2024年江苏省无锡市锡山区天一实验学校中考数学一模试卷

一.选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分.）

1.（3分）2024的倒数是（　　）

A．2024　　B．－2024　　C．|2024|　　D．$\frac{1}{2024}$

2.（3分）下列运算正确的是（　　）

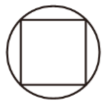
A．$(x^3)^2=x^5$　　B．$x^2+x^3=x^5$

C．$(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$　　D．$(a-b)(-a+b)=a^2-b^2$

3.（3分）陈芋汐在2023年杭州亚运会女子十米跳台项目中获得了亚军，其中第五轮跳水的7个成绩分别是（单位：分）：9.0，9.0，8.5，9.0，9.5，9.0，8.5．这组数据的众数和中位数分别是（　　）

A．9.0，8.5　　B．9.0，9.0　　C．8.5，8.75　　D．9.0，9.25

4.（3分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

A．　　B．　　C．　　D．

5.（3分）若圆锥的底面半径为3，母线长为5，则这个圆锥的侧面积为（　　）

A．6π　　B．8π　　C．15π　　D．30π

6.（3分）下列命题中，真命题是（　　）

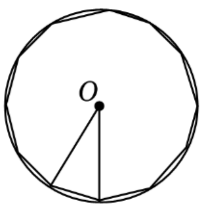
A．四边相等的四边形是正方形

B．对角线相等的菱形是正方形

C．正方形的两条对角线相等，但不互相垂直平分

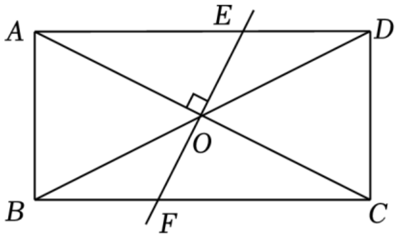
D．矩形、菱形、正方形都具有“对角线相等”的性质

7.（3分）魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”，用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积．如图所示的圆的内接正十二边形，若该圆的半径为1，则这个圆的内接正十二边形的面积为（　　）



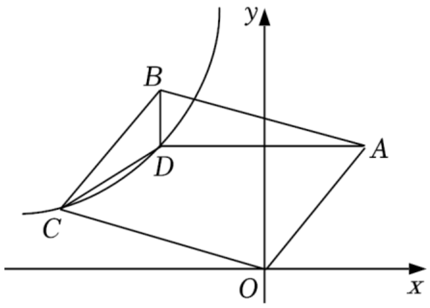
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8.（3分）如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，过点O作$EF\perp AC$交AD于点E，交BC于点F．已知$AB=4$，$\triangle AOE$的面积为5，则DE的长为（　　）



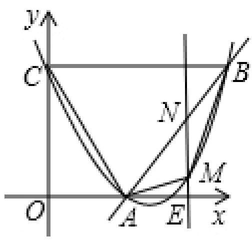
A．2　　　　B．$\sqrt{5}$　　　　C．$\sqrt{6}$　　　　D．3

9．（3 分）如图，点 D 是▱$OABC$ 内一点，AD 与 x 轴平行，BD 与 y 轴平行，$BD=\sqrt{3}$，$\angle BDC=120°$，$S_{\triangle BCD}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象经过 C，D 两点，则 k 的值是（　　）



A．$-6\sqrt{3}$　　　　B．-6　　　　C．$-12\sqrt{3}$　　　　D．-12

10．（3 分）如图，抛物线 $y=ax^2-\frac{10}{3}x+4$ 与直线 $y=\frac{4}{3}x+b$ 经过点 A（2，0），且相交于另一点 B；抛物线与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于另一点 E；点 N 在线段 AB 上，过点 N 的直线交抛物线于点 M，且 $MN\parallel y$ 轴，连接 AM、BM、BC、AC；当点 N 在线段 AB 上移动时（不与 A、B 重合），下列结论中正确的是（　　）



A．$MN+BN<AB$

B．$\angle BAC=\angle BAE$

C．$\angle ACB-\angle ANM=\frac{1}{2}\angle ABC$

D．四边形 $ACBM$ 的最大面积为 13

二.填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11．（3 分）分解因式：$2m^2-8=$__________________．

