

2024 年江苏省无锡市滨湖区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1.（3 分）4 的算术平方根是（ ）

- A. ± 2 B. -2 C. 2 D. $\sqrt{2}$

2.（3 分）函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 中的自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq \frac{1}{2}$ B. $x \geq 1$ C. $x > \frac{1}{2}$ D. $x \geq \frac{1}{2}$

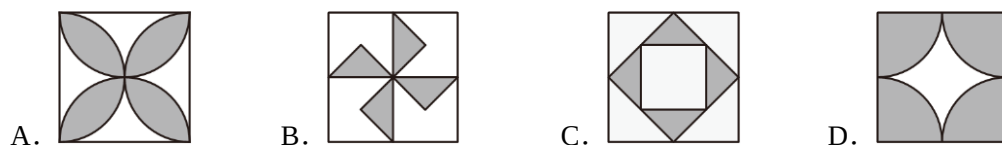
3.（3 分）下列计算正确的是（ ）

- A. $3a \cdot a^3 = 3a^3$ B. $a+a=a^2$
C. $(2a^2)^3 = 6a^6$ D. $a^3 \div a = a^2$

4.（3 分）一组数据 11, 12, 13, 13, 15, 16, 17, 18 的中位数和众数分别为（ ）

- A. 15, 13 B. 13, 14 C. 14, 13 D. 13, 13

5.（3 分）下列图形中，是中心对称图形，但不是轴对称图形的是（ ）



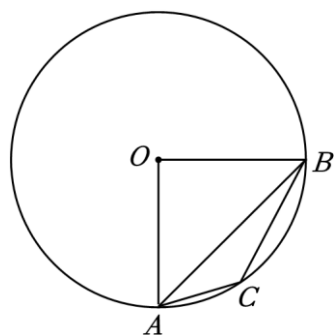
6.（3 分）小明从某一角度看一个立体图形，看到的形状为三角形，则这一立体图形一定不是（ ）

- A. 圆柱 B. 圆锥 C. 棱柱 D. 棱锥

7.（3 分）下列结论中，菱形具有而矩形不一定具有的性质是（ ）

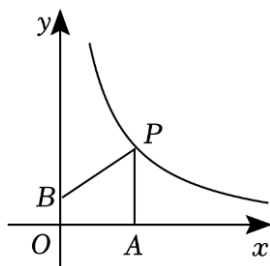
- A. 内角和为 360° B. 对角线互相平分
C. 对角线相等 D. 对角线互相垂直

8.（3 分）如图，在 $\odot O$ 中，半径 OA , OB 互相垂直，点 C 在劣弧 AB 上. 若 $\angle ABC=20^\circ$ ，则 $\angle BAC=$ （ ）



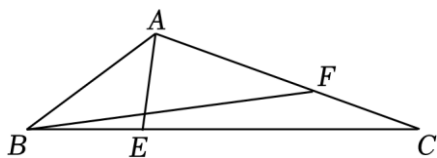
- A. 20° B. 25° C. 30° D. 45°

9. (3分) 如图，在平面直角坐标系中， P 为函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 图象上的一点，过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A ，将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转得到线段 PB ，点 B 恰好落在 y 轴上，若点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$ ，则 k 的值为 ()



- A. 16 B. 20 C. $12\sqrt{3}$ D. $15\sqrt{2}$

10. (3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=5$ ， $BC=7$ 。E、F 分别为 BC 、 CA 上的动点，且 $BE=CF$ ，连接 AE 、 BF ，则 $AE+BF$ 的最小值为 ()



- A. $\sqrt{35}$ B. $\sqrt{37}$ C. 6 D. $\sqrt{39}$

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.第 16 题第一空 1 分，第二空 2 分.不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置）

11. (3分) 分解因式： $2x^2 - 8 =$ _____.
12. (3分) 2024 年 3 月 24 日，3.3 万名选手齐聚樱花赛道参加 2024 无锡马拉松比赛，据无锡市大数据管理局统计，本届马拉松产生餐饮、住宿、交通、旅游等经济效益共约 276700000 元，请将 276700000 用科学记数法表示为 _____.
13. (3分) 请写出一个 $\sqrt{3}$ 的同类二次根式 _____.
14. (3分) 若一个圆锥的侧面积是底面积的 3 倍，则这个圆锥侧面展开图的圆心角等于 _____°.
15. (3分) 《九章算术》中有一道题，原文是“今有人共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六.问人数、鸡价各几何？”意思是：有若干人凑钱合伙买鸡，如果每人出 9 文钱，多出 11 文钱；如果每人出 6 文钱，还差 16 文钱.问买鸡的人数、鸡的价钱各是多少？设有 x 人共同买鸡，根据题意，则可列方程为 _____.
16. (3分) 抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 与 y 轴交点的坐标为 _____，将抛物线向下平移 _____ 个

单位长度，该抛物线与坐标轴有且只有两个交点．

17. (3分) 已知二次函数 $y=ax^2+c$ ($a>0$) 的图象与直线 $y=kx+b$ ($k>0$) 交于点 $M(-\sqrt{2}, m)$ 、 $N(2, n)$ 两点，则关于 x 的不等式 $ax^2 - kx + (c - b) < 0$ 的解集为 _____.

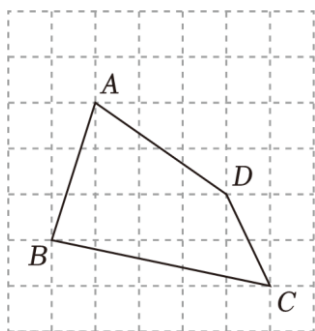
18. (3分) 如图，在网格图中（每个小正方形的边长为 1），点 A 、 B 、 C 、 D 均为格点，给出下列三个命题：

①点 A 到点 B 的最短距离为 $\sqrt{10}$ ；

②点 A 到直线 CD 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ；

③直线 AB 、 CD 所交的锐角为 45° ；

其中，所有正确命题的序号为 _____.（填序号）



三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (8分) (1) 计算： $|\sqrt{3}-2| - (\frac{1}{2})^{-2} + 2\sin 60^\circ$ ；

(2) 化简： $(a-b)^2 - a(a-2b)$.

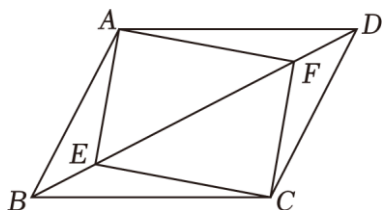
20. (8分) (1) 解方程： $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-1}$ ；

(2) 解不等式组： $\begin{cases} x+4 > -2x+1 \\ \frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \leq 1 \end{cases}$.

21. (10分) 如图，已知 E 、 F 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线上的两点，且 $BE=DF$ ，

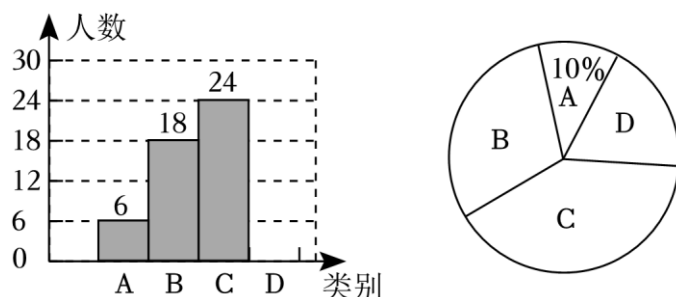
(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ；

(2) 若 $\angle AEC = 90^\circ$ ，求证：四边形 $AECF$ 为矩形.



