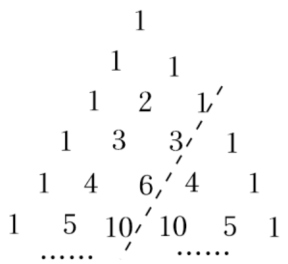
2023-2024学年江苏省苏州市张家港市沙洲中学高二（上）开学数学试卷

一、单选题（每小题5分，共40分）

1．（5分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$a_{2023}=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

2．（5分）“杨辉三角”是中国古代重要的数学成就，它比西方的“帕斯卡三角形”早了300多年．如图所示的是由“杨辉三角”拓展而成的三角形数阵，图中虚线上的数1，3，6，10，…构成数列$\{a_n\}$，记a_n为该数列的第n项，则$a_{63}=$（　　）



A．2016　　B．4032　　C．2020　　D．4040

3．（5分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\frac{3}{2n-11}$，前n项的和为S_n，关于a_n，S_n叙述正确的是（　　）

A．a_n，S_n都有最小值　　B．a_n，S_n都没有最小值

C．a_n，S_n都有最大值　　D．a_n，S_n都没有最大值

4．（5分）设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前n项和S_n，若$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　　）

A．$\frac{15}{8}$　　B．$\frac{65}{8}$　　C．15　　D．40

5．（5分）等差数列$\{a_n\}$中，S_n为它的前n项和，若$a_1>0$，$S_{20}>0$，$S_{21}<0$，则当$n=$（　　）时，S_n最大．

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

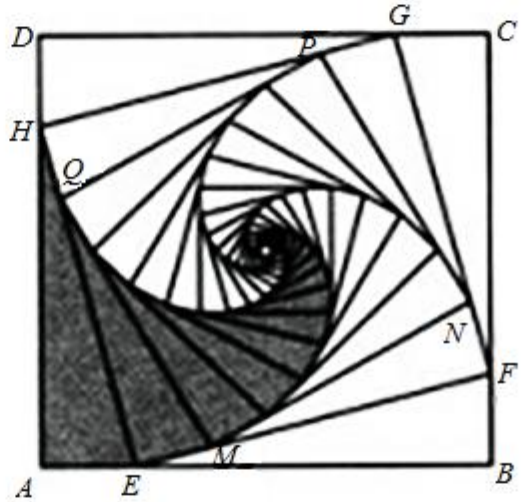
6．（5分）已知函数$f(x)=(x-1)^3+2$，数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_n>0$，且$a_{1009}=e$，利用课本中推导等差数列前n项和的公式的方法，则$f(lna_1)+f(lna_2)+\cdots+f(lna_{2017})=$（　　）

A．$\frac{2017}{2}$　　B．2017　　C．4034　　D．8068

7．（5分）2021年7月24日，中共中央办公厅、国务院办公厅印发《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》，这个政策就是我们所说的“双减”政策，“双减”政策极大缓解了教育的“内卷”现象，而“内卷”作为高强度的竞争使人精疲力竭．数学中的螺旋线可以形象的展示“内卷”这个词，螺旋线这个名词来源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠卷”，平面螺旋便是以一个固定点开始向外逐圈旋绕而形成的曲线，如图（1）所示．如图（2）所示阴影部分也是一个美丽的螺旋线

型的图案，它的画法是这样的：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，取正方形 $ABCD$ 各边的四等分点 E，F，G，H，作第 2 个正方形 $EFGH$，然后再取正方形 $EFGH$ 各边的四等分点 M，N，P，Q，作第 3 个正方形 $MNPQ$，依此方法一直继续下去，就可以得到阴影部分的图案．设正方形 $ABCD$ 边长为 a_1，后续各正方形边长依次为 a_2，a_3，…，a_n，…；如图（2）阴影部分，设直角三角形 AEH 面积为 b_1，后续各直角三角形面积依次为 b_2，b_3，…，b_n，…．下列说法错误的是（　　）


图（1）



图（2）

A．从正方形 $ABCD$ 开始，连续 3 个正方形的面积之和为$\frac{129}{4}$

B．$a_n=4\times(\frac{\sqrt{10}}{4})^{n-1}$

C．使得不等式$b_n>\frac{1}{2}$成立的 n 的最大值为 4

D．数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n<4$

8．（5 分）对于无穷数列$\{a_n\}$，给出如下三个性质：①$a_1<0$；②$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$；③$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists t\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+t}>a_n$．定义：同时满足性质①和②的数列$\{a_n\}$为“s 数列”，同时满足性质①和③的数列$\{a_n\}$为“t 数列”，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $a_n=2n-3$，则$\{a_n\}$为“s 数列”

B．若$a_n=(-\frac{1}{2})^n$，则$\{a_n\}$为“t 数列”

C．若$\{a_n\}$为“s 数列”，则$\{a_n\}$为“t 数列”

D．若$\{a_n\}$为“t 数列”，则$\{a_n\}$为“s 数列”

二、多选题（每小题 5 分，共 20 分）

（多选）9．（5 分）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，则下列结论中正确的是（　　）

A．数列$\{a_n^2\}$是等比数列

B．若$a_3=2$，$a_7=32$，则$a_5=\pm 8$

C．若数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=3^{n-1}+r$，则$r=-1$

D．若$a_1<a_2<a_3$，则数列$\{a_n\}$是递增数列

（多选）10．（5 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_1>0$，公差$d\neq 0$，则（　　）

A．若$S_4>S_8$，则$S_{12}<0$

B．若$S_4=S_8$，则S_6是S_n中最大的项

C．若$S_5>S_6$，则$S_4>S_5$

D．若$S_3>S_4$，则$S_4>S_5$

（多选）11．（5 分）已知正项等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，公比分别为q_1，q_2，前 n 项和分别为S_n，T_n，若$a_1=b_1$，$q_1=2q_2$，且$\frac{3S_n}{T_n}=2b_n+1$，则（　　）

A．$a_1=1$　　B．$b_2=4$　　C．$S_2<T_2^2$　　D．$S_2>T_4$

（多选）12．（5 分）已知等差数列$\{a_n\}$中，当且仅当$n=7$时，S_n取得最大值．记数列$\{\frac{S_n}{n}\}$的前 k 项和为T_k（　　）

