

2023-2024 学年江苏省南京市鼓楼区民办求真中学九年级（上）期初数学 试卷

一. 选择题（共 6 小题，18 分）

1. （3 分）一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根的情况是（ ）

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 只有一个实数根
- D. 没有实数根

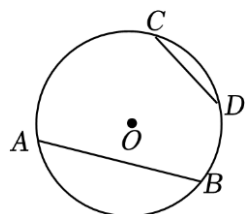
2. （3 分）下列说法：（1）长度相等的弧是等弧，（2）相等的圆心角所对的弧相等，（3）劣弧一定比优弧短，（4）直径是圆中最长的弦．其中正确的有（ ）

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

3. （3 分）用配方法将方程 $2x^2 - 4x - 3 = 0$ 变形，结果正确的是（ ）

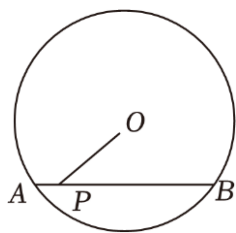
- A. $2(x - 1)^2 - 4 = 0$
- B. $(x - 1)^2 - \frac{5}{2} = 0$
- C. $2(x - 1)^2 - \frac{5}{2} = 0$
- D. $(x - 1)^2 - 5 = 0$

4. （3 分）如图，在 $\odot O$ 中，若 $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，则 AB 与 $2CD$ 的大小关系为（ ）



- A. $AB = 2CD$
- B. $AB < 2CD$
- C. $AB > 2CD$
- D. 无法确定

5. （3 分）如图， $\odot O$ 的直径为 10，弦 AB 的长为 8，点 P 是弦 AB 上的一个动点，使线段 OP 的长度为整数的点 P 有（ ）



- A. 3 个
- B. 4 个
- C. 5 个
- D. 6 个

6. （3 分）关于 x 的方程 $(x - 1)(x + 2) = p^2$ (p 为常数) 根的情况下，下列结论中正确的是（ ）

- A. 两个正根
- B. 一个正根，一个负根，正根的绝对值比负根的绝对值大
- C. 两个负根
- D. 一个正根，一个负根，正根的绝对值比负根的绝对值小

二. 填空题（共 10 小题，30 分）

7. (3 分) 化简： $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a-b}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (3 分) 若一个一元二次方程的两个根分别是 1、-2，请写出一个符合题意的一元二次方程 .

9. (3 分) $\odot O$ 中，弦 AB 的长恰等于半径，则弧 $\widehat{AB}$ 的度数是 度.

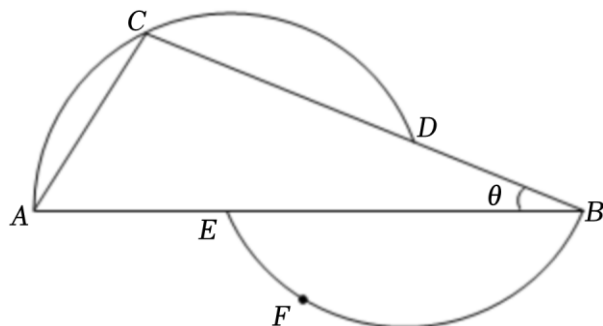
10. (3 分) 若关于 x 的方程 $kx^2+2x+1=0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 .

11. (3 分) 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x_1=3$, $x_2=-5$ ，则关于 y 的方程 $a(y+1)^2+b(y+1)+c=0$ 的解是 .

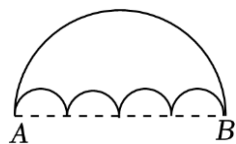
12. (3 分) 一个点到圆上的点的最小距离为 6cm，最大距离为 10cm，则圆的半径为 cm.

13. (3 分) 已知关于 x 的方程 $x^2+(k^2-4)x+k-1=0$ 的两实数根互为相反数，则 $k=\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (3 分) 如图，过 A 、 C 、 D 三点的圆的圆心为点 E ，过 B 、 F 、 E 三点的圆的圆心为 D ，如果 $\angle A=66^\circ$ ，那么 $\angle \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.



15. (3 分) 如图，从 A 地到 B 地有两条路可走，一条路是大半圆，另一条路是 4 个小半圆。有一天，一只猫和一只老鼠同时从 A 地到 B 地。老鼠见猫沿着大半圆行走，它不敢与猫同行（怕被猫吃掉），就沿着 4 个小半圆行走。假设猫和老鼠行走的速度相同，那么 先到达 B 地。



16. (3 分) 若 $\triangle ABC$ 的一条边 BC 的长为 5，另两边 AB 、 AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2+3k+2=0$ 的两个实数根，当 $k=\underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\triangle ABC$ 是直角三角形。

三. 解答题（共 5 小题，52 分）

17.（12 分）解方程：

(1) $x(x-4)=2(4-x)$;

(2) $x^2+3x=4$;

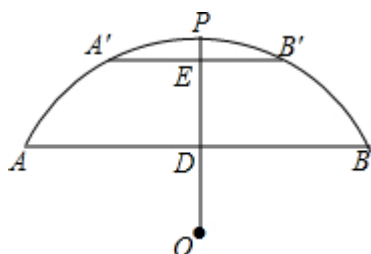
(3) $3x^2+5x+1=0$;

(4) $x(2x-4)=5-8x$.