22. (10 分) 某校为掌握九年级学生每周的自主学习情况，学生会随机抽取九年级的部分学生，调查他们每周自主学习的时间，并把自主学习的时间 (t) 分为四类：A ($0h \leq t < 3h$), B ($3h \leq t < 6h$), C ($6h \leq t < 9h$), D ($t \geq 9h$), 将分类结果绘制成如下两幅不完整的统计图：

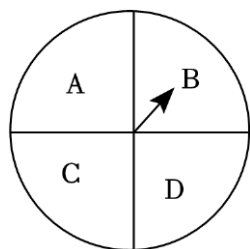
四种类别的人数条形分布直方图 四种类别的人数扇形统计图



根据以上信息，回答下列问题：

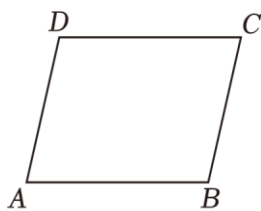
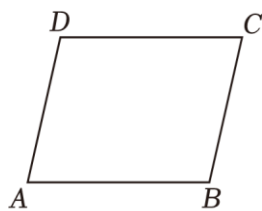
- (1) 求出本次抽样调查的样本容量为 _____；
 - (2) 补全频数分布直方图，并计算扇形统计图中 C 所在扇形的圆心角的度数为 _____°；
 - (3) 根据调查结果可知，自主学习时间的中位数落在 _____组；
 - (4) 若该校九年级有 1200 名学生，请估计一周自主学习的时间不少于 6h 的人数。
23. (10 分) 某班举行“红领巾寻访”展示活动，活动设计的项目及要求如下：A、讲一讲革命故事，B、说一说家乡变化，C、写一写美好愿望，D、画一画宏伟蓝图。人人参加，每人从中任意选一项。为公平起见，班委会制作了如图所示的可自由转动的转盘，将圆形转盘四等分并标上字母 A、B、C、D，每位学生转动转盘一次，转盘停止后，指针所指扇形部分的字母对应的活动项目即为他选到的项目（当指针指在分界线上时重转）。

- (1) 任意转动转盘一次，选到“A、讲一讲革命故事”的概率是 _____；
- (2) 甲、乙是该校的两位学生，请用列表或画树状图的方法，求甲和乙选到不同活动项目的概率。



24. (10 分) 如图，在平行四边形 ABCD 中， $AB > AD$ 。

- (1) 请用直尺（不带刻度）和圆规作图。要求：保留作图痕迹，不写作法。
 ①在 AB 上取一点 E，使 $\angle ADE = \angle AED$ ；②作 $\angle BCD$ 的平分线交 AB 于点 F。
- (2) 在 (1) 所作的图形中，DE 交 CF 于点 P，连接 DF。若 $DF \perp AB$ ，且 $AB = 6$ ， $BC = 5$ ，求 PE 的长。（如需画草图，请使用备用图）

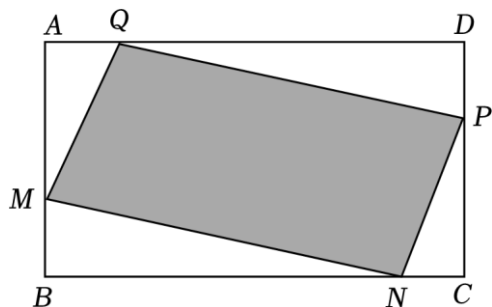


(备用图)

25. (10分) 如图所示, 某景区拟在矩形 $ABCD$ 的空地上建造一个含“内接平行四边形 $MNPQ$ ”的花坛. 平行四边形 $MNPQ$ 四个顶点 M 、 N 、 P 、 Q 分别在矩形 $ABCD$ 四条边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上. 已知 $AB=6m$, $BC=10m$, 为增加美感, 要求 $AQ=BM$. 设 $AQ=xm$ ($0 < x < 6$), 平行四边形 $MNPQ$ 的面积为 $S m^2$.

(1) 求 S 与 x 的函数关系式;

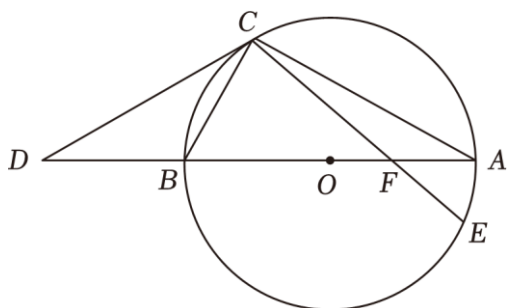
(2) 景区准备在平行四边形 $MNPQ$ 内种植“郁金香”, 四个三角形内种植“红玫瑰”. 已知“郁金香”的价格为 20 元/ m^2 , “红玫瑰”的价格为 40 元/ m^2 . 若景区购买两种花卉的预算不超过 1800 元, 求 x 的取值范围.



26. (10分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AC 、 BC , D 为 AB 延长线上一点, 连接 CD , 且 $\angle BCD = \angle A$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{10}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{10}$, E 为 $\odot O$ 上一点, 连接 CE 交线段 OA 于点 F , 若 $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{3}$, 求 BF 的长.



27. (10分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 点 P 是抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 如图 1，当点 P 在直线 AC 上方的抛物线上时，连接 AP 、 BP ， BP 交 AC 于点 D ，若 $S_{\triangle APD} = kS_{\triangle ABD}$ ，求 k 的取值范围；

(3) 已知 M 是直线 AC 上一动点，将点 M 绕着点 O 旋转 90° 得到点 Q ，若点 Q 恰好落在二次函数的图象上，请直接写出点 M 的坐标。

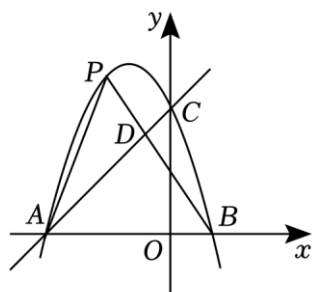
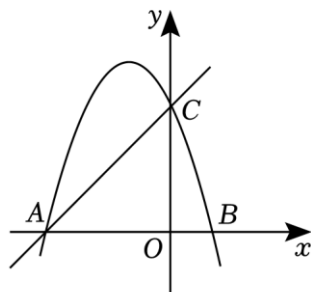


图1



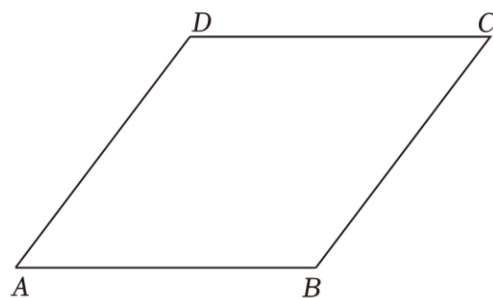
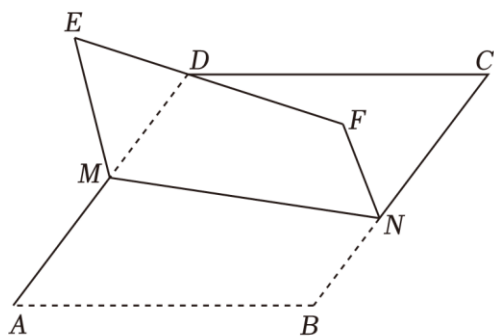
备用图

28. (10 分) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\tan A = \frac{4}{3}$ ， M 、 N 分别在边 AD 、 BC 上，将四边形 $AMNB$ 沿 MN 翻

折，使 AB 的对应线段 EF 经过顶点 D 。

(1) 若 $DE = DM$ 时，求 $\frac{DM}{AM}$ 的值；

(2) 若 $\triangle DEM$ 是直角三角形，求 $\frac{BN}{CN}$ 的值。



(备用图)

2024 年江苏省无锡市滨湖区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1.（3 分）4 的算术平方根是（ ）

- A. ± 2 B. -2 C. 2 D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】根据算术平方根的概念：一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2=a$ ，那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根，记为 $\sqrt{a}$ ，求出 4 的算术平方根即可.

【解答】解：4 的算术平方根是： $\sqrt{4}=2$ ，

故选：C.

2.（3 分）函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 中的自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq \frac{1}{2}$ B. $x \geq 1$ C. $x > \frac{1}{2}$ D. $x \geq \frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】直接利用二次根式的定义分析得出答案.

【解答】解：函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 中： $2x-1 \geq 0$ ，

解得： $x \geq \frac{1}{2}$.

故选：D.

3.（3 分）下列计算正确的是（ ）

- A. $3a \cdot a^3 = 3a^3$ B. $a+a=a^2$
C. $(2a^2)^3=6a^6$ D. $a^3 \div a=a^2$

【答案】D

【分析】根据单项式乘单项式、合并同类项、积的乘方、同底数幂的除法计算，判断即可.

【解答】解：A、 $3a \cdot a^3 = 3a^4$ ，原计算错误，不符合题意；

B、 $a+a=2a$ ，原计算错误，不符合题意；

C、 $(2a^2)^3=8a^6$ ，原计算错误，不符合题意；

D、 $a^3 \div a=a^2$ ，正确，符合题意，

故选：D.