A．若$S_6=S_8$，则当且仅当$k=13$时，T_k取得最大值

B．若$S_6<S_8$，则当且仅当$k=14$时，T_k取得最大值

C．若$S_6>S_8$，则当且仅当$k=15$时，T_k取得最大值

D．若$\exists m\in \mathbf{N}^*$，$S_m=0$，则当$k=13$或 14 时，$T_k$取得最大值

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13．（5 分）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其前 n 项和为S_n，前三项和为 13，前三项积为 27，则$S_5=$______．

14．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_n=2n^2+\lambda n+3$，$n\in \mathbf{N}^*$，且$\{a_n\}$是递增数列，则实数 λ 的取值范围是______．

15．（5 分）数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则数列$\{a_n\}$的前 6 项和$S_6=$______．

16．（5 分）已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q（$q>0$），前 n 项和为S_n，且满足$a_1=q$，$a_5=a_1+S_4$．若对一切正整数 n，不等式$13-2n-2m+ma_n>mS_n$恒成立，则实数 m 的取值范围为______．

四、解答题（第 17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，共 70 分）

17．（10 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=4$，$a_2=8$且$S_{n+2}-2S_{n+1}+S_n=4$．

（1）求证：数列$\{a_n\}$是等差数列；

（2）若 a_m，S_m，$14a_{m+1}$ 成等比数列，求正整数 m．

18．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，a_1＝5，a_2 为整数，且$S_n\leqslant S_3(n\in N^*)$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 b_n＝$|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

19．（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知$\frac{2S_n}{n}-a_n=1(n\in N_+)$，且 a_2＝3．

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

20．（12 分）若数列$\{a_n\}$满足 a_{n+1}＝a_n^2，则称数列$\{a_n\}$为“平方递推数列”．已知数列$\{a_n\}$中，a_1＝8，点（a_n，a_{n+1}）在函数 $f(x)=x^2+4x+2$ 的图象上，其中 n 为正整数．

（1）证明：数列 $\{a_n+2\}$是“平方递推数列”，且数列 $\{lg(a_n+2)\}$为等比数列；

（2）设 $b_n=lg(a_n+2)$，$c_n=2n+7$，$d_n=\begin{cases}b_n，n为奇数\\c_n，n为偶数\end{cases}$，求数列$\{d_n\}$的前 10 项和 S_{10}．

21．（12 分）已知数列$\{a_n\}$中，a_1＝2，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$．

（1）证明数列 $\{\frac{1}{a_n-1}\}$ 是等差数列，并求通项公式 a_n；

（2）若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdots a_n^2\leqslant k\cdot 2^n$成立，求 k 的取值范围．

22．（12 分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，首项为 a_1，且$\frac{1}{2}$、a_n、S_n成等差数列．

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等比数列，并写出通项公式；

（2）若 $b_n=-2\log_2 a_n$，设$c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n；

（3）若不等式$\frac{3n-2}{8n}T_n\leqslant m^2-m-1$对一切正整数 n 恒成立，求实数 m 的取值范围．

2023-2024 学年江苏省苏州市张家港市沙洲中学高二（上）开学数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

1．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $a_{2023}=$（　　）

A．－2　　B．－1　　C．1　　D．2

【答案】C

【分析】把递推关系式 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 里的 n 换成 $n+1$，结合 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 得到 $a_{n+3}=-a_n$，然后把上式的的 n 换成 $n+3$ 得到周期，即可得出答案．

【解答】解：$\because a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \therefore a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n-a_{n+1}=-a_n$，即 $a_{n+3}=-a_n$，

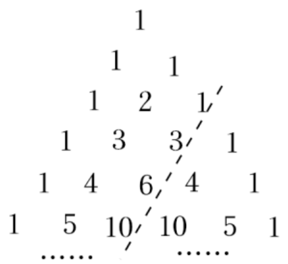
又$\because a_{n+6}=-a_{n+3}=-(-a_n)=a_n$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以 6 为周期的周期数列，

$\therefore a_{2023}=a_{337\times6+1}=a_1=1$．

故选：C．

2．（5 分）“杨辉三角”是中国古代重要的数学成就，它比西方的“帕斯卡三角形”早了 300 多年．如图所示的是由“杨辉三角”拓展而成的三角形数阵，图中虚线上的数 1，3，6，10，…构成数列$\{a_n\}$，记 a_n 为该数列的第 n 项，则 $a_{63}=$（　　）



A．2016　　B．4032　　C．2020　　D．4040

【答案】A

【分析】设第 n 个数为 a_n，观察图中的数据可得 $a_1=1$，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3\cdots a_n-a_{n-1}=n$，利用叠加法可求 a_n，从而可求 a_{63} 的值．

【解答】解：设第 n 个数为 a_n，

则 $a_1=1$，

$a_2-a_1=2$，

$a_3-a_2=3$，

$a_4-a_3=4$，

…

$a_n-a_{n-1}=n$，

叠加可得，$a_n-a_1=2+3+4+\cdots+n$，

$\therefore a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore a_{63}=2016$，

故选：*A*.

3.（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{3}{2n-11}$，前 n 项的和为 S_n，关于 a_n，S_n 叙述正确的是（　　）

A．a_n，S_n 都有最小值　　B．a_n，S_n 都没有最小值

C．a_n，S_n 都有最大值　　D．a_n，S_n 都没有最大值

【答案】*A*

【分析】利用数列通项的单调性和正负即可判断出答案．

【解答】解：①$\because a_n=\frac{3}{2n-11}$，$\therefore$当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n<0$ 且单调递减；当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n>0$，且单调递减．故当 $n=5$ 时，$a_5=-3$ 为最小值；

②由①的分析可知：当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n>0$．故可得 S_5 最小．

综上可知：．a_n，S_n 都有最小值．

故选：*A*.

4.（5 分）设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和 S_n，若 $a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$（　　）

A．$\frac{15}{8}$　　B．$\frac{65}{8}$　　C．15　　D．40

【答案】*C*

【分析】根据题意列出关于 q 的方程，计算出 q，即可求出 S_4.

【解答】解：由题知 $1+q+q^2+q^3+q^4=5(1+q+q^2)-4$，

化为 $q^3+q^4=4q+4q^2$，即 $(q-2)(q+1)(q+2)=0$.