18.（10 分）如图，有一座拱桥是圆弧形，它的跨度 $AB=60$ 米，拱高 $PD=18$ 米.

(1) 求圆弧所在的圆的半径 r 的长；

(2) 当洪水泛滥到跨度只有 30 米时，要采取紧急措施，若拱顶离水面只有 4 米，即 $PE=4$ 米时，是否要采取紧急措施？

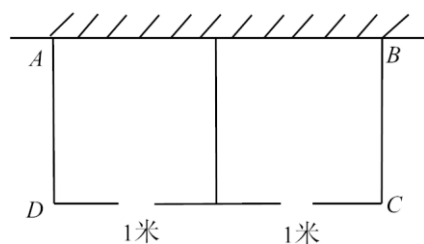


19.（10 分）如图，利用一面墙（墙长 25 米），用总长度 49 米的栅栏（图中实线部分）围成一个矩形围栏 $ABCD$ ，且中间共留两个 1 米的小门，设栅栏 BC 长为 x 米.

(1) $AB=$ _____ 米（用含 x 的代数式表示）；

(2) 若矩形围栏 $ABCD$ 面积为 210 平方米，求栅栏 BC 的长；

(3) 矩形围栏 $ABCD$ 面积是否有可能达到 240 平方米？若有可能，求出相应 x 的值，若不可能，请说明理由.

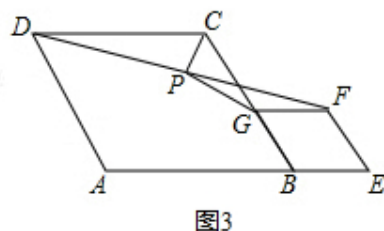
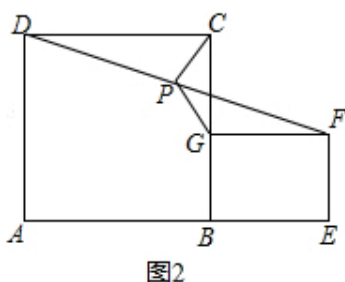
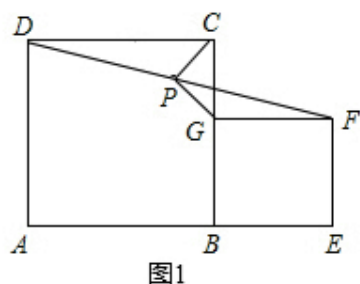


20.（10 分）某景区在 2021 年“五一”小长假期间，接待游客达 2 万人次. 预计在 2023 年“五一”小长假期间，接待游客 2.88 万人次，该景区一家冰淇淋店希望在“五一”小长假期间获得较好的收益，经测算可知，某种口味的冰淇淋成本价为每碗 10 元，借鉴以往经验. 若每碗卖 15 元，平均每天将销售 120 碗. 若价格每提高 0.5 元，则平均每天少销售 4 碗，每天店面所需其他各种费用为 168 元.

(1) 求出 2021 至 2023 年“五一”小长假期间游客人次的年平均增长率；

（2）为了更好地维护景区形象，物价局规定每碗该种口味的冰淇淋售价不得超过 20 元，当每碗售价定为多少元时，店家售卖该种口味的冰淇淋才能实现每天净利润 600 元？（净利润 = 总收入 - 总成本 - 其它各种费用）

- 21.（10 分）在正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 中，点 A 、 B 、 E 在同一条直线上，连接 DF ，且 P 是线段 DF 的中点，连接 PG 、 PC 。



- （1）如图 1， PG 与 PC 的关系为_____；
- （2）如图 2 将条件“正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ ”改为“矩形 $ABCD$ 和矩形 $BEFG$ ”其它条件不变，判断 PG 、 PC 关系，并证明：
- （3）如图 3，若将条件“正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ ”改为“菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ ”，点 A 、 B 、 E 在同一条直线上，连接 DF ， P 是线段 DF 的中点，连接 PG 、 PC ，且 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$ 。求 $\frac{PG}{PC}$ 的值。

2023-2024 学年江苏省南京市鼓楼区民办求真中学九年级（上）期初数学 试卷

参考答案与试题解析

一. 选择题（共 6 小题，18 分）

1. （3 分）一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根的情况是（ ）

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 只有一个实数根
- D. 没有实数根

【答案】B

【分析】计算方程根的判别式进行判断即可.

【解答】解：

$$\because x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 9 + 4 = 13 > 0,$$

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根，

故选：B.

2. （3 分）下列说法：（1）长度相等的弧是等弧，（2）相等的圆心角所对的弧相等，（3）劣弧一定比优弧短，（4）直径是圆中最长的弦. 其中正确的有（ ）

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

【答案】A

【分析】利用等弧的定义、圆周角定理、弧的定义及弦的定义分别判断后即可确定正确的选项.

【解答】解：（1）长度相等的弧不一定是等弧，弧的度数必须相同，故错误；

（2）同圆或等圆中相等的圆心角所对的弧相等，故错误；

（3）同圆或等圆中劣弧一定比优弧短，故错误；

（4）直径是圆中最长的弦，正确，

正确的只有 1 个，

故选：A.