4.（3分）一组数据 11, 12, 13, 13, 15, 16, 17, 18 的中位数和众数分别为（ ）

- A. 15, 13 B. 13, 14 C. 14, 13 D. 13, 13

【答案】C

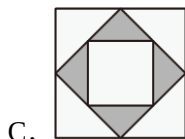
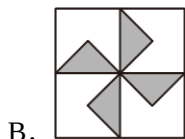
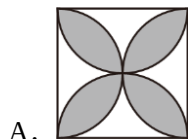
【分析】先将数据从小到大重新排列，根据中位数的概念求解可得．根据众数的定义得到这组数据的众数．

【解答】解：将这组数据重新排列为 11, 12, 13, 13, 15, 16, 17, 18，

所以这组数据的中位数为 $\frac{13+15}{2}=14$ ，众数为 13．

故选：C．

5.（3分）下列图形中，是中心对称图形，但不是轴对称图形的是（ ）



【答案】B

【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念进行判断即可．

【解答】解：A．原图既是中心对称图形，又是轴对称图形，故此选项不合题意；

B．原图是中心对称图形，不是轴对称图形，故此选项符合题意；

C．原图既是中心对称图形，又是轴对称图形，故此选项不合题意；

D．原图既是中心对称图形，又是轴对称图形，故此选项不合题意；

故选：B．

6.（3分）小明从某一角度看一个立体图形，看到的形状为三角形，则这一立体图形一定不是（ ）

- A. 圆柱 B. 圆锥 C. 棱柱 D. 棱锥

【答案】A

【分析】找到无论从哪个角度看，都看不出三角形的立体图形即可．

【解答】解：正立的圆柱从上、下面看是圆形，从侧面看是长方形，故 A 符合题意，

正立的圆锥从侧面看是三角形，故 B 不符合题意，

正立的三棱柱从上、下面看是三角形，故 C 不符合题意，

正立的棱锥从侧面看是三角形，故 D 不符合题意，

故选：A．

7.（3分）下列结论中，菱形具有而矩形不一定具有的性质是（ ）

- A. 内角和为 360° B. 对角线互相平分

C. 对角线相等

D. 对角线互相垂直

【答案】 D

【分析】 菱形的性质有四边相等，对角相等，对角线平分、垂直且平分每组对角；矩形的性质有对边相等，四角相等，对角线平分且相等。

【解答】 解：选项 A，菱形和矩形都是四边形，内角和都是 360° ，不符合题意；

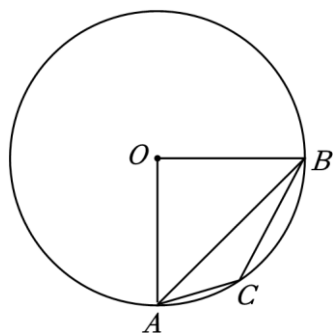
选项 B，菱形和矩形都是特殊的平行四边形，对角线互相平分，不符合题意；

选项 C，矩形的对角线相等，而菱形的对角线不一定相等，不符合题意；

选项 D，矩形的对角线不一定互相垂直，而菱形的对角线互相垂直，符合题意。

故选：D。

8. (3 分) 如图，在 $\odot O$ 中，半径 OA ， OB 互相垂直，点 C 在劣弧 AB 上．若 $\angle ABC = 20^\circ$ ，则 $\angle BAC =$ ()



A. 20°

B. 25°

C. 30°

D. 45°

【答案】 B

【分析】 连接 OC ，先根据圆周角定理得出 $\angle AOC$ 的度数，进而可得出 $\angle BOC$ 的度数，据此得出结论。

【解答】 解：连接 OC ，

$$\because \angle ABC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 40^\circ,$$

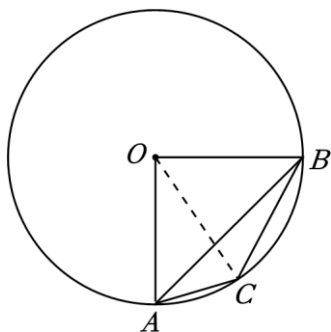
$$\because OA \perp OB,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

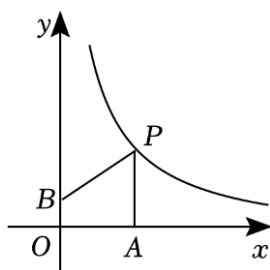
$$\therefore \angle BOC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ.$$

故选：B。



9. (3 分) 如图, 在平面直角坐标系中, P 为函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 图象上的一点, 过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A , 将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转得到线段 PB , 点 B 恰好落在 y 轴上, 若点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则 k 的值为 ()



- A. 16 B. 20 C. $12\sqrt{3}$ D. $15\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】 根据题意，利用勾股定理即可得到 k 值.

【解答】解：如图，作 $PC \perp y$ 轴，垂足为 C ，

$\therefore$ 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$,

$$\therefore AO = CP = 4,$$

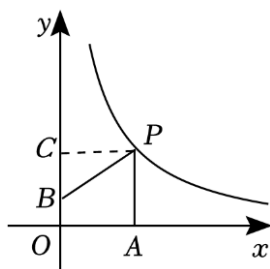
$$\therefore P \left(4, \frac{k}{4} \right), PA = PB = \frac{k}{4},$$

$$\therefore BC = \frac{k}{4} - 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中, $PC^2 + BC^2 = PB^2$,

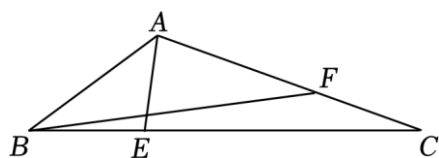
$$\therefore 4^2 + \left(\frac{k}{4} - 2\right)^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2,$$

解得: $k=20$.



故选：B.

10. (3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=5$ ， $BC=7$. E 、 F 分别为 BC 、 CA 上的动点，且 $BE=CF$ ，连接 AE 、 BF ，则 $AE+BF$ 的最小值为（ ）



A. $\sqrt{35}$

B. $\sqrt{37}$

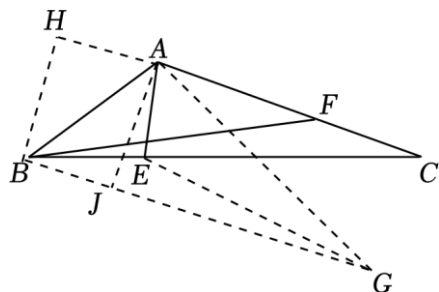
C. 6

D. $\sqrt{39}$

【答案】B

【分析】过点 B 作 $BG \parallel AC$ ，且使得 $BG=BC$. 作 $AJ \perp BG$ 于点 J ， $BH \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 H . 证明 $\triangle BCF \cong \triangle BGE$ (SAS)，推出 $BF=EG$ ，可得 $AE+BF=AE+EG \geq AG$ ，求出 AG 的长，可得结论.

【解答】解：过点 B 作 $BG \parallel AC$ ，且使得 $BG=BC$. 作 $AJ \perp BG$ 于点 J ， $BH \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 H .



$\because BG \parallel AC$,

$\therefore \angle C = \angle EBG$,

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle BGE$ 中，

$$\begin{cases} CF=BE \\ \angle C=\angle EBG, \\ CB=BG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle BGE$ (SAS),

$\therefore BF=EG$,

$\because AH \parallel BJ$, $BH \perp AH$, $AJ \perp BJ$,

$\therefore \angle H = \angle AJB = \angle JAH = 90^\circ$,

∴ 四边形 $AHBJ$ 是矩形，

∴ $BH=AJ$, $AH=BJ$, 设 $AH=BJ=x$, $BH=AJ=y$, 则有
$$\begin{cases} x^2+y^2=3^2 \\ y^2+(x+5)^2=7^2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore AH=BJ=\frac{3}{2}, \quad JG=BG-BJ=7-\frac{3}{2}=\frac{11}{2},$$

$$\therefore AG=\sqrt{AJ^2+JG^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{37},$$

$$\therefore AE+BF=AE+EG \geq AG,$$

$$\therefore AE+BF \geq \sqrt{37},$$

$$\therefore AE+BF \text{ 的最小值为 } \sqrt{37},$$

故选：B.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.第 16 题第一空 1 分，第二空 2 分.不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置）

11. (3 分) 分解因式： $2x^2-8=$ $2(x+2)(x-2)$.

【答案】见试题解答内容

【分析】先提取公因数 2，然后再运用平方差公式因式分解即可.