由题知 $q>0$，解得 $q=2$.

$\therefore S_4=1+2+4+8=15$.

故选：*C*.

5.（5 分）等差数列$\{a_n\}$中，S_n 为它的前 n 项和，若 $a_1>0$，$S_{20}>0$，$S_{21}<0$，则当 $n=$（　　）时，S_n 最大．

A．8　　　　　　B．9　　　　　　C．10　　　　　　D．11

【答案】C

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式与项的性质，得出 $a_{10}>0$，且 $a_{11}<0$，由此判断数列$\{a_n\}$的前 10 项和最大．

【解答】解：等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n，且 $S_{20}>0$，$S_{21}<0$，

即 $a_{10}+a_{11}>0$，并且 $a_{11}<0$，

所以 $a_{10}>0$，

所以数列$\{a_n\}$的前 10 项和最大．

故选：C．

6．（5 分）已知函数 $f(x)=(x-1)^3+2$，数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_n>0$，且 $a_{1009}=e$，利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法，则 $f(lna_1)+f(lna_2)+\cdots+f(lna_{2017})=$（　　）

A．$\frac{2017}{2}$　　　　B．2017　　　　C．4034　　　　D．8068

【答案】C

【分析】课本中推导等差数列的前 n 项和的公式的方法为“倒序相加法”，研究这一组数的性质发现，首末两项的和是一个常数，由此得到解题方法，运用等比数列的性质和对数的运算性质，即可得到所求和．

【解答】解：用倒序相加法：

令 $f(lna_1)+f(lna_2)+\cdots+f(lna_{2017})=S$　①

则也有 $f(lna_{2017})+f(lna_{2016})+\cdots+f(lna_2)+f(lna_1)=S$　②

由 $f(x)+f(2-x)=(x-1)^3+2+(1-x)^3+2=4$，

$a_1a_{2017}=a_{1009}^2=e^2$，即有 $lna_1+lna_{2017}=lne^2=2$，

可得：$f(lna_{2017})+f(lna_1)=f(lna_{2016})+f(lna_2)=\cdots=4$，

于是由①②两式相加得 $2S=2017\times4$，

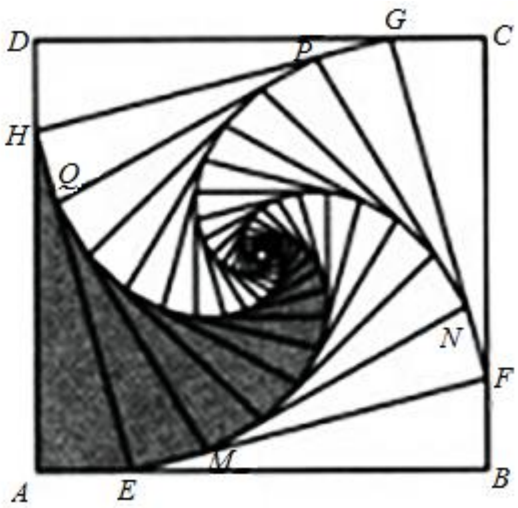
所以 $S=4034$．

故选：C．

7．（5 分）2021 年 7 月 24 日，中共中央办公厅、国务院办公厅印发《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》，这个政策就是我们所说的“双减”政策，“双减”政策极大缓解了教育的“内卷”现象，而“内卷”作为高强度的竞争使人精疲力竭．数学中的螺旋线可以形象的展示“内卷”这个词，螺旋线这个名词来源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠卷”，平面螺旋便是以一个固

定点开始向外逐圈旋绕而形成的曲线，如图（1）所示．如图（2）所示阴影部分也是一个美丽的螺旋线型的图案，它的画法是这样的：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，取正方形 $ABCD$ 各边的四等分点 E，F，G，H，作第 2 个正方形 $EFGH$，然后再取正方形 $EFGH$ 各边的四等分点 M，N，P，Q，作第 3 个正方形 $MNPQ$，依此方法一直继续下去，就可以得到阴影部分的图案．设正方形 $ABCD$ 边长为 a_1，后续各正方形边长依次为 a_2，a_3，…，a_n，…；如图（2）阴影部分，设直角三角形 AEH 面积为 b_1，后续各直角三角形面积依次为 b_2，b_3，…，b_n，…．下列说法错误的是（　　）

图（1）



图（2）

A．从正方形 $ABCD$ 开始，连续 3 个正方形的面积之和为$\frac{129}{4}$

B．$a_n=4\times(\frac{\sqrt{10}}{4})^{n-1}$

C．使得不等式$b_n>\frac{1}{2}$成立的 n 的最大值为 4

D．数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n<4$

【答案】C

【分析】根据题意得到数列$\{a_n\}$是以 4 为首项，$\frac{\sqrt{10}}{4}$为公比的等比数列，进而求出$\{a_n\}$的通项公式，再根据$S_{\triangle AEH}=\frac{S_{\triangle ABCD}-S_{\triangle EFGH}}{4}$得到 $b_n=\frac{a_n{}^2-a_{n+1}{}^2}{4}$，得到$\{b_n\}$的通项公式，最后验证四个选项得到答案．

【解答】解：由题可得 $a_1=4$，$a_2=\sqrt{(\frac{1}{4}a_1)^2+(\frac{3}{4}a_1)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a_1$，$a_3=\sqrt{(\frac{1}{4}a_2)^2+(\frac{3}{4}a_2)^2}=(\frac{\sqrt{10}}{4})^2a_1$，……，$a_n=\sqrt{(\frac{1}{4}a_{n-1})^2+(\frac{3}{4}a_{n-1})^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a_{n-1}$，

则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以数列$\{a_n\}$是以 4 为首项，$\frac{\sqrt{10}}{4}$为公比的等比数列，则 $a_n=4\cdot(\frac{\sqrt{10}}{4})^{n-1}$，

由题意可得 $S_{\triangle AEH}=\frac{S_{\triangle ABCD}-S_{\triangle EFGH}}{4}$，即 $b_1=\frac{a_1^{\ 2}-a_2^{\ 2}}{4}$，$b_2=\frac{a_2^{\ 2}-a_3^{\ 2}}{4}$，……，$b_n=\frac{a_n^{\ 2}-a_{n+1}^{\ 2}}{4}$，