3. （3 分）用配方法将方程 $2x^2 - 4x - 3 = 0$ 变形，结果正确的是（ ）

A. $2(x-1)^2 - 4 = 0$

B. $(x-1)^2 - \frac{5}{2} = 0$

C. $2(x-1)^2 - \frac{5}{2} = 0$

D. $(x-1)^2 - 5 = 0$

【答案】B

【分析】先将常数项移到方程右边，再将二次项系数化为1，最后两边配上一次项系数的一半的平方，写成完全平方公式即可。

【解答】解：∵ $2x^2 - 4x - 3 = 0$,

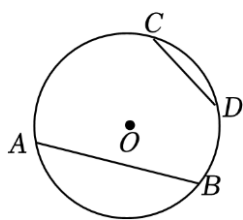
$$\therefore 2x^2 - 4x = 3,$$

$$\text{则 } x^2 - 2x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{2} + 1, \text{ 即 } (x-1)^2 = \frac{5}{2},$$

故选：B.

4. (3分) 如图，在 $\odot O$ 中，若 $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，则 AB 与 $2CD$ 的大小关系为（ ）



A. $AB = 2CD$

B. $AB < 2CD$

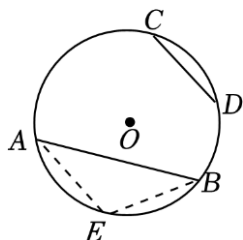
C. $AB > 2CD$

D. 无法确定

【答案】B

【分析】首先取 $\widehat{AB}$ 的中点 E ，连接 AE ， BE ，由在 $\odot O$ 中 $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，得 $\widehat{AE} = \widehat{BE} = \widehat{CD}$ ，故 $AE = BE = CD$ ，然后由三角形的三边关系求得答案。

【解答】解：如图，取 $\widehat{AB}$ 的中点 E ，连接 AE ， BE ，



在 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE} = \widehat{CD},$$

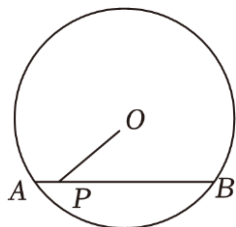
$$\therefore AE = BE = CD,$$

$$\because AE+BE>AB,$$

$$\therefore AB<2CD.$$

故选：B.

5. (3分) 如图， $\odot O$ 的直径为 10，弦 AB 的长为 8，点 P 是弦 AB 上的一个动点，使线段 OP 的长度为整数的点 P 有 ()



- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】C

【分析】当 P 为 AB 的中点时 OP 最短，利用垂径定理得到 OP 垂直于 AB ，在直角三角形 AOP 中，由 OA 与 AP 的长，利用勾股定理求出 OP 的长；当 P 与 A 或 B 重合时， OP 最长，求出 OP 的范围，由 OP 为整数，即可得到 OP 所有可能的长.

【解答】解：当 P 为 AB 的中点时，利用垂径定理得到 $OP \perp AB$ ，此时 OP 最短，

$$\because AB=8, \therefore AP=BP=4,$$

在直角三角形 AOP 中， $OA=5$ ， $AP=4$ ，

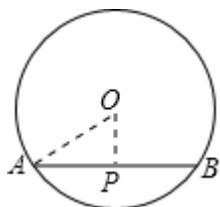
根据勾股定理得： $OP=\sqrt{OA^2-AP^2}=3$ ，即 OP 的最小值为 3；

当 P 与 A 或 B 重合时， OP 最长，此时 $OP=5$ ，

$$\therefore 3 \leq OP \leq 5,$$

则使线段 OP 的长度为整数的点 P 有 3，4，5，共 5 个.

故选：C.



6. (3分) 关于 x 的方程 $(x-1)(x+2)=p^2$ (p 为常数) 根的情况下，下列结论中正确的是 ()

- A. 两个正根
B. 一个正根，一个负根，正根的绝对值比负根的绝对值大
C. 两个负根

D. 一个正根，一个负根，正根的绝对值比负根的绝对值小

【答案】D

【分析】方程整理为一般形式，设两根分别为 a, b ，利用根与系数的关系表示出 $a+b$ 与 ab ，判断即可．

【解答】解：设方程两根设为 a, b ，

方程整理得： $x^2+x-2-p^2=0$ ，

$\therefore$ 由根与系数的关系得： $a+b=-1<0$ ， $ab=-2-p^2<0$ ，

则一个正根，一个负根，正根的绝对值比负根的绝对值小．

故选：D．

二. 填空题（共 10 小题，30 分）

7. （3 分）化简： $(a-b)\sqrt{-\frac{1}{a-b}}=$ $-\sqrt{b-a}$ ．

【答案】 $-\sqrt{b-a}$ ．

【分析】首先判断得出 $(a-b)<0$ ，进而将根号外的因式移到根号内，化简求出即可．

【解答】解： $\because \sqrt{-\frac{1}{a-b}}$ 有意义，

$\therefore (a-b)<0$ ，

$\therefore (a-b)\sqrt{-\frac{1}{a-b}}=-\sqrt{(a-b)^2 \times (-\frac{1}{a-b})}=-\sqrt{b-a}$ ．

