交圆 C 于 M、N 两点，且$|MN|=\sqrt{2}$，求直线 l 的方程；

（2）若圆 C 上存在点 M 满足 $|MA|=2|MO|$（O 为坐标原点），求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$x+y-3=0$ 或 $17x+7y-21=0$；

（2）$[0,\frac{12}{5}]$．

【分析】（1）由弦长公式计算即可；

（2）先求 M 的轨迹方程，结合两圆的位置关系计算即可．

【解答】解：（1）当 $a=2$，圆心 C 为 $(2,0)$ 圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，

设圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则$d=\sqrt{1-(\frac{MN}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

若直线 l 的斜率不存在，则 l：$x=0$，圆心 C 到直线 l 的距离为 2，直线与圆相离，不符合题意；

若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$，

$d=\frac{|2k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $7k^2+24k+17=0$，得 $k_1=-1$，$k_2=-\frac{17}{7}$，

所以直线 l 的方程为 $x+y-3=0$ 或 $17x+7y-21=0$；

（2）圆 C 的方程为 $(x-a)^2+[y-(2a-4)]^2=1$，

设点 $M(x,y)$，因为 $|MA|=2|MO|$，所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

化简得 $x^2+y^2+2y-3=0$，即 $x^2+(y+1)^2=4$，

所以点 M 在以 $D(0,-1)$ 圆心，2 为半径的圆上．

由题意，点 M 在圆 C 上，所以圆 C 与圆 D 有公共点，

则 $|2-1|\leqslant|CD|\leqslant2+1$，即 $1\leqslant\sqrt{a^2+(2a-3)^2}\leqslant3$，

由 $5a^2-12a+8\geqslant0$，得 $a\in\mathbf{R}$；由 $5a^2-12a\leqslant0$，得 $0\leqslant a\leqslant\frac{12}{5}$．

所以实数 a 的取值范围为 $[0,\frac{12}{5}]$．

21．（12 分）已知圆 C_1：$(x+1)^2+(y+2)^2=8$ 关于直线 l_1：$y=x-3$ 对称的图形为圆 C．

（1）求圆 C 的方程；

（2）直线 l：$y=k(x-1)(k>1)$ 与圆 C 交于 E，F 两点，若△OEF（O 为坐标原点）的面积为 $\sqrt{3}$，求直线 l 的方程．

【答案】（1）$(x-1)^2+(y+4)^2=8$；

（2）$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$．

【分析】（1）利用点关于线对称可求得圆心 C 的坐标，从而可得其方程；

（2）用 k 表示点 O、C 到直线 l 的距离及 $|EF|$，由面积求解即可．

【解答】解：（1）设圆 C 的圆心坐标为 $C(a,b)$，

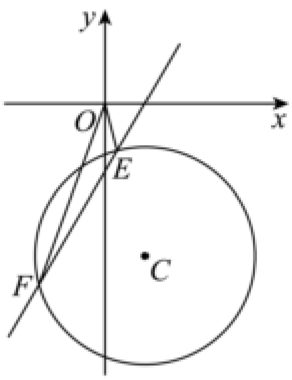
由题意可得 $C_1(-1,-2)$，则 CC_1 的中点坐标为 $(\frac{a-1}{2},\frac{b-2}{2})$，

因为圆 C_1：$(x+1)^2+(y+2)^2=8$ 关于直线 l_1：$y=x-3$ 对称的图形为圆 C，

所以 $\begin{cases}\frac{b-2}{2}=\frac{a-1}{2}-3\\ \frac{b+2}{a+1}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-4\end{cases}$，

因为圆 C_1 和圆 C 的半径相同，即 $r=2\sqrt{2}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2=8$．



（2）

设圆心 C 到直线 l：$y=k(x-1)$ 的距离为 d_1，

原点 O 到直线 l：$y=k(x-1)$ 的距离为 d_2，

则 $d_1=\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_2=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$|EF|=2\sqrt{r^2-d_1^2}$，

所以 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot d_2=\sqrt{r^2-d_1^2}\cdot d_2=\sqrt{3}$，

所以 $(8-\frac{16}{k^2+1})\cdot\frac{k^2}{k^2+1}=3$，解得 $k^2=3$，

因为 $k>1$，所以 $k=\sqrt{3}$，所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

即 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$.

22.（12 分）已知圆 W 经过 $A(3,\ 3)$，$B(2,\ 2\sqrt{2})$，$C(2,\ -2\sqrt{2})$ 三点.

（1）求圆 W 的方程.

（2）已知直线 l 与圆 W 交于 M，N（异于 A 点）两点，若直线 AM，AN 的斜率之积为 2，试问直线 l 是否经过定点？若经过，求出该定点坐标；若不经过，请说明理由.

【答案】（1）$x^2+y^2-6x=0$.

（2）直线 l 经过定点，该定点的坐标为（3，﹣9）.

【分析】（1）设出圆 W 的一般方程，代入 A，B，C 的坐标，由此求得正确答案.

（2）根据直线 l 的斜率是否存在进行分类讨论，由直线 AM，AN 的斜率之积列方程，化简求得定点坐标.

【解答】解：（1）设圆 W 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}3D+3E+F+18=0\\2D+2\sqrt{2}E+F+12=0\\2D-2\sqrt{2}E+F+12=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-6\\E=0\\F=0\end{cases}$，

则圆 W 的方程为 $x^2+y^2-6x=0$.

（2）若直线 l 的斜率不存在，则设直线 l 的方程为 $x=x_0$，M（x_0，y_0），N（x_0，$-y_0$），

则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_0-3}{x_0-3}\cdot\frac{-y_0-3}{x_0-3}=2$，整理得 $2(x_0-3)^2+y_0^2=9$.

又 $(x_0-3)^2+y_0^2=9$，解得 $x_0=3$，所以直线 l 的方程为 $x=3$，此时 l 经过点 A（3，3），不符合题意.

若直线 l 的斜率存在，则设直线 l 的方程为 $y=tx+b$，M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），

联立方程组 $\begin{cases}y=tx+b\\x^2+y^2-6x=0\end{cases}$，整理得（$t^2+1$）$x^2+$（$2tb-6$）$x+b^2=0$，

则 $\triangle=-4b^2-24tb+36>0$，$x_1+x_2=\frac{6-2tb}{t^2+1}$，$x_1x_2=\frac{b^2}{t^2+1}$.

$k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1-3}{x_1-3}\cdot\frac{y_2-3}{x_2-3}=\frac{(tx_1+b-3)(tx_2+b-3)}{(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{t^2x_1x_2+(tb-3t)(x_1+x_2)+b^2-6b+9}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}=\frac{9t^2+b^2+6tb-18t-6b+9}{9t^2+b^2+6tb-9}=2$，

则 $9t^2+b^2+6tb+18t+6b-27=0$，

整理得 $(3t+b)^2+6(3t+b)-27=(3t+b+9)(3t+b-3)=0$，

解得 $b=-3t-9$ 或 $b=-3t+3$.

当 $b=-3t+3$ 时，直线 l_2 的方程为 $y=tx-3t+3$，

此时直线 l 经过点 A（3，3），不符合题意，故舍去.

所以 $b=-3t-9$，

故直线 l 的方程为 $y=tx-3t-9$，即 $y=t(x-3)-9$，经过定点（3，-9）.

综上所述，直线 l 经过定点，且该定点的坐标为（3，-9）.