于是 $b_n=\frac{16(\frac{\sqrt{10}}{4})^{2n-2}-16(\frac{\sqrt{10}}{4})^{2n}}{4}=\frac{3}{2}(\frac{5}{8})^{n-1}$，

对 A：连续三个正方形面积之和 $S=a_1^2+a_2^2+a_3^2=4^2+(\sqrt{10})^2+(\frac{5}{2})^2=\frac{129}{4}$，正确；

对 B：由上述分析 B 正确；

对 C：令 $b_n=\frac{3}{2}(\frac{5}{8})^{n-1}>\frac{1}{2}$，则 $(\frac{5}{8})^{n-1}>\frac{1}{3}$，而 $(\frac{5}{8})^{4-1}=\frac{125}{512}<\frac{1}{3}$，错误；

对 D：$S_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-(\frac{5}{8})^n}{1-\frac{5}{8}}=4[1-(\frac{5}{8})^n]<4$，正确．

故选：C．

8．（5 分）对于无穷数列$\{a_n\}$，给出如下三个性质：①$a_1<0$；②$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$；③$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists t\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+t}>a_n$．定义：同时满足性质①和②的数列$\{a_n\}$为“s 数列”，同时满足性质①和③的数列$\{a_n\}$为“t 数列”，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $a_n=2n-3$，则$\{a_n\}$为“s 数列”

B．若 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$，则$\{a_n\}$为“t 数列”

C．若$\{a_n\}$为“s 数列”，则$\{a_n\}$为“t 数列”

D．若$\{a_n\}$为“t 数列”，则$\{a_n\}$为“s 数列”

【答案】A

【分析】A 选项，经过验证 $a_n=2n-3$ 满足①②，故 A 正确；B 选项，经过验证 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$不一定满足③，故 B 错误；CD 选项，均可举出反例．

【解答】解：若 $a_n=2n-3$，则 $a_1=2-3=-1<0$，满足①，

$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}=2(n+s)-3$，$a_n+a_s=2n-3+2s-3=2(n+s)-6$，

因为 $2(n+s)-3>2(n+s)-6$，所以$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，满足②，故 A 正确；

若 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$，则 $a_1=(-\frac{1}{2})^1=-\frac{1}{2}<0$，满足①，

$a_{n+1}=(-\frac{1}{2})^{n+1}$，令 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>(-\frac{1}{2})^n$，

若 n 为奇数，此时 $(-\frac{1}{2})^n<0$，存在 $t\in\mathbf{N}^*$，且为奇数时，此时满足 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>0>(-\frac{1}{2})^n$，

若 n 为偶数，此时 $(-\frac{1}{2})^n>0$，则此时不存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>(-\frac{1}{2})^n$，

综上：B 选项错误；

设 $a_n=-2n+1$，此时满足 $a_1=-2+1=-1<0$，

也满足$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}=-2(n+s)+1$，$a_n+a_s=-2n+1-2s+1=-2(n+s)-2$，

即$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，

但不满足③$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists t\in\mathbf{N}^*$，$a_{n-1}>a_n$，

因为 $a_{n+t}=-2(n+t)+1=-2n-2t+1=a_n-2t<a_n$，

综上 C 选项错误；

不妨设 $a_n=(-2)^n$，满足 $a_1=-2<0$，

且 $\forall n\in N^*$，$a_n=(-2)^n$，

当 n 为奇数时，取 $t=1$，使得 $a_{n+1}=(-2)^{n+1}>a_n$，

当 n 为偶数时，取 $t=2$，使得 $a_{n+2}=(-2)^{n+2}>a_n$，

故$\{a_n\}$为“t 数列”，

但此时不满足$\forall n$，$s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，不妨取 $n=1$，$s=2$，

则 $a_1=-2$，$a_2=4$，$a_3=-8$，而 $a_{1+2}=-8<-2+4=a_1+a_2$，

则$\{a_n\}$不是“s 数列“，D 选项措误；

故选：A.

二、多选题（每小题 5 分，共 20 分）

（多选）9.（5 分）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，则下列结论中正确的是（　　）

A．数列$\{a_n^2\}$是等比数列

B．若 $a_3=2$，$a_7=32$，则 $a_5=\pm8$

C．若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^{n-1}+r$，则 $r=-1$

D．若 $a_1<a_2<a_3$，则数列$\{a_n\}$是递增数列

【答案】AD

【分析】利用等比数列的性质直接求解．

【解答】解：由数列$\{a_n\}$是等比数列，知：

对于 A，∵数列$\{a_n\}$是等比数列，∴$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\frac{a_1^2q^{2n}}{a_1^2q^{2n-2}}=q^2$，

∴数列$\{a_n^2\}$是等比数列，故 A 正确；

对于 B，∵$a_3=2$，$a_7=32$，则 $a_5=\pm8$，又 $a_5=a_3\bullet q^2$，故 a_5 与 a_3 同号，负值舍去，故 B 错误；

对于 C，∵数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^{n-1}+r$，

∴$a_1=S_1=1+r$，$a_2=S_2-S_1=(3+r)-(1+r)=2$，

$a_3=S_3-S_2=(9+r)-(3+r)=6$，

∴$2^2=(1+r)\times6$，解得 $r=-\frac{1}{3}$，故 C 错误；

对于 D，若 $a_1<a_2<a_3$，则 $a_1(q-1)>0$ 且 $a_1q(q-1)>0$，

∴$q>0$，∴$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}$，故 D 正确．

故选：AD．

（多选）10．（5 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1>0$，公差 $d\neq0$，则（　　）

A．若 $S_4>S_8$，则 $S_{12}<0$

B．若 $S_4=S_8$，则 S_6 是 S_n 中最大的项

C．若 $S_5>S_6$，则 $S_4>S_5$

D．若 $S_3>S_4$，则 $S_4>S_5$

【答案】ABD

【分析】根据 $S_4>S_8$ 可推得 $a_6+a_7<0$，利用等差数列的性质以及前 n 项和公式，可判断 A；

由 $S_4=S_8$ 可推出 $a_6+a_7=0$，进而判断 $a_6>0$，$a_7<0$，则 $d<0$，即可判断 B；

由 $S_5>S_6$ 可得 $a_6<0$，$d<0$，$a_5=a_6-d$，无法判断 a_5 的正负，可判断 C；

由 $S_3>S_4$ 推出 $a_4<0$，$d<0$，则 $a_5=a_4+d<0$，由此判断 D．

【解答】解：由 $S_4>S_8$，得 $S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=2(a_6+a_7)<0$，