故答案为： $-\sqrt{b-a}$ ．

8. （3 分）若一个一元二次方程的两个根分别是 1、-2，请写出一个符合题意的一元二次方程 $x^2-x-2=0$ ．

【答案】见试题解答内容

【分析】先计算出 1 与 -2 的和、积，然后根据根与系数的关系写出满足条件的一元二次方程．

【解答】解： $\because 1+(-2)=-1$ ，

$1 \cdot (-2)=-2$ ，

$\therefore$ 以 1 和 -2 为根的一元二次方程可为 $x^2-x-2=0$ ．

故答案为 $x^2-x-2=0$ ．

9. （3 分） $\odot O$ 中，弦 AB 的长恰等于半径，则弧 $\widehat{AB}$ 的度数是 60 度．

【答案】见试题解答内容

【分析】如图，连接 OA 、 OB ，先证明 $\triangle AOB$ 为等边三角形，则可得到 $\angle AOB=60^\circ$ ，然后根据圆心角的度数等于它所对的弧的度数．

【解答】解：如图，连接 OA 、 OB ，

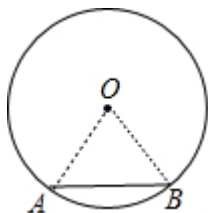
$$\because AB=OA=OB,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle AOB=60^\circ,$$

$\therefore$ 弧 $\widehat{AB}$ 的度数是 60° .

故答案为 60.



10. (3 分) 若关于 x 的方程 $kx^2+2x+1=0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 $k \leq 1$.

【答案】 $k \leq 1$.

【分析】根据一元二次方程的根的判别式即可求出答案.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $kx^2+2x+1=0$ 有实数根，

$$\therefore \text{当 } k \neq 0 \text{ 时, } \Delta = 4 - 4k \geq 0,$$

$$\therefore k \leq 1,$$

$$\therefore k \leq 1 \text{ 且 } k \neq 0,$$

当 $k=0$ 时，

此时方程为 $3x+1=0$ ，满足题意，

故答案为： $k \leq 1$.

11. (3 分) 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x_1=3$ ， $x_2=-5$ ，则关于 y 的方程 $a(y+1)^2+b(y+1)+c=0$ 的解是 $y_1=2$ ， $y_2=-6$.

【答案】 $y_1=2$ ， $y_2=-6$.

【分析】设 $t=y+1$ ，则原方程可化为 $at^2+bt+c=0$ ，根据关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x_1=3$ ， $x_2=-5$ ，得到 $t_1=3$ ， $t_2=-5$ ，于是得到结论.

【解答】解：设 $t=y+1$ ，

则原方程可化为 $at^2+bt+c=0$ ，

$\because$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x_1=3$ ， $x_2=-5$ ，

$$\therefore t_1=3, t_2=-5,$$

$$\therefore y+1=3 \text{ 或 } y+1=-5,$$

$$\text{解得 } y_1=2, y_2=-6.$$

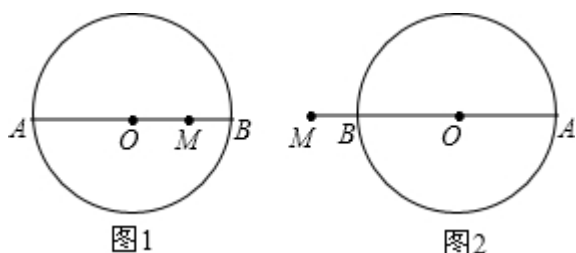
$$\text{故答案为: } y_1=2, y_2=-6.$$

12. (3分) 一个点到圆上的点的最小距离为 6cm , 最大距离为 10cm , 则圆的半径为 8 或 2 cm .

【答案】8 或 2.

【分析】点应分为位于圆的内部于外部两种情况讨论：①当点在圆内时，直径=最小距离+最大距离；
②当点 P 在圆外时，直径=最大距离 - 最小距离.

【解答】解：分为两种情况：



①当点在圆内时，如图 1，

$$\because \text{点到圆上的最小距离 } MB=6\text{cm}, \text{ 最大距离 } MA=10\text{cm},$$

$$\therefore \text{直径 } AB=6\text{cm}+10\text{cm}=16\text{cm},$$

$$\therefore \text{半径 } r=8\text{cm};$$

②当点在圆外时，如图 2，

$$\because \text{点到圆上的最小距离 } MB=6\text{cm}, \text{ 最大距离 } MA=10\text{cm},$$

$$\therefore \text{直径 } AB=10\text{cm} - 6\text{cm}=4\text{cm},$$

$$\therefore \text{半径 } r=2\text{cm},$$

综上所述，圆的半径为 8cm 或 2cm ,

故答案为：8 或 2.

13. (3分) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (k^2 - 4)x + k - 1 = 0$ 的两实数根互为相反数，则 $k = \underline{-2}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】设方程的两根分别为 x_1, x_2 ，根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = -(k^2 - 4) = 0$ ，解得 $k = \pm 2$ ，然后分别计算 Δ ，最后确定 $k = -2$.