【解答】解： $2x^2-8$

$$=2(x^2-4)$$

$$=2(x+2)(x-2);$$

故答案为： $2(x+2)(x-2)$.

12. (3 分) 2024 年 3 月 24 日，3.3 万名选手齐聚樱花赛道参加 2024 无锡马拉松比赛，据无锡市大数据管理局统计，本届马拉松产生餐饮、住宿、交通、旅游等经济效益共约 276700000 元，请将 276700000 用科学记数法表示为 2.767×10^8 .

【答案】 2.767×10^8 .

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可.

【解答】解： $276700000=2.767 \times 10^8$.

故答案为： 2.767×10^8 .

13. (3 分) 请写出一个 $\sqrt{3}$ 的同类二次根式 $2\sqrt{3}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】根据同类二次根式的根指数相同，被开方数相同可写出 $\sqrt{3}$ 的同类二次根式.

【解答】解：由题意得： $2\sqrt{3}$ 是 $\sqrt{3}$ 的同类二次根式.

故填： $2\sqrt{3}$.

14. (3 分) 若一个圆锥的侧面积是底面积的 3 倍，则这个圆锥侧面展开图的圆心角等于 120 ° .

【答案】120.

【分析】根据圆锥侧面积是底面积的 2 倍得到圆锥底面半径和母线长的关系，进而根据圆锥的弧长等于底面周长得到圆锥的侧面展开图的圆心角.

【解答】解：设母线长为 R ，底面半径为 r ，则底面周长 $=2\pi r$ ，底面面积 $=\pi r^2$ ，侧面面积 $=\pi rR$.

$\because$ 侧面积是底面积的 3 倍，

$\therefore R=3r$.

设圆心角为 n .

$$\therefore \frac{n\pi R}{180} = 2\pi r = \frac{2}{3}\pi R,$$

$\therefore n=120^\circ$,

故答案为：120.

15. (3 分) 《九章算术》中有一道题，原文是“今有人共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六. 问人数、鸡价各几何？”意思是：有若干人凑钱合伙买鸡，如果每人出 9 文钱，多出 11 文钱；如果每人出 6 文钱，还差 16 文钱. 问买鸡的人数、鸡的价钱各是多少？设有 x 人共同买鸡，根据题意，则可列方程为 $9x - 11 = 6x + 16$.

【答案】见试题解答内容

【分析】利用鸡的价钱不变，结合“如果每人出 9 文钱，多出 11 文钱；如果每人出 6 文钱，还差 16 文钱”，即可得出关于 x 的一元一次方程，此题得解.

【解答】解：依题意得： $9x - 11 = 6x + 16$.

故答案为： $9x - 11 = 6x + 16$.

16. (3 分) 抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0, 11)$ ，将抛物线向下平移 2 或 11 个单位长度，该抛物线与坐标轴有且只有两个交点.

【答案】 $(0, 11)$ ，2 或 11.

【分析】计算 $x=0$ 对应的函数值得到抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, 11)$ ，根据二次函数的性质，抛

物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 的顶点坐标为 $(3, 2)$ ，则当抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 向下平移 2 个单位时，顶点在 x 轴上，与 y 轴的交点坐标为 $(0, 9)$ ；当抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 向下平移 11 个单位时，平移后的抛物线解析式为 $y = x^2 - 6x$ ，抛物线与坐标轴的交点为 $(0, 0)$ ， $(6, 0)$ 。

【解答】解：当 $x=0$ 时， $y = (x - 3)^2 + 2 = 11$ ，

∴ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, 11)$ ，

∴ 抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 的顶点坐标为 $(3, 2)$ ，

∴ 当抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 向下平移 2 个单位时，平移后的抛物线解析式为 $y = (x - 3)^2$ ，抛物线 $y = (x - 3)^2$ 的顶点坐标为 $(3, 0)$ ，顶点在 x 轴上，与 y 轴的交点坐标为 $(0, 9)$ ；

当抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 向下平移 11 个单位时，平移后的抛物线解析式为 $y = (x - 3)^2 - 9$ ，即 $y = x^2 - 6x$ ，抛物线与坐标轴的交点为 $(0, 0)$ ， $(6, 0)$ 。

综上所述，抛物线 $y = (x - 3)^2 + 2$ 向下平移 2 或 11 个单位长度，该抛物线与坐标轴有且只有两个交点。
故答案为： $(0, 11)$ ，2 或 11。

17. (3 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 的图象与直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 交于点 $M(-\sqrt{2}, m)$ 、 $N(2, n)$ 两点，则关于 x 的不等式 $ax^2 - kx + (c - b) < 0$ 的解集为 $\underline{\sqrt{2} < x < 2}$ 。

【答案】 $\sqrt{2} < x < 2$ 。

【分析】利用函数图象，写出抛物线在直线下方所对应的自变量的范围即可。

【解答】解：∵ 二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 的图象与直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 交于点 $M(-\sqrt{2}, m)$ 、 $N(2, n)$ 两点，

∴ 当 $\sqrt{2} < x < 2$ 时， $ax^2 + c < kx + b$ ，

即 $ax^2 - kx + c - b < 0$ ，

∴ 关于 x 的不等式 $ax^2 - kx + (c - b) < 0$ 的解集为 $\sqrt{2} < x < 2$ 。

故答案为： $\sqrt{2} < x < 2$ 。

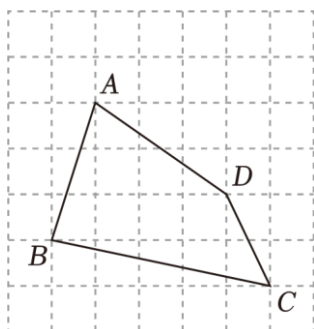
18. (3 分) 如图，在网格图中（每个小正方形的边长为 1），点 A 、 B 、 C 、 D 均为格点，给出下列三个命题：

① 点 A 到点 B 的最短距离为 $\sqrt{10}$ ；

② 点 A 到直线 CD 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ；

③ 直线 AB 、 CD 所交的锐角为 45° ；

其中，所有正确命题的序号为 $\underline{\text{①②③}}$ 。（填序号）



【答案】①②③.

【分析】①利用勾股定理求角可得结论；

②构造 $\triangle AEF$ ，利用面积法求解可得答案；

③平移线段 CD 到 AJ ，利用等腰直角三角形的性质解决问题即可．

【解答】解：由图可得，点 A 到点 B 的最短距离为 $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，故①正确；

取格点 E ，连接 DE ， AE ，则 C ， D ， F ， E 共线，过点 A 作 $AH \perp CD$ 于 H ，

$$\because S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} EF \cdot AH,$$

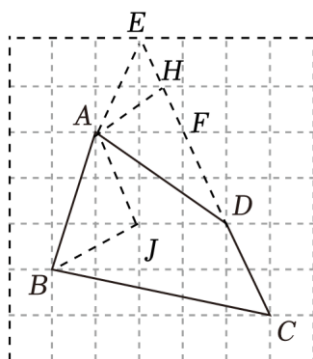
$$\therefore AH = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \text{ 故②正确；}$$

取格点 J ，连接 AJ ， JB ，则 $AJ \parallel CD$ ， $\triangle AJB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BAJ = 45^\circ,$$

$\therefore$ 直线 AB 、 CD 所交的锐角为 45° ，故③正确，

故答案为：①②③.



三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (8 分) (1) 计算： $|\sqrt{3} - 2| - (\frac{1}{2})^{-2} + 2\sin 60^\circ$ ；

(2) 化简： $(a - b)^2 - a(a - 2b)$.

【答案】(1) - 2;

(2) b^2 .

【分析】(1) 先根据绝对值，负整数指数幂，特殊角的三角函数值进行计算，再算乘法，最后算加减即可；

(2) 先根据完全平方公式和单项式乘以多项式进行计算，再合并同类项即可.

【解答】解：(1) 原式 $= 2 - \sqrt{3} - 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 2 - \sqrt{3} - 4 + \sqrt{3}$
 $= -2;$

(2) 原式 $= a^2 - 2ab + b^2 - a^2 + 2ab$
 $= b^2.$

20. (8分) (1) 解方程: $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-1};$

(2) 解不等式组: $\begin{cases} x+4 > -2x+1 \\ \frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \leq 1 \end{cases}.$

【答案】(1) $x=4;$

(2) $-1 < x \leq 4.$

【分析】(1) 方程两边都乘 $x(x-1)$ 得出 $4(x-1) = 3x$ ，求出方程的解，再进行检验即可；

(2) 先根据不等式的性质求出两个不等式的解集，再根据求不等式组解集的规律求出不等式组的解集即可.