所以 $a_6+a_7<0$，

则 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$，$A$ 正确；

因为 $S_4=S_8$，

所以 $S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=2(a_6+a_7)=0$，即 $a_6+a_7=0$，

因为 $a_1>0$，$d\neq0$，

所以 $a_6>0$，$a_7<0$，则 $d<0$，等差数列$\{a_n\}$为递减数列，

则 S_6 是 S_n 中最大的项，B 正确；

若 $S_5>S_6$，则 $S_6-S_5<0$，即 $a_6<0$，

因为 $a_1>0$，$d\neq0$，则 $d<0$，故 $a_5=a_6-d$，无法判断 a_5 的正负，

故 $S_5=S_4+a_5$，不能判断 $S_4>S_5$，C 错误；

因为 $S_3>S_4$，所以 $S_4-S_3=a_4<0$，

因为 $a_1>0$，$d\neq0$，所以 $d<0$，则 $a_5=a_4+d<0$，

则 $S_5=S_4+a_5<S_4$，D 正确，

故选：ABD．

（多选）11．（5 分）已知正项等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，公比分别为 q_1，q_2，前 n 项和分别为 S_n，T_n，若 $a_1=b_1$，$q_1=2q_2$，且$\frac{3S_n}{T_n}=2b_n+1$，则（　　）

A．$a_1=1$　　　　B．$b_2=4$　　　　C．$S_2\leqslant T_2^2$　　　　D．$S_2>T_4$

【答案】AC

【分析】根据题意，代入 $n=1$ 求得 $a_1=b_1=1$，代入 $n=2$ 求得到 $q_1=2q_2=4$，从而求得数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前几项，由此对选项逐一分析检验即可．

【解答】解：对于 A，因为$\frac{3S_n}{T_n}=2b_n+1$，

所以当 $n=1$ 时，$\frac{3a_1}{b_1}=2b_1+1$，

又 $a_1=b_1$，所以 $3=2b_1+1$，故 $b_1=1$，

所以 $a_1=1$，故 A 正确；

对于 B，当 $n=2$ 时，$\frac{3a_2}{b_2}=2b_2+1$，即$\frac{3(a_1+a_1q_1)}{b_1+b_1q_2}=2b_1q_2+1$，

将 $a_1=b_1=1$，$q_1=2q_2$ 代入得$\frac{3(1+2q_2)}{1+q_2}=2q_2+1$，即（$1+2q_2$）（$q_2-2$）$=0$，

解得 $q_2=2$ 或 $q_2=-\frac{1}{2}$，

因为$\{b_n\}$是正项等比数列，所以 $q_2>0$，故 $q_2=2$，

所以 $b_2=b_1q_2=2$，故 B 错误；

对于 C，由选项 B 可得 $q_1=2q_2=4$，

所以 $a_2=a_1q_1=4$，则 $S_2=a_1+a_2=5$，

又由选项 AB 知 $T_2=b_1+b_2=3$，则 $T_2^2=9$，故 $S_2\leqslant T_2^2$，故 C 正确；

对于 D，由选项 B 可得 $b_3=b_2q_2=4$，$b_4=b_3q_2=8$，

所以 $T_4=b_1+b_2+b_3+b_4=1+2+4+8=15$，故 $S_2<T_4$，故 D 错误．

故选：AC．

（多选）12．（5 分）已知等差数列$\{a_n\}$中，当且仅当 $n=7$ 时，S_n 取得最大值．记数列$\{\frac{S_n}{n}\}$的前 k 项和为 T_k（　　）

A．若 $S_6=S_8$，则当且仅当 $k=13$ 时，T_k 取得最大值

B．若 $S_6<S_8$，则当且仅当 $k=14$ 时，T_k 取得最大值

C．若 $S_6>S_8$，则当且仅当 $k=15$ 时，T_k 取得最大值

D．若$\exists m\in\mathbf{N}^*$，$S_m=0$，则当 $k=13$ 或 14 时，T_k 取得最大值

【答案】BD

【分析】由等差数列的通项公式和求和公式，结合数列的单调性和等差数列的性质，可得结论．

【解答】解：等差数列$\{a_n\}$中，当且仅当 $n=7$ 时，S_n 取得最大值，

可得数列$\{a_n\}$为递减数列，首项大于 0，公差小于 0，$\{\frac{S_n}{n}\}$为递减数列，

对于 A，若 $S_6=S_8$，即有 $a_7+a_8=0$，可得 $a_7>0$，$a_8<0$，$a_1+a_{14}=a_7+a_8=0$，

即 $S_{14}=0$；$a_1+a_{13}=2a_7>0$，$a_1+a_{15}=2a_8<0$，

即$\frac{S_{14}}{14}=0$，$\frac{S_{15}}{15}<0$，$\frac{S_{13}}{13}>0$，则 $k=13$ 或 14 时，T_k 取得最大值，故 A 错误；

对于 B，若 $S_6<S_8$，即有 $a_7+a_8>0$，可得 $a_7>0$，$a_8<0$，则 $a_1+a_{14}=a_7+a_8>0$，

即 $S_{14}>0$；$a_1+a_{13}=2a_7>0$，$a_1+a_{15}=2a_8<0$，

即$\frac{S_{14}}{14}>0$，$\frac{S_{15}}{15}<0$，$\frac{S_{13}}{13}>0$，则 $k=14$ 时，T_k 取得最大值，故 B 正确；

对于 C，若 $S_6>S_8$，即有 $a_7+a_8<0$，可得 $a_1+a_{14}=a_7+a_8<0$，

即 $S_{14}<0$；$a_1+a_{13}=2a_7>0$，$a_1+a_{15}=2a_8<0$，

即$\frac{S_{14}}{14}<0$，$\frac{S_{15}}{15}<0$，$\frac{S_{13}}{13}>0$，则 $k=13$ 时，T_k 取得最大值，故 C 错误；

对于 D，若$\exists m\in\mathbf{N}^*$，$S_m=0$，可得 $a_1+a_m=0$，由 $a_7>0$，$a_8<0$，可得 $a_1+a_m=a_7+a_8=0$，即有 $S_{13}>0$，$S_{14}=0$，$S_{15}<0$，

则 $k=13$ 或 14 时，T_k 取得最大值，故 D 正确．

故选：BD．

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13.（5 分）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其前 n 项和为 S_n，前三项和为 13，前三项积为 27，则 S_5＝<u>121 或$\frac{121}{9}$</u>.