【解答】解：设方程的两根分别为 x_1, x_2 ，

$$\because x^2 + (k^2 - 4)x + k - 1 = 0 \text{ 的两实数根互为相反数},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -(k^2 - 4) = 0, \text{ 解得 } k = \pm 2,$$

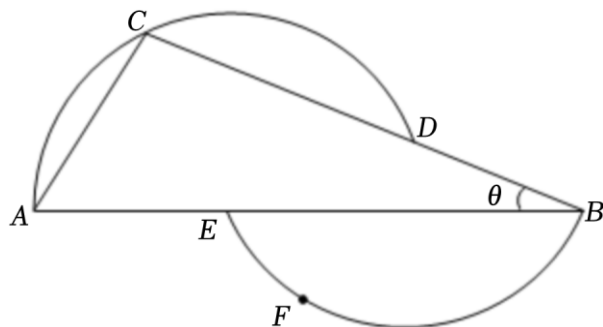
当 $k=2$ ，方程变为： $x^2 + 1 = 0$ ， $\Delta = -4 < 0$ ，方程没有实数根，所以 $k=2$ 舍去；

当 $k = -2$ ，方程变为： $x^2 - 3 = 0$ ， $\Delta = 12 > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；

$\therefore k = -2$.

故答案为 -2 .

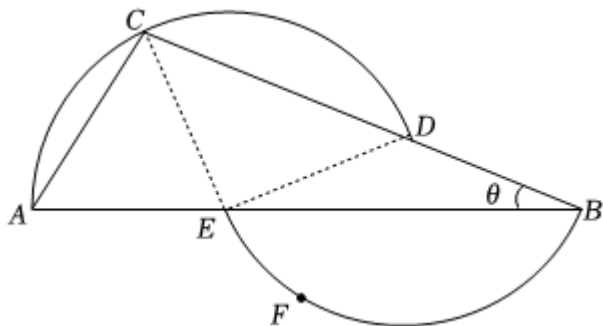
14. (3分) 如图，过 A 、 C 、 D 三点的圆的圆心为点 E ，过 B 、 F 、 E 三点的圆的圆心为 D ，如果 $\angle A = 66^\circ$ ，那么 $\angle \theta = \underline{16^\circ}$.



【答案】 16° .

【分析】 连接 CE 、 DE ，过 A 、 C 、 D 三点的圆的圆心为 E ，且过 B 、 F 、 E 三点的圆的圆心为 D ，可得 $AE = CE = DE = DB$ ，可知 $\angle A = \angle ACE$ ， $\angle ECD = \angle CDE$ ， $\angle DEB = \angle DBE$ ，根据圆周角定理可得 $\angle AEC = 48^\circ$ ，由 $\angle AEC = 3\angle DBE$ 即可求解.

【解答】 解：如图，连接 CE 、 DE ，



$\because$ 过 A 、 C 、 D 三点的圆的圆心为 E ，且过 B 、 F 、 E 三点的圆的圆心为 D ，

$\therefore AE = CE = DE = DB$ ，

$\therefore \angle A = \angle ACE$ ， $\angle ECD = \angle CDE$ ， $\angle DEB = \angle DBE$ ，

$\because \angle A = 66^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - 2 \times 66^\circ = 48^\circ$ ，

$\because \angle ECD = \angle CDE = 2\angle DBE$ ，

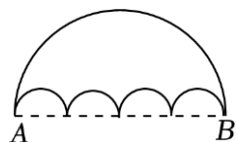
$\therefore \angle AEC = \angle ECD + \angle DBE = 3\angle DBE$ ，即 $3\angle DBE = 48^\circ$ ，

$\therefore \angle DBE = 16^\circ$ ，

即 $\angle \theta = 16^\circ$ ，

故答案为： 16° .

15. (3分) 如图，从A地到B地有两条路可走，一条路是大半圆，另一条路是4个小半圆. 有一天，一只猫和一只老鼠同时从A地到B地. 老鼠见猫沿着大半圆行走，它不敢与猫同行（怕被猫吃掉），就沿着4个小半圆行走. 假设猫和老鼠行走的速度相同，那么 猫和老鼠同时 先到达B地.



【答案】猫和老鼠同时.

【分析】利用半圆的弧长公式，即分别求得两个路径的长，然后进行比较即可.

【解答】解：以AB为直径的半圆的长是： $\frac{1}{2}\pi \cdot AB$;

设四个小半圆的直径分别是 a, b, c, d ，则 $a+b+c+d=AB$.

则老鼠行走的路径长是： $\frac{1}{2}\pi a + \frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c + \frac{1}{2}\pi d = \frac{1}{2}\pi (a+b+c+d) = \frac{1}{2}\pi \cdot AB$.

故猫和老鼠行走的路径长相同，

即猫和老鼠同时到达B地.

故答案为：猫和老鼠同时.

16. (3分) 若 $\triangle ABC$ 的一条边BC的长为5，另两边AB、AC的长是关于x的一元二次方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 的两个实数根，当 $k = \underline{2 \text{ 或 } 11}$ 时， $\triangle ABC$ 是直角三角形.

【答案】2或11.

【分析】利用因式分解法解方程得到AB、AC的长为 $k+1, k+2$ ，利用勾股定理的逆定理，当 $(k+1)^2 + (k+2)^2 = 5^2$ 时， $\triangle ABC$ 为直角三角形；当 $(k+1)^2 + 5^2 = (k+2)^2$ 时， $\triangle ABC$ 为直角三角形，然后分别解关于k的方程即可.