【解答】解：(1) $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-1},$

方程两边都乘 $x(x-1)$ ，得 $4(x-1) = 3x,$

$$4x - 4 = 3x,$$

$$4x - 3x = 4,$$

$$x = 4,$$

检验：当 $x=4$ 时， $x(x-1) \neq 0$,

所以分式方程的解是 $x=4;$

(2) $\begin{cases} x+4 > -2x+1 & \text{①} \\ \frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \leq 1 & \text{②} \end{cases},$

解不等式①，得 $x > -1,$

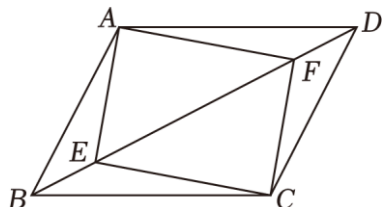
解不等式②，得 $x \leq 4,$

所以不等式组的解集是 $-1 < x \leq 4$.

21. (10 分) 如图, 已知 E 、 F 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线上的两点, 且 $BE=DF$,

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 若 $\angle AEC = 90^\circ$, 求证: 四边形 $AECF$ 为矩形.



【答案】(1) 证明见解析;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 由 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 即可;

(2) 由全等三角形的性质得 $AE=CF$, $\angle AEB = \angle CFD$. 再证 $AE \parallel CF$, 则四边形 $AECF$ 为平行四边形. 然后由矩形的判定即可得出结论.

【解答】证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle ABE = \angle CDF, \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)};$$

(2) 如图, 由 (1) 可知, $\triangle ABE \cong \triangle CDF$,

$$\therefore AE = CF, \angle AEB = \angle CFD.$$

$$\therefore \angle AEB + \angle AEO = \angle CFD + \angle CFE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AED = \angle CFE,$$

$$\therefore AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

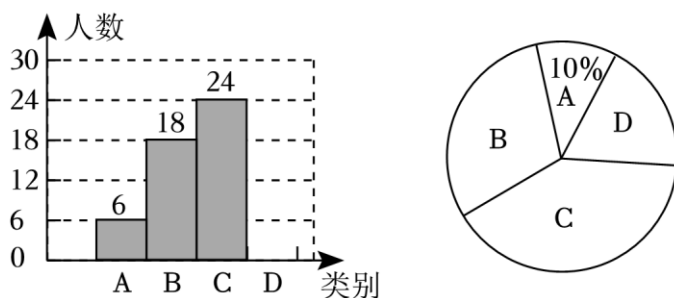
$$\text{又} \because \angle AEC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 为矩形.

22. (10 分) 某校为掌握九年级学生每周的自主学习情况, 学生会随机抽取九年级的部分学生, 调查他们每周自主学习的时间, 并把自主学习的时间 (t) 分为四种类别: A ($0h \leq t < 3h$), B ($3h \leq t < 6h$), C ($6h$

$\leq t < 9h$), $D (t \geq 9h)$, 将分类结果绘制成如下两幅不完整的统计图:

四种类别的人数条形分布直方图 四种类别的人数扇形统计图



根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 求出本次抽样调查的样本容量为 60 人;
- (2) 补全频数分布直方图, 并计算扇形统计图中 C 所在扇形的圆心角的度数为 144°;
- (3) 根据调查结果可知, 自主学习时间的中位数落在 C 组;
- (4) 若该校九年级有 1200 名学生, 请估计一周自主学习的时间不少于 $6h$ 的人数.

【答案】(1) 60 人;

(2) 补全统计图见解答过程; 144;

(3) C ;

(4) 720 人.

【分析】(1) 由 A 组人数及其所占百分比可得本次抽样调查的样本容量;

(2) 分别求出 D 组人数即可补全图形; 用 360° 乘以 C 组人数所占比例即可;

(3) 根据中位数的定义求解即可;

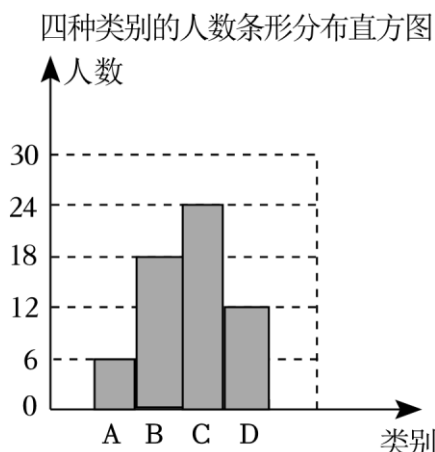
(4) 用总人数乘以样本中 C 、 D 组人数和所占比例即可.

【解答】解: (1) 本次抽样调查的样本容量为 $6 \div 10\% = 60$ (人),

故答案为: 60 人;

(2) D 组人数为 $60 \times 20\% = 12$ (人),

补全图形如下:



扇形统计图中 C 所在扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{24}{60} = 144^\circ$ ；

故答案为：144；

（3）自主学习时间的中位数是第 30、31 个数据的平均数，而这两个数均落在 C 组，

所以这组数据的中位数落在 C 组；

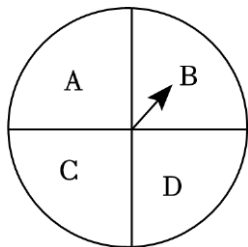
故答案为： C ；

（4）估计一周自主学习的时间不少于 $6h$ 的人数为 $1200 \times \frac{24+12}{60} = 720$ （人）。

- 23.（10 分）某班举行“红领巾寻访”展示活动，活动设计的项目及要求如下： A 、讲一讲革命故事， B 、说一说家乡变化， C 、写一写美好愿望， D 、画一画宏伟蓝图。人人参加，每人从中任意选一项。为公平起见，班委会制作了如图所示的可自由转动的转盘，将圆形转盘四等分并标上字母 A 、 B 、 C 、 D ，每位学生转动转盘一次，转盘停止后，指针所指扇形部分的字母对应的活动项目即为他选到的项目（当指针指在分界线上时重转）。

（1）任意转动转盘一次，选到“ A 、讲一讲革命故事”的概率是 $\frac{1}{4}$ ；

（2）甲、乙是该校的两位学生，请用列表或画树状图的方法，求甲和乙选到不同活动项目的概率。



【答案】（1） $\frac{1}{4}$ ；

（2） $\frac{3}{4}$ 。

【分析】（1）直接由概率公式求解即可；

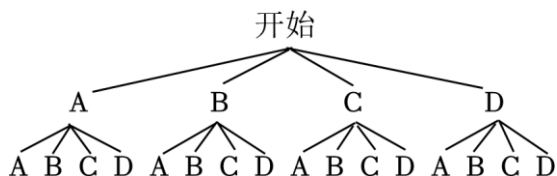
（2）画树状图，共有 16 种等可能的结果，其中甲和乙选到不同活动项目的结果有 12 种，再由概率公

式求解即可.

【解答】解：（1） $\because$ 将圆形转盘四等分并标上字母 A、B、C、D，
 $\therefore$ 任意转动转盘一次，选到“A、讲一讲革命故事”的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ；

（2）画树状图如下：



由树状图知，共有 16 种等可能的结果，其中甲和乙选到不同活动项目的结果有 12 种，

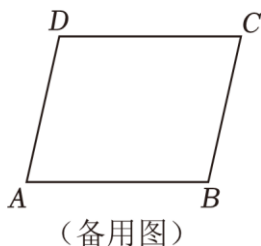
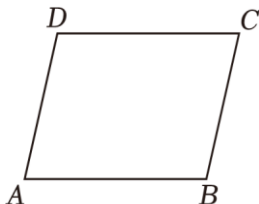
$\therefore$ 甲和乙选到不同活动项目的概率为 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

24.（10 分）如图，在平行四边形 ABCD 中， $AB > AD$.

（1）请用直尺（不带刻度）和圆规作图. 要求：保留作图痕迹，不写作法.

①在 AB 上取一点 E，使 $\angle ADE = \angle AED$ ；②作 $\angle BCD$ 的平分线交 AB 于点 F.