【答案】121 或$\frac{121}{9}$.

【分析】根据已知条件，结合等比数列的性质，求出首项与公比，再结合等比数列的前 n 项和公式，即可求解.

【解答】解：∵前三项积为 27，

∴ $a_1a_2a_3=a_2^3=27$，解得 $a_2=3$，

∵前三项和为 13，

∴ $S_3=\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q=\frac{3}{q}+3+3q=13$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=9\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$，

∴ $S_5=\frac{1-3^5}{1-3}=121$或$S_5=\frac{9(1-\frac{1}{3^5})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{121}{9}$.

故答案为：121 或$\frac{121}{9}$.

14.（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_n=2n^2+\lambda n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$\{a_n\}$是递增数列，则实数 λ 的取值范围是 <u>$\{\lambda|\lambda>-6\}$</u> .

【答案】$\{\lambda|\lambda>-6\}$.

【分析】根据题意$\{a_n\}$是递增数列可知 $a_{n+1}>a_n$，进而可得关于 λ 的不等式，解可得答案.

【解答】解：根据题意，数列$\{a_n\}$满足：$a_n=2n^2+\lambda n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$，

若$\{a_n\}$是递增数列，且对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2n^2+\lambda n+3$成立，

∴对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}>a_n$，即 $2(n+1)^2+\lambda(n+1)+3>2n^2+\lambda n+3$，

变形可得：$\lambda>-4n-2$ 恒成立，

又由 $n\geqslant1$ 且 $n\in\mathbf{Z}$，则 $-4n-2\leqslant-6$，

所以 $\lambda>-6$，即实数 λ 的取值范围是$\{\lambda|\lambda>-6\}$.

故答案为：$\{\lambda|\lambda>-6\}$.

15.（5 分）数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则数列$\{a_n\}$的前 6 项和 S_6＝<u>120</u>.

【答案】见试题解答内容

【分析】$a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，利用$\{a_n+1\}$是等比数列可得 a_n 的通项公式，从而可得 S_6.

【解答】解：$\because a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，又 $a_1+1=2$，

$\therefore \frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，$\therefore$数列$\{a_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，$\therefore a_n=2^n-1$，

$S_6=2\times\frac{1-2^6}{1-2}-6=120$，

故答案为 120.

16.（5 分）已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q（$q>0$），前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=q$，$a_5=a_1+S_4$．若对一切正整数 n，不等式 $13-2n-2m+ma_n>mS_n$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 ___$(-\infty,-\frac{3}{256})$___.

【答案】$(-\infty,-\frac{3}{256})$.

【分析】先设公比 $q=1$，代入题干不等式判断出 $q=1$ 不符合题意，当 $q\neq1$ 时，根据等比数列的通项公式与求和公式列出关于首项 a_1 与公比 q 的方程，解出 a_1 与 q 的值，即可计算出 a_n 和 S_n 的表达式，再代入不等式 $13-2n-2m+ma_n>mS_n$ 进行化简，运用参量变量分离法可得 $m<\frac{13-2n}{2^n}$，设 $f(n)=\frac{13-2n}{2^n}$，运用作差法分析判断出 $f(n)$ 的单调性，进一步推导出 $f(n)$ 的最小值，最后根据不等式的性质即可推导出实数 m 的取值范围.

【解答】解：由题意，若 $q=1$，则 $a_1=q=1$，

即 $a_n=1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

此时 $a_5\neq a_1+S_4$，与题意不符，故 $q\neq1$，

当 $q\neq1$ 时，由 $a_5=a_1+S_4$，

可得 $a_1q^4=a_1+\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$，

即 $a_1(1-q^4)+\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=0$，

整理，得 $a_1(1-q^4)(1+\frac{1}{1-q})=0$，

解得 $q=a_1=2$，

$\therefore a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$S_n=\frac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

由题意，对一切正整数 n，不等式 $13-2n-2m+ma_n>mS_n$ 恒成立，

即对一切正整数 n，不等式 $13-2n-2m+m\cdot 2^n>2m(2^n-1)$ 恒成立，

化简整理，可得 $13-2n>m\cdot 2^n$，

分离参数 m，可得 $m<\frac{13-2n}{2^n}$，

设 $f(n)=\frac{13-2n}{2^n}$，则 $f(n+1)=\frac{11-2n}{2^{n+1}}$，

∵$f(n+1)-f(n)=\frac{11-2n}{2^{n+1}}-\frac{13-2n}{2^n}=\frac{2n-15}{2^{n+1}}$，

令 $f(n+1)-f(n)<0$，即 $\frac{2n-15}{2^{n+1}}<0$，解得 $1\leqslant n\leqslant 7$，

令 $f(n+1)-f(n)>0$，即 $\frac{2n-15}{2^{n+1}}>0$，解得 $n\geqslant 8$，

∴$f(1)>f(2)>\cdots>f(7)>f(8)<f(9)<f(10)<\cdots$，

∴$f(n)$ 的最小值为 $f(8)=-\frac{3}{256}$，

∴$m<f(n)_{min}=f(8)=-\frac{3}{256}$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{3}{256})$.

故答案为：$(-\infty, -\frac{3}{256})$.

四、解答题（第 17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，共 70 分）

17.（10 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=4$，$a_2=8$ 且 $S_{n+2}-2S_{n+1}+S_n=4$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$是等差数列；

（2）若 a_m，S_m，$14a_{m+1}$ 成等比数列，求正整数 m.

【答案】（1）证明详见解析．（2）7.