【解答】解： $\because x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$,

$\therefore [x - (k+1)][x - (k+2)] = 0$,

$\therefore x_1 = k+1, x_2 = k+2$,

即AB、AC的长为 $k+1, k+2$,

当 $(k+1)^2 + (k+2)^2 = 5^2$ 时， $\triangle ABC$ 为直角三角形，解得 $k_1 = 2, k_2 = -5$ （舍去）；

当 $(k+1)^2 + 5^2 = (k+2)^2$ 时， $\triangle ABC$ 为直角三角形，解得 $k = 11$ ；

综上所述，当 $k = 2$ 或 11 时， $\triangle ABC$ 是直角三角形.

故答案为2或11.

三. 解答题（共 5 小题，52 分）

17.（12 分）解方程：

$$(1) x(x-4)=2(4-x);$$

$$(2) x^2+3x=4;$$

$$(3) 3x^2+5x+1=0;$$

$$(4) x(2x-4)=5-8x.$$

【答案】 (1) $x_1=4, x_2=2$;

$$(2) x_1=-4, x_2=1;$$

$$(3) x_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{6};$$

$$(4) x_1=\frac{-2+\sqrt{14}}{2}, x_2=\frac{-2-\sqrt{14}}{2}.$$

【分析】 (1) 先移项，再利用提公因式法将方程的左边因式分解后求解可得；

(2) 先移项，再利用十字相乘法将方程的左边因式分解后求解可得；

(3) 利用公式法求解即可；

(4) 整理成一般式，再利用公式法求解即可．

【解答】 解：(1) $x(x-4)=2(4-x)$,

$$\therefore x(x-4)+2(x-4)=0,$$

$$\text{则 } (x-4)(x+2)=0,$$

$$\therefore x-4=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\text{所以 } x_1=4, x_2=2;$$

$$(2) x^2+3x=4,$$

$$\therefore x^2+3x-4=0,$$

$$\text{则 } (x+4)(x-1)=0,$$

$$\therefore x+4=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{所以 } x_1=-4, x_2=1;$$

$$(3) 3x^2+5x+1=0;$$

$$a=3, b=5, c=1,$$

$$\Delta=25-4\times 3=13>0,$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6};$$

$$(4) x(2x - 4) = 5 - 8x,$$

$$\text{整理, 得: } 2x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\therefore a = 2, b = 4, c = -5,$$

$$\therefore \Delta = 16 - 4 \times 2 \times (-5) = 56 > 0,$$

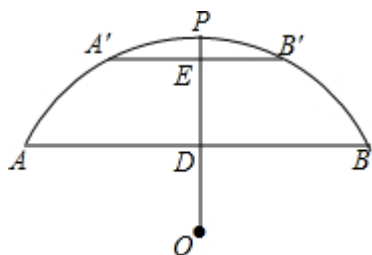
$$\text{则 } x = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}.$$

18. (10 分) 如图, 有一座拱桥是圆弧形, 它的跨度 $AB = 60$ 米, 拱高 $PD = 18$ 米.

(1) 求圆弧所在的圆的半径 r 的长;

(2) 当洪水泛滥到跨度只有 30 米时, 要采取紧急措施, 若拱顶离水面只有 4 米, 即 $PE = 4$ 米时, 是否要采取紧急措施?



【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 连接 OA , 利用 r 表示出 OD 的长, 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中根据勾股定理求出 r 的值即可;

(2) 连接 OA' , 在 $\text{Rt}\triangle A'EO$ 中, 由勾股定理得出 $A'E$ 的长, 进而可得出 $A'B'$ 的长, 据此可得出结论.

【解答】 解: (1) 连接 OA ,

$$\text{由题意得: } AD = \frac{1}{2}AB = 30 \text{ (米)}, OD = (r - 18) \text{ 米},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADO \text{ 中, 由勾股定理得: } r^2 = 30^2 + (r - 18)^2,$$

$$\text{解得, } r = 34 \text{ (米);}$$

(2) 连接 OA' ,

$$\therefore OE = OP - PE = 30 \text{ 米},$$

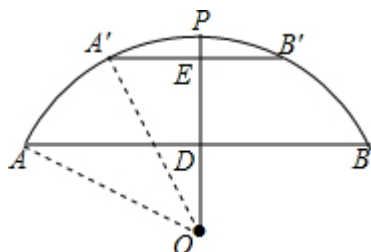
$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle A'EO \text{ 中, 由勾股定理得: } A'E^2 = A'O^2 - OE^2, \text{ 即: } A'E^2 = 34^2 - 30^2,$$

$$\text{解得: } A'E = 16 \text{ (米).}$$

$$\therefore A'B' = 32 \text{ (米)}.$$

$$\therefore A'B' = 32 > 30,$$

$\therefore$ 不需要采取紧急措施.

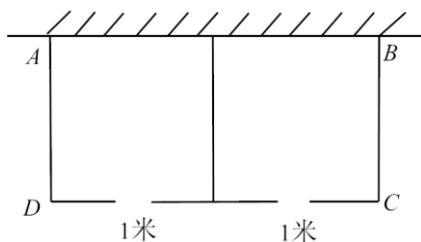


19. (10 分) 如图, 利用一面墙 (墙长 25 米), 用总长度 49 米的栅栏 (图中实线部分) 围成一个矩形围栏 $ABCD$, 且中间共留两个 1 米的小门, 设栅栏 BC 长为 x 米.