（2）在（1）所作的图形中，DE 交 CF 于点 P，连接 DF. 若 $DF \perp AB$ ，且 $AB = 6$ ， $BC = 5$ ，求 PE 的长.（如需画草图，请使用备用图）



【答案】（1）见解答.

（2） $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

【分析】（1）①以点 A 为圆心，AD 的长为半径画弧，与 AB 的交点即为点 E；

②根据角平分线的作图方法作图即可.

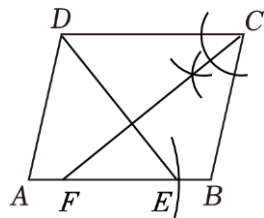
（2）结合已知条件以及平行四边形的性质可得 $CD = AB = 6$ ， $AD = BC = AE = BF = 5$ ， $AF = AB - BF = 1$ ， $EF = AE - AF = 4$ ，利用勾股定理求出 DF，DE 的长，根据相似三角形的判定与性质可得 $\triangle EFP \sim \triangle DCP$ ，
 则 $\frac{EF}{CD} = \frac{PE}{DP}$ ，进而可得答案.

【解答】解：（1）①如图，以点 A 为圆心，AD 的长为半径画弧，交 AB 于点 E，
 此时 $AD = AE$ ，

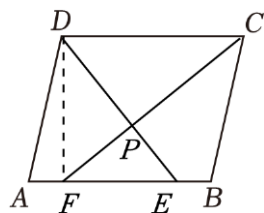
则 $\angle ADE = \angle AED$,

则点 E 即为所求.

②如图, CF 即为所求.



(2) 如图,



$\therefore \angle ADE = \angle AED$,

$\therefore AD = AE$.

$\therefore CF$ 为 $\angle BCD$ 的平分线,

$\therefore \angle DCF = \angle BCF$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore CD = AB = 6$, $AD = BC = 5$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DCF = \angle BFC$,

$\therefore \angle BCF = \angle BFC$,

$\therefore BF = BC$,

$\therefore AE = BF = 5$,

$\therefore AF = AB - BF = 1$, $EF = AE - AF = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, 由勾股定理得, $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = 2\sqrt{6}$,

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, 由勾股定理得, $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 2\sqrt{10}$.

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CDP = \angle FEP$, $\angle DCP = \angle EFP$,

$\therefore \triangle EFP \sim \triangle DCP$,

$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{PE}{DP}$,

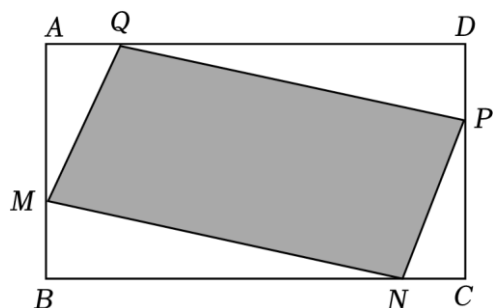
$$\text{即 } \frac{4}{6} = \frac{PE}{2\sqrt{10}-PE},$$

$$\therefore PE = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

25. (10 分) 如图所示, 某景区拟在矩形 $ABCD$ 的空地上建造一个含“内接平行四边形 $MNPQ$ ”的花坛. 平行四边形 $MNPQ$ 四个顶点 M 、 N 、 P 、 Q 分别在矩形 $ABCD$ 四条边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上. 已知 $AB=6m$, $BC=10m$, 为增加美感, 要求 $AQ=BM$. 设 $AQ=xm$ ($0 < x < 6$), 平行四边形 $MNPQ$ 的面积为 Sm^2 .

(1) 求 S 与 x 的函数关系式;

(2) 景区准备在平行四边形 $MNPQ$ 内种植“郁金香”, 四个三角形内种植“红玫瑰”. 已知“郁金香”的价格为 $20 \text{ 元}/m^2$, “红玫瑰”的价格为 $40 \text{ 元}/m^2$. 若景区购买两种花卉的预算不超过 1800 元, 求 x 的取值范围.



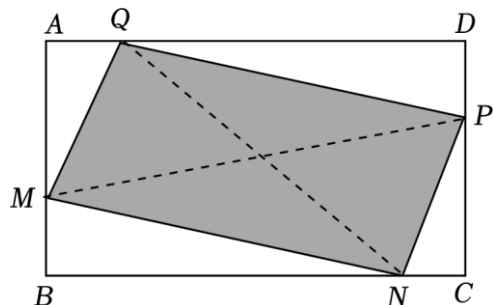
【答案】(1) S 与 x 的函数关系式为 $S=2x^2 - 16x+60$;

(2) $0 < x \leq 3$ 或 $5 \leq x < 6$.

【分析】(1) 连接 QN , MP , 由矩形的性质和平行四边形的性质证明 $\triangle PDQ \cong \triangle MBN$ 和 $\triangle AMQ \cong \triangle CPN$, 然后用平行四边形 $MNPQ$ 的面积 = 矩形 $ABCD$ 的面积 - 四个三角形的面积, 写出 S 与 x 的关系式;

(2) 根据总费用 ≤ 1800 , 列出关于 x 的不等式, 解不等式求出 x 的取值范围.

【解答】解: 连接 QN , MP , 如图所示:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DQN = \angle BNQ$,

∵ 四边形 $MNPQ$ 是平行四边形，

∴ $\angle PQN = \angle MNQ$, $PQ = MN$,

∴ $\angle PQD = \angle MNB$,

又 ∵ $\angle B = \angle D = 90^\circ$,

∴ $\triangle PDQ \cong \triangle MBN$ (AAS),

同理可证, $\triangle AMQ \cong \triangle CPN$,

∴ $AQ = BM = NC = DP = x m$,

∴ $AM = (6 - x) m$, $BN = (10 - x) m$,

∴ $S = S_{\text{矩形} ABCD} - 2S_{\triangle AMQ} - 2S_{\triangle BMN} = 6 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2}x(6 - x) - 2 \times \frac{1}{2}x(10 - x) = 2x^2 - 16x + 60$,

∴ S 与 x 的函数关系式为 $S = 2x^2 - 16x + 60$;

(2) 根据题意得: $40 \times [2 \times \frac{1}{2}x(6 - x) + 2 \times \frac{1}{2}x(10 - x)] + 20(2x^2 - 16x + 60) \leq 1800$,

整理得: $x^2 - 8x + 15 \geq 0$,

解得 $x \geq 5$ 或 $x \leq 3$,

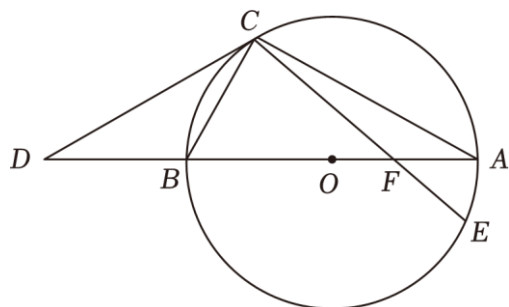
∵ $0 < x < 6$,

∴ $0 < x \leq 3$ 或 $5 \leq x < 6$.

26. (10 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AC 、 BC , D 为 AB 延长线上一点, 连接 CD , 且 $\angle BCD = \angle A$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{10}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{10}$, E 为 $\odot O$ 上一点, 连接 CE 交线段 OA 于点 F , 若 $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{3}$, 求 BF 的长.



【答案】(1) 见解析;

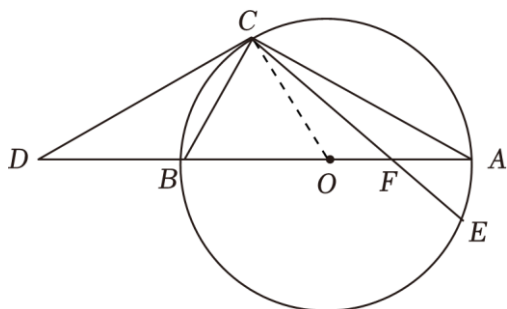
(2) $\sqrt{10} + 2$.