【分析】（1）根据已知条件可得，$S_{n+2}-S_{n+1}-(S_{n+1}-S_n)=4$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=4$，再结合 a_1，a_2 的值，即可求解．

（2）根据（1）的结果，求出 a_n，S_n 的通项公式，再结合等比中项的性质，即可求解．

【解答】证明：（1）∵$S_{n+2}-2S_{n+1}+S_n=4$，

∴$S_{n+2}-S_{n+1}-(S_{n+1}-S_n)=4$，

∴$a_{n+2}-a_{n+1}=4$，

∴数列$\{a_n\}$为从 a_2 开始，公差为 4 的等差数列，

∵$a_1=4$，$a_2=8$，

∴$a_2-a_1=4$，

∴数列$\{a_n\}$为首项为 4，公差为 4 的等差数列．

解：（2）由（1）可得，数列$\{a_n\}$为首项为 4，公差为 4 的等差数列，即 $a_n=4+(n-1)\times4=4n$，

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=2n^2+2n$，

∴$a_m=4m$，$S_m=2m^2+2m$，$14a_{m+1}=14\times4(m+1)=56(m+1)$，

∵a_m，S_m，$14a_{m+1}$ 成等比数列，

∴$S_m^2=a_m\cdot14a_{m+1}$，即$(2m^2+2m)^2=4m\cdot56(m+1)$，解得 $m=7$ 或 $m=-8$（舍去），

故正整数 m 的值为 7．

18．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=5$，a_2 为整数，且 $S_n\leqslant S_3(n\in N^*)$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

【答案】（1）$a_n=-2n+7$．

（2）$T_n=\begin{cases}-n^2+6n & (n\leqslant3)\\ n^2-6n+18 & (n\geqslant4)\end{cases}$．

【分析】（1）利用已知条件推出 $a_3\geqslant0$，$a_4\leqslant0$，求出公差的范围，然后求解 d，即可求解数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）推出 $b_n=|a_n|=\begin{cases}a_n(n\leqslant3)\\-a_n(n\geqslant4)\end{cases}$，然后求解当 $n\leqslant3$ 时，当 $n\geqslant4$ 时，数列的和即可．

【解答】解：（1）由于 $a_1=5$，a_2 为整数，所以等差数列$\{a_n\}$的公差 d 为整数，

又 $S_n\leqslant S_3$，所以 $a_3\geqslant0$，$a_4\leqslant0$，即：$\begin{cases}5+2d\geqslant0\\5+3d\leqslant0\end{cases}$，解得 $-\frac{5}{2}\leqslant d\leqslant-\frac{5}{3}$，

所以 $d=-2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-2n+7$．

（2）由 $a_n=-2n+7\geqslant0$ 得：$n\leqslant\frac{7}{2}$，所以 $b_n=|a_n|=\begin{cases}a_n(n\leqslant3)\\-a_n(n\geqslant4)\end{cases}$，

当 $n\leqslant3$ 时，$T_n=\frac{n(5+7-2n)}{2}=-n^2+6n$；

当 $n\geqslant4$ 时，$T_n=a_1+a_2+a_3-(a_4+a_5+\cdots+a_n)=S_3-(S_n-S_3)=2S_3-S_n$，

所以 $T_n=18-(-n^2+6n)=n^2-6n+18$；

所以 $T_n=\begin{cases}-n^2+6n & (n\leqslant3)\\ n^2-6n+18 & (n\geqslant4)\end{cases}$．

19.（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知$\frac{2S_n}{n}-a_n=1(n\in N_+)$，且 $a_2=3$.

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

【答案】（1）证明见解析，$a_n=2n-1$；

（2）$T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

【分析】（1）对已知式子化简可得 $2S_n-na_n=n$，则 $2S_{n+1}-(n+1)a_{n+1}=n+1$，两式相减化简可得 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，从而可得$\{a_n\}$是等差数列，进而可求出其通项公式；

（2）由（1）得$b_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$，然后利用错位相减法可求得 T_n.

【解答】（1）证明：由$\frac{2S_n}{n}-a_n=1(n\in N_+)$，

得 $2S_n-na_n=n$，

$\therefore 2S_{n+1}-(n+1)a_{n+1}=n+1$，

两式相减得 $na_n-(n-1)a_{n+1}=1$，

即（$n+1$）$a_{n+1}-na_{n+2}=1$，

两式相减得 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，

∴数列$\{a_n\}$是等差数列，

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1+1$，

$\therefore a_1=1$，

又 $a_2=3$，

$\therefore d=3-1=2$，

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$；

（2）解：由（1）可得$b_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，

两式相减得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\frac{1}{4}\times[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$．

20．（12 分）若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n^2$，则称数列$\{a_n\}$为"平方递推数列"．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，点（a_n，a_{n+1}）在函数 $f(x)=x^2+4x+2$ 的图象上，其中 n 为正整数．

（1）证明：数列 $\{a_n+2\}$是"平方递推数列"，且数列 $\{lg(a_n+2)\}$为等比数列；

（2）设 $b_n=lg(a_n+2)$，$c_n=2n+7$，$d_n=\begin{cases}b_n, & n为奇数\\ c_n, & n为偶数\end{cases}$，求数列$\{d_n\}$的前 10 项和 S_{10}．

【答案】（1）证明见解析；

（2）436．

【分析】（1）由数列递推式可得 $a_{n+1}+2=(a_n+2)^2$，两边同时取对数得 $lg(a_{n+1}+2)=2lg(a_n+2)$，得证；

（2）结合等差数列及等比数列的求和公式求解即可．

【解答】（1）证明：因为点 （a_n，a_{n+1}）在函数 $f(x)=x^2+4x+2$ 的图象上，

所以 $a_{n+1}=a_n^2+4a_n+2$，

即 $a_{n+1}+2=(a_n+2)^2$，

即数列$\{a_n+2\}$是"平方递推数列"，

又 $a_1=8$，

则 $lg(a_1+2)=lg(8+2)=1>0$，

对 $a_{n+1}+2=(a_x+2)^2$ 两边同时取对数得 $lg(a_{n+1}+2)=2lg(a_n+2)$，

∴数列$\{lg(a_n+2)\}$是以 1 为首项、2 为公比的等比数列；

（2）解：由（1）知 $b_n=lg(a_n+2)=2^{n-1}$，

所以 $S_{10}=(b_1+b_3+b_5+b_7+b_9)+(c_2+c_4+c_6+c_8+c_{10})$

$=\frac{1-4^5}{1-4}+\frac{(2\times2+7+2\times10+7)\times5}{2}$

$=\frac{1}{3}\times(1024-1)+95$

$=436$.