(1) $AB = \underline{(51 - 3x)}$ 米 (用含 x 的代数式表示);

(2) 若矩形围栏 $ABCD$ 面积为 210 平方米, 求栅栏 BC 的长;

(3) 矩形围栏 $ABCD$ 面积是否有可能达到 240 平方米? 若有可能, 求出相应 x 的值, 若不可能, 请说明理由.



【答案】 (1) $51 - 3x$;

(2) 10 米;

(3) 不能, 理由见解析.

【分析】 (1) 设栅栏 BC 长为 x 米, 根据栅栏的全长结合中间共留 2 个 1 米的小门, 即可用含 x 的代数式表示出 AB 的长;

(2) 根据矩形围栏 $ABCD$ 面积为 210 平方米, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其较大值即可得出结论;

(3) 根据矩形围栏 $ABCD$ 面积为 240 平方米, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 由根的判别式 $\Delta = -31 < 0$, 可得出该方程没有实数根, 进而可得出矩形围栏 $ABCD$ 面积不可能达到 240 平方米.

【解答】 解: (1) 设栅栏 BC 长为 x 米,

$\therefore$ 栅栏的全长为 49 米, 且中间共留两个 1 米的小门,

$$\therefore AB = 49 + 2 - 3x = 51 - 3x \text{ (米)},$$

故答案为：(51 - 3x)；

(2) 依题意，得：(51 - 3x) x = 210，

整理，得：x² - 17x + 70 = 0，

解得：x₁ = 7, x₂ = 10.

当 x = 7 时，AB = 51 - 3x = 30 > 25，不合题意，舍去，

当 x = 10 时，AB = 51 - 3x = 21，符合题意，

答：栅栏 BC 的长为 10 米；

(3) 不可能，理由如下：

依题意，得：(51 - 3x) x = 240，

整理得：x² - 17x + 80 = 0，

∴ Δ = (-17)² - 4 × 1 × 80 = -31 < 0，

∴ 方程没有实数根，

∴ 矩形围栏 ABCD 面积不可能达到 240 平方米.

20. (10 分) 某景区在 2021 年“五一”小长假期间，接待游客达 2 万人次. 预计在 2023 年“五一”小长假期间，接待游客 2.88 万人次，该景区一家冰淇淋店希望在“五一”小长假期间获得较好的收益，经测算可知，某种口味的冰淇淋成本价为每碗 10 元，借鉴以往经验. 若每碗卖 15 元，平均每天将销售 120 碗. 若价格每提高 0.5 元，则平均每天少销售 4 碗，每天店面所需其他各种费用为 168 元.

(1) 求出 2021 至 2023 年“五一”小长假期间游客人次的年平均增长率；

(2) 为了更好地维护景区形象，物价局规定每碗该种口味的冰淇淋售价不得超过 20 元，当每碗售价定为多少元时，店家售卖该种口味的冰淇淋才能实现每天净利润 600 元？（净利润 = 总收入 - 总成本 - 其它各种费用）

【答案】(1) 年平均增长率为 20%；

(2) 当每碗售价定为 18 元时，店家才能实现每天利润 600 元.

【分析】(1) 可设年平均增长率为 x，根据等量关系：2021 年五一长假期间，接待游客达 2 万人次，在 2023 年五一长假期间，接待游客将达 2.88 万人次，列出方程求解即可；

(2) 可设每碗售价定为 y 元时，店家才能实现每天利润 600 元，根据利润的等量关系列出方程求解即可.

【解答】解：(1) 可设年平均增长率为 x，依题意有

$$2(1+x)^2 = 2.88,$$

解得 x₁ = 0.2 = 20%, x₂ = -2.2 (舍去).

答：年平均增长率为 20%；

（2）设每碗售价定为 y 元时，店家才能实现每天利润 600 元，依题意得：

$$(y - 10) \left[120 - \frac{4}{0.5} (y - 15) \right] - 168 = 600,$$

解得 $y_1 = 18$, $y_2 = 22$,

$\because$ 每碗售价不得超过 20 元，

$\therefore y = 18$.

答：当每碗售价定为 18 元时，店家才能实现每天利润 600 元.

21. (10 分) 在正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 中，点 A 、 B 、 E 在同一条直线上，连接 DF ，且 P 是线段 DF 的中点，连接 PG 、 PC .

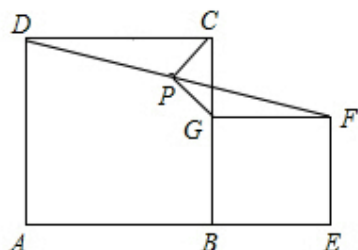


图1

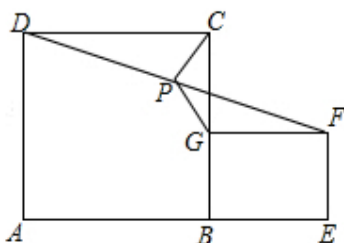


图2

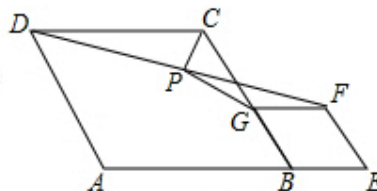


图3

(1) 如图 1, PG 与 PC 的关系为 $PG \perp PC$, $PG = PC$;