【分析】(1) 连接 OC , 由 AB 为 $\odot O$ 的直径, 可得 $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$, 再证明 $\angle ABC = \angle BCO$, 结合

已知 $\angle BCD = \angle A$ ，可得 $\angle OCD = 90^\circ$ ，从而证明 CD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ，过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H ，连接 OE ，由 $CM \perp AB$ ， $EH \perp AB$ ，可得 $HE = 1$ ， $MF = 3HF$ ，设 $HF = x$ ，则 $MF = 3x$ ，根据勾股定理列方程即可得到结论。

【解答】(1) 证明：连接 OC ，如图：



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\because OB = OC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BCO$ ，

又 $\angle BCD = \angle A$ ，

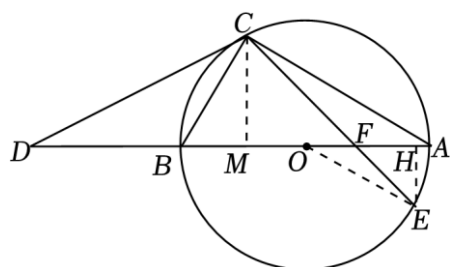
$\therefore \angle BCD + \angle BCO = 90^\circ$ ，即 $\angle DCO = 90^\circ$ ，

$\therefore OC \perp CD$ ，

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 解：过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ，过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H ，连接 OE ，如图：



$\because \odot O$ 的半径为 $\sqrt{10}$ ，

$\therefore AB = 2\sqrt{10}$ ，

$\because \triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{10}$ ，

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot CM = 3\sqrt{10}$ ，即 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \cdot CM = 3\sqrt{10}$ ，

$\therefore CM = 3$ ，

Rt $\triangle BCM$ 中， $\angle BCM=90^\circ - \angle CBA$,

Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ - \angle CBA$,

$$\therefore \angle BCM = \angle A,$$

$$\therefore \tan \angle BCM = \tan A, \text{ 即 } \frac{BM}{CM} = \frac{CM}{AM},$$

$$\therefore \frac{BM}{3} = \frac{3}{2\sqrt{10} - BM},$$

解得 $BM = \sqrt{10} - 1$, ($BM = \sqrt{10} + 1$ 舍去),

$$\because CM \perp AB, EH \perp AB,$$

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{HE}{CM} = \frac{HF}{MF},$$

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{HE}{CM} = \frac{HF}{MF} = \frac{1}{3},$$

由 (2) 知 $CM=3$, $BM=\sqrt{10}-1$,

$$\therefore HE=1, MF=3HF,$$

Rt $\triangle OEH$ 中, $OH = \sqrt{OE^2 - HE^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$,

$$\therefore AH = OA - OH = \sqrt{10} - 3,$$

设 $HF=x$, 则 $MF=3x$,

由 $AB=2\sqrt{10}$ 可得: $BM+MF+HF+AH=2\sqrt{10}$,

$$\therefore \sqrt{10} - 1 + 3x + x + \sqrt{10} - 3 = 2\sqrt{10},$$

解得: $x=1$,

$$\therefore HF=1, MF=3,$$

$$\therefore BF = BM + MF = (\sqrt{10} - 1) + 3 = \sqrt{10} + 2.$$

27. (10 分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 点 P 是抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 如图 1, 当点 P 在直线 AC 上方的抛物线上时, 连接 AP 、 BP , BP 交 AC 于点 D , 若 $S_{\triangle APD} = kS_{\triangle ABD}$, 求 k 的取值范围;

(3) 已知 M 是直线 AC 上一动点, 将点 M 绕着点 O 旋转 90° 得到点 Q , 若点 Q 恰好落在二次函数的图象上, 请直接写出点 M 的坐标.

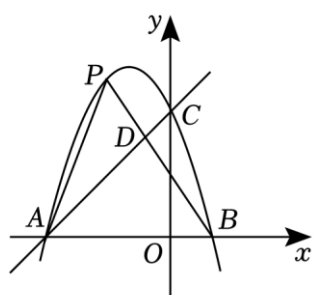
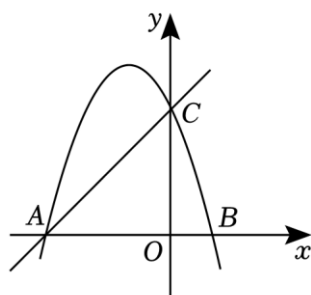


图1



备用图

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 3$;

(2) $0 < k \leq \frac{9}{16}$;

(3) $M(-3, 0)$ 或 $(-4, -1)$ 或 $(0, 3)$ 或 $(-5, -2)$.

【分析】(1) 运用待定系数法即可求得答案;

(2) 过点 B 作 $BE \parallel y$ 轴交 AC 于 E , 过点 P 作 $PF \parallel y$ 轴交 AC 于 F , 利用待定系数法可得直线 AC 的解析式为 $y = x + 3$, 设 $P(t, -t^2 - 2t + 3)$, 且 $-3 < t < 0$, 则 $F(t, t + 3)$, 由 $BE \parallel PF$, 得 $\triangle BDE \sim \triangle PDF$, 可得 $\frac{PD}{BD} = \frac{PF}{BE} = \frac{-t^2 - 3t}{4} = -\frac{1}{4}(t + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{16}$, 即 $\frac{PD}{BD}$ 取得最大值 $\frac{9}{16}$, 结合 $S_{\triangle APD} = kS_{\triangle ABD}$, 即可求得答案;

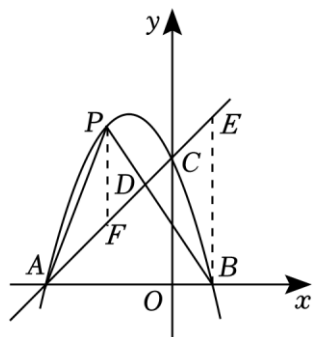
(3) 过点 Q 作 $QT \perp y$ 轴于点 T , 过点 M 作 $MK \perp x$ 轴于点 K , 可证得 $\triangle OMK \cong \triangle OQT$ (AAS), 得出 $OK = OT$, $MK = QT$, 设点 $M(x, x + 3)$, 则 $OK = -x$, $MK = -x - 3$, 可得 $Q(x + 3, -x)$, 当点 M 绕着点 O 逆时针旋转 90° 得到点 Q 时, 则 $Q(-x - 3, x)$, 代入抛物线解析式即可求得答案.

【解答】解: (1) 设抛物线的表达式为 $y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 3)(x - 1)$,

将点 C 的坐标代入上式得: $3 = a(0 + 3)(0 - 1)$, 解得 $a = -1$,

故抛物线的函数表达式为 $y = -(x + 3)(x - 1) = -x^2 - 2x + 3$;

(2) 如图, 过点 B 作 $BE \parallel y$ 轴交 AC 于 E , 过点 P 作 $PF \parallel y$ 轴交 AC 于 F ,



设直线 AC 的解析式为 $y = kx + n$, 把 $A(-3, 0)$, $C(0, 3)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} -3k + n = 0 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=1, \\ n=3 \end{cases}$$

∴直线 AC 的解析式为 $y=x+3$,

设 $P(t, -t^2-2t+3)$, 且 $-3 < t < 0$, 则 $F(t, t+3)$,

∵ $B(1, 0)$,

∴ $E(1, 4)$,

∴ $BE=4$, $PF=-t^2-2t+3-(t+3)=-t^2-3t$,

∵ $BE \parallel y$ 轴, $PF \parallel y$ 轴,

∴ $BE \parallel PF$,

∴ $\triangle BDE \sim \triangle PDF$,

$$\therefore \frac{PD}{BD} = \frac{PF}{BE} = \frac{-t^2-3t}{4} = -\frac{1}{4} \left(t+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{16},$$

∵ $-3 < t < 0$,

∴ 当 $t = -\frac{3}{2}$ 时, $\frac{PD}{BD}$ 取得最大值 $\frac{9}{16}$,

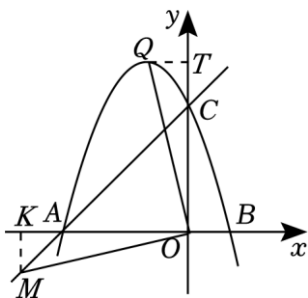
∵ $S_{\triangle APD} = k S_{\triangle ABD}$,

$$\therefore k = \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{PD}{BD},$$

∴ k 的最大值为 $\frac{9}{16}$,

∴ $0 < k \leq \frac{9}{16}$;

(3) 如图, 过点 Q 作 $QT \perp y$ 轴于点 T , 过点 M 作 $MK \perp x$ 轴于点 K , 则 $\angle MKO = \angle QTO = 90^\circ$,