21.（12 分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$.

（1）证明数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$是等差数列，并求通项公式 a_n；

（2）若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdots a_n^2\leqslant k\cdot 2^n$成立，求 k 的取值范围.

【答案】（1）证明见解答，$a_n=\frac{1}{n}+1$；

（2）$[\frac{9}{4}，+\infty)$.

【分析】（1）根据已知可推出$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=1$，又$\frac{1}{a_1-1}=1$，即可得到$\frac{1}{a_n-1}=n$，进而求出通项公式；

（2）经化简可得，$k\geqslant\frac{(n+1)^2}{2^n}$．令$b_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}$，根据$\begin{cases}b_r\geqslant b_{r-1}\\b_r\geqslant b_{r+1}\end{cases}$求出 $r=2$ 时，b_n 最大，即可得出 k 的取值范围.

【解答】（1）证明：由已知可得 $a_n\neq1$，$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_n}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n-1}{a_n-1}=1$，

又 $a_1=2$，所以$\frac{1}{a_1-1}=1$，所以数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列.

所以$\frac{1}{a_n-1}=1+(n-1)\times1=n$，所以$a_n-1=\frac{1}{n}$，所以$a_n=\frac{1}{n}+1$.

（2）解：由（1）知，$a_n=\frac{1}{n}+1=\frac{n+1}{n}$.

所以$a_1a_2a_3\cdots a_n=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}=n+1$，所以$a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdots a_n^2=(n+1)^2$.

则由$a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdots a_n^2\leqslant k\cdot 2^n$可得，$k\geqslant\frac{(n+1)^2}{2^n}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$都成立.

令$b_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}$，假设数列$\{b_n\}$中第 r（$r\in\mathbf{N}^*$）项最大，

当 $r\geqslant2$ 时则，有$\begin{cases}b_r\geqslant b_{r-1}\\b_r\geqslant b_{r+1}\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{(r+1)^2}{2^r}\geqslant\frac{r^2}{2^{r-1}}\\\frac{(r+1)^2}{2^r}\geqslant\frac{(r+2)^2}{2^{r+1}}\end{cases}$，整理可得$\begin{cases}r^2-2r-1\leqslant0\\r^2\geqslant2\end{cases}$，

解得$\sqrt{2}\leqslant r\leqslant\sqrt{2}+1$，所以$2\leqslant r\leqslant\sqrt{2}+1$.

因为 $r\in\mathbf{N}^*$，所以 $r=2$，$b_2=\frac{(2+1)^2}{2^2}=\frac{9}{4}$.

又 $b_1=2$，所以数列$\{b_n\}$中第 2 项最大，即$b_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}\leqslant\frac{9}{4}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$都成立.

所以由$k\geqslant\frac{(n+1)^2}{2^n}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都成立，可得$k\geqslant\frac{9}{4}$，即实数 k 的取值范围是$[\frac{9}{4}$，$+\infty)$.

22.（12 分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，首项为 a_1，且$\frac{1}{2}$、a_n、S_n成等差数列.

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等比数列，并写出通项公式；

（2）若 $b_n=-2\log_2a_n$，设$c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n；

（3）若不等式$\frac{3n-2}{8n}T_n\leqslant m^2-m-1$对一切正整数 n 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$a_n=2^{n-2}$;

（2）$T_n=\frac{8n}{2^n}$;

（3）$(-\infty,\ -1]\cup[2,+\infty)$.

【分析】（1）根据已知条件，利用 a_n 与 S_n 的关系，得出递推关系式，证明数列为等比数列，再求出数列的通项公式.

（2）利用（1）的结论，根据数列通项特征，利用错位相减法求出数列的和.

（3）利用（2）的结论，找出$\frac{3n-2}{8n}T_n$最大值利用恒成立问题求出参数 m 的范围.

【解答】解：（1）各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，首项为 a_1，且$\frac{1}{2}$，a_n，S_n成等差数列.

则$\frac{1}{2}+S_n=2a_n$①，

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}+S_1=2a_1$，解得：$a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{1}{2}+S_{n-1}=2a_{n-1}$②，

①－②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，整理得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，

所以数列$\{a_n\}$是以$a_1=\frac{1}{2}$为首项，2 为公比的等比数列.

所以$a_n=\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}=2^{n-2}$.

（2）由于 $a_n=2^{n-2}$，所以 $b_n=-2\log_2 a_n=4-2n$，则 $c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{4-2n}{2^{n-2}}=\frac{16-8n}{2^n}$，

所以 $T_n=\frac{8}{2^1}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{16-8n}{2^n}$①，$\frac{1}{2}T_n=\frac{8}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\cdots+\frac{16-8n}{2^{n+1}}$②，

①﹣②得：$\frac{1}{2}T_n=4-8\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{16-8n}{2^{n+1}}=4-8\cdot\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{16-8n}{2^{n+1}}=\frac{4n}{2^n}$，

解得 $T_n=\frac{8n}{2^n}$.

（3）设 $d_n=\frac{3n-2}{8n}\cdot T_n=\frac{3n-2}{8n}\cdot\frac{8n}{2^n}=\frac{3n-2}{2^n}$，

则 $d_{n+1}-d_n=\frac{3(n+1)-2}{2^{n+1}}-\frac{3n-2}{2^n}=\frac{5-3n}{2^{n+1}}$，

当 $n=1$，2，3 时，$d_1=\frac{1}{2}$，$d_2=1$，$d_3=\frac{7}{8}$，

当 $n>1$ 时，$\frac{5-3n}{2^{n+1}}<0$，即 $d_{n+1}<d_n$，

故 d_n 的最大值为 1，

不等式 $\frac{3n-2}{8n}T_n\leqslant m^2-m-1$ 对一切正整数 n 恒成立，只需 $m^2-m-1\geqslant 1$ 即可，

故 $m^2-m-2\geqslant 0$，解得 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -1$，

所以 m 的取值范围是（$-\infty$，$-1]\cup[2$，$+\infty$）.