(2) 如图 2 将条件“正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ ”改为“矩形 $ABCD$ 和矩形 $BEFG$ ”其它条件不变，判断 PG 、 PC 关系，并证明：

(3) 如图 3，若将条件“正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ ”改为“菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ ”，点 A 、 B 、 E 在同一条直线上，连接 DF ， P 是线段 DF 的中点，连接 PG 、 PC ，且 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$ ，求 $\frac{PG}{PC}$ 的值.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 延长 GP 交 DC 于点 H ，由条件可以得出 $\triangle DHP \cong \triangle FGP$ ，就可以得出 $DH = GF$ ， $PH = PG$ ，根据正方形的性质就可以得出 $HC = GC$ ，从而由等腰直角三角形的性质可以得出结论；

(2) 如图 2，延长 GP 交 DC 于点 H ，由条件可以得出 $\triangle DHP \cong \triangle FGP$ ，根据直角三角形的性质就可以得出 $PG = PC$ ；

(3) 如图 2，延长 GP 交 DC 于点 H ，由条件可以得出 $\triangle DHP \cong \triangle FGP$ ，根据菱形的性质可以得出 $\triangle HCG$ 是等腰三角形，由菱形的内角和可以求出 $\angle PCG = 60^\circ$ ，由特殊角的三角函数值就可以求出结论.

【解答】 解：(1) $PG \perp PC$ 且 $PG = PC$ ；

理由：如图 1，延长 GP 交 DC 于点 H ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 是正方形,
 $\therefore DC=BC, BG=GF, \angle FGB=\angle GCD=\angle DCB=90^\circ$,
 $\therefore CD \parallel GF$,
 $\therefore \angle CDP=\angle GFP$,
 $\because P$ 是线段 DF 的中点,
 $\therefore DP=FP$,
 $\because$ 在 $\triangle DHP$ 和 $\triangle FGP$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDP=\angle GFP \\ DP=FP \\ \angle DPH=\angle FPG \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle DHP \cong \triangle FGP$ (ASA),
 $\therefore DH=FG, PH=PG$,
 $\therefore HC=GC$,
 $\therefore \triangle HCG$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore PH=PG$
 $\therefore PG \perp PC$ 且 $PG=PC$.

故答案为: $PG \perp PC, PG=PC$;

(2) 如图 2, 延长 GP 交 DC 于点 H ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 是矩形,
 $\therefore \angle FGB=\angle GCD=\angle DCB=90^\circ$,
 $\therefore CD \parallel GF$,
 $\therefore \angle CDP=\angle GFP$,
 $\because P$ 是线段 DF 的中点,
 $\therefore DP=FP$.,
 $\because$ 在 $\triangle DHP$ 和 $\triangle FGP$ 中

$$\begin{cases} \angle CDP=\angle GFP \\ DP=FP \\ \angle DPH=\angle FPG \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle DHP \cong \triangle FGP$ (ASA),
 $\therefore PH=PG=\frac{1}{2}HG$,

$$\because \angle DCB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle HCG$ 是直角三角形,

$$\therefore CP = \frac{1}{2}HG,$$

$$\therefore PG = PC;$$

(3) 如图 3, 延长 GP 交 CD 于 H ,

$\because P$ 是 DF 的中点,

$$\therefore DP = FP,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 是菱形, 点 A, B, E 在同一条直线上,

$$\therefore DC \parallel GF,$$

$$\therefore \angle HDP = \angle GFP,$$

$\because$ 在 $\triangle DHP$ 和 $\triangle FGP$ 中

$$\begin{cases} \angle CDP = \angle GFP \\ DP = FP \\ \angle DPH = \angle FPG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DHP \cong \triangle FGP \text{ (ASA)},$$

$$\therefore HP = GP, DH = FG,$$

$$\because CD = CB, FG = GB,$$

$$\therefore CD - DH = CB - FG,$$

即: $CH = CG$,

$\therefore \triangle HCG$ 是等腰三角形,

$\therefore PC \perp PG \angle HCP = \angle GCP$ (等腰三角形三线合一)

$$\therefore \angle CPG = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle GCP = \frac{1}{2} \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle CPG \text{ 中, } \frac{PG}{PC} = \sqrt{3}.$$

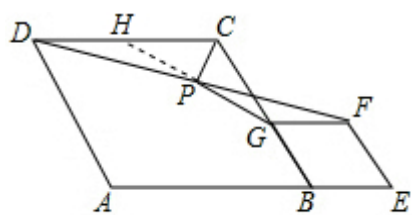


图3

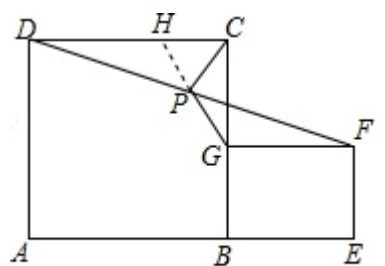


图2

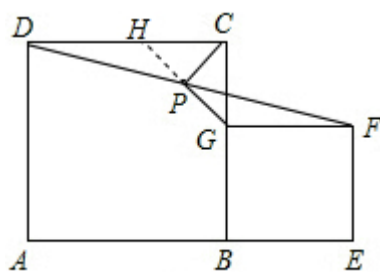


图1