当点 M 绕着点 O 顺时针旋转 90° 得到点 Q 时,

∴ $OM = OQ$, $\angle MOQ = 90^\circ$,

∴ $\angle MOK + \angle QOK = 90^\circ$,

∵ $\angle QOT + \angle QOK = 90^\circ$,

∴ $\angle MOK = \angle QOT$,

$$\therefore \triangle OMK \cong \triangle OQT \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OK = OT, MK = QT,$$

设点 $M(x, x+3)$ ，则 $OK = -x$ ， $MK = -x - 3$ ，

$$\therefore OT = -x, QT = -x - 3,$$

$$\therefore Q(x+3, -x),$$

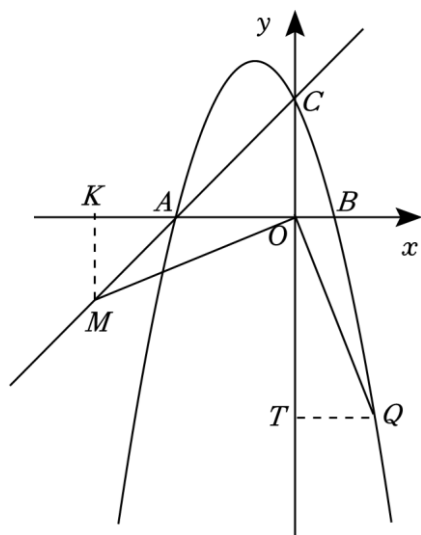
$\because$ 点 Q 在抛物线上，

$$\therefore -x = -(x+3)^2 - 2(x+3) + 3,$$

解得： $x_1 = -3$ ， $x_2 = -4$ ，

$$\therefore M(-3, 0) \text{ 或 } (-4, -1);$$

当点 M 绕着点 O 逆时针旋转 90° 得到点 Q 时，则 $Q(-x-3, x)$ ，



$\because$ 点 Q 在抛物线上，

$$\therefore x = -(-x-3)^2 - 2(-x-3) + 3,$$

解得： $x_1 = -5$ ， $x_2 = 0$ （舍去），

$$\therefore M(-5, -2);$$

当点 $M(0, 3)$ 绕 O 逆时针旋转 90° 时，对应点 $Q(-3, 0)$ 刚好落在抛物线上；

综上所述，点 M 的坐标为 $(-3, 0)$ 或 $(-4, -1)$ 或 $(0, 3)$ 或 $(-5, -2)$ 。

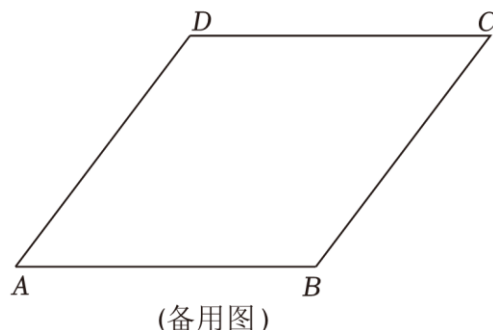
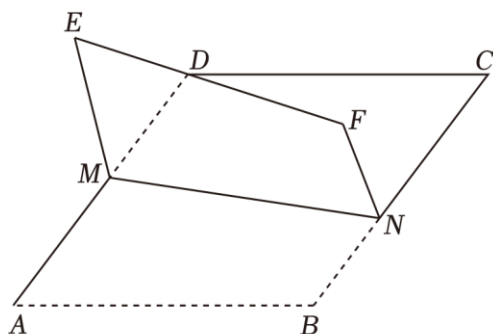
(3) 已知 M 是直线 AC 上一动点，将点 M 绕着点 O 旋转 90° 得到点 Q ，若点 Q 恰好落在二次函数的图象上，请直接写出点 M 的坐标。

28. (10 分) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\tan A = \frac{4}{3}$ ， M 、 N 分别在边 AD 、 BC 上，将四边形 $AMNB$ 沿 MN 翻

折，使 AB 的对应线段 EF 经过顶点 D 。

(1) 若 $DE=DM$ 时, 求 $\frac{DM}{AM}$ 的值;

(2) 若 $\triangle DEM$ 是直角三角形, 求 $\frac{BN}{CN}$ 的值.



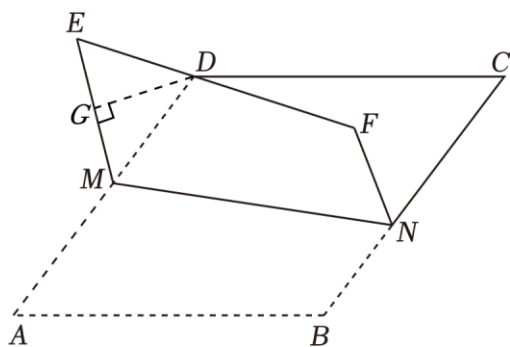
【答案】(1) $\frac{5}{6}$;

(2) $\frac{22}{13}$ 或 $\frac{2}{7}$.

【分析】(1) 过 D 作 $DG \perp EM$ 于 G , 依据等腰三角形的性质以及折叠的性质, 即可得到 $\frac{DM}{AM}$ 的值;

(2) 若 $\triangle DEM$ 是直角三角形, 需要分类讨论. 分别依据折叠的性质以及相似三角形的判定与性质, 即可得到 $\frac{BN}{CN}$ 的值.

【解答】解: (1) 如图所示, 过 D 作 $DG \perp EM$ 于 G ,



$\because DE=DM, DG \perp EM,$

$\therefore G$ 是 EM 的中点,

由折叠可得 $\angle E = \angle A, EM = AM,$

$\therefore \tan A = \frac{4}{3} = \tan E,$

设 $DG = 4k, EG = 3k$, 则 $DE = 5k = DM, EM = 6k = AM,$

$\therefore \frac{DM}{AM} = \frac{5k}{6k} = \frac{5}{6};$

(2) 分三种情况:

①如图所示，当 $\angle EMD=90^\circ$ 时，延长 AD ， NF ，交于点 H ，则 $\angle H=90^\circ=\angle FNC$ ，

由折叠可得 $\angle E=\angle A$ ， $EM=AM$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{4}{3} = \tan E,$$

设 $DM=4k$ ， $EM=3k$ ，则 $DE=5k$ ， $AM=3k$ ， $AD=3k+4k=7k$ ，

$$\therefore EF=7k, DF=2k,$$

$$\because \angle EMD = \angle H, \angle EDM = \angle FDH,$$

$$\therefore \triangle DEM \sim \triangle DFH,$$

$$\therefore \frac{FH}{EM} = \frac{DF}{DE}, \text{ 即 } \frac{FH}{3k} = \frac{2k}{5k},$$

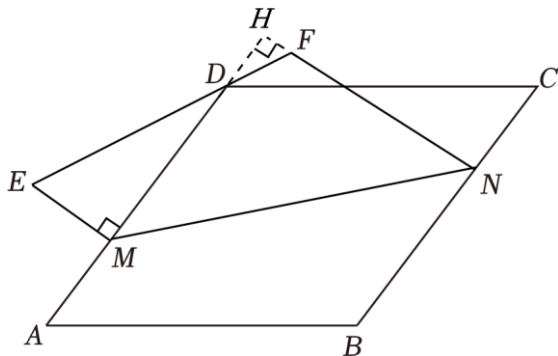
$$\therefore FH = \frac{6}{5}k,$$

$$\text{又} \because \text{菱形 } ABCD \text{ 的高 } NH = AD \times \sin A = \frac{28}{5}k,$$

$$\therefore FN = \frac{28}{5}k - \frac{6}{5}k = \frac{22}{5}k,$$

$$\therefore BN = \frac{22}{5}k, CN = BC - BN = 7k - \frac{22}{5}k = \frac{13}{5}k,$$

$$\therefore \frac{BN}{CN} = \frac{22}{13}.$$



②如图所示，当 $\angle MDE=90^\circ$ 时，延长 EF 交 BC 于 H ，则 $\angle FHN=90^\circ$ ，

由折叠可得 $\angle E=\angle A$ ， $EM=AM$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{4}{3} = \tan E,$$

设 $DM=4k$ ， $ED=3k$ ，则 $EM=5k=AM$ ，

$$\therefore AD=5k+4k=9k,$$

$$\therefore EF=9k, DF=9k-3k=6k,$$

$$\text{又} \because \text{菱形 } ABCD \text{ 的高 } DH = CD \times \sin C = 9k \times \frac{4}{5} = \frac{36}{5}k,$$