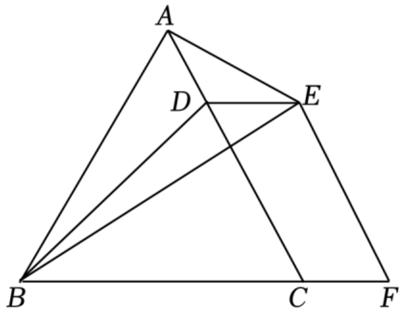
12．（3 分）若代数式 $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是 __________．

13．（3 分）清代•袁枚的一首诗《苔》中的诗句：“白日不到处，青春恰自来．苔花如米小，也学牡丹开．”

若苔花的花粉直径约为 0.0000084 米，则数据 0.0000084 用科学记数法表示为 ________.

14．（3 分）南宋数学家杨辉在他的著作《杨辉算法》中提出这样一个数学问题：“直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何”．意思是：一块矩形地的面积为 864 平方步，已知长与宽的和为 60 步，问长比宽多几步？设矩形的长为 x 步，则可列出方程为 ________.

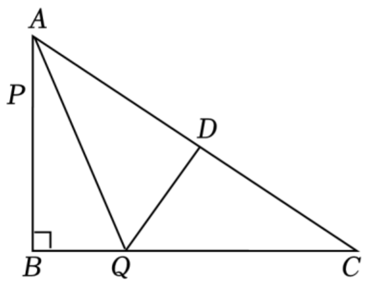
15．（3 分）如图，在△ABC 中，点 D 在线段 AC 上，点 F 在线段 BC 的延长线上，若 BF＝5CF，四边形 $CDEF$ 是平行四边形，且△BDE 与△ADE 的面积和为 6，则△ABC 的面积为 ________.



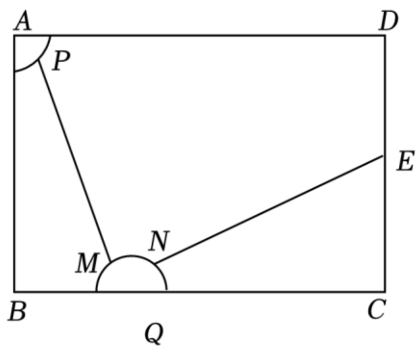
16．（3 分）规定：若 $\vec{a}$＝（x_1，y_1），$\vec{b}$＝（x_2，y_2），则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$＝$x_1y_2+x_2y_1$．例如 $\vec{a}$＝（1，3），$\vec{b}$＝（2，4），则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$＝1×4+3×2＝10．已知 $\vec{a}$＝（x+1，x－2），$\vec{b}$＝（x－3，4），且 1≤x≤2，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值是 ________.

17．（3 分）（1）如图①，Rt△ABC 中，∠ABC＝90°，AB＝6，BC＝8，点 D 是边 AC 的中点．以点 A 为圆心，2 为半径在△ABC 内部画弧，若点 P 是上述弧上的动点，点 Q 是边 BC 上的动点，PQ+QD 的最小值是 ________；

（2）如图②，矩形 $ABCD$ 中 $AB=200\sqrt{3}$，BC＝300．E 为 CD 中点，要在以点 A 为圆心，10 为半径的圆弧上选一处点 P，边 BC 上选一处点 Q，M、N 是以 Q 为圆心，10 为半径的半圆的三等分点处，PM+NE 的最小值是 ________.



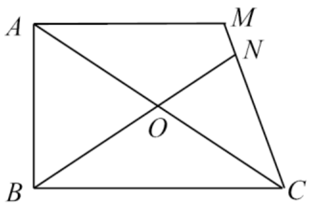
（图①）



（图②）

18．（3 分）如图，在△ABC 中，∠ABC＝90°，以 AC 为边在△ABC 外作等腰△AMC，满足 MA＝MC，AM∥BC，O 是边 AC 的中点，连结 BO，作射线 BO 交折线段 A－M－C 于点 N，若 MN＝2，ON＝3，

则 AM 的长为 ______________________.



三.解答题（本大题共 10 小题，共 96 分）

19.（8 分）（1）计算：$(-1)^3+\sqrt{2}\tan45°-\sqrt{8}$；

（2）化简：$\frac{a^2-4}{a}\div(1-\frac{2}{a})$.

20.（8 分）解方程与不等式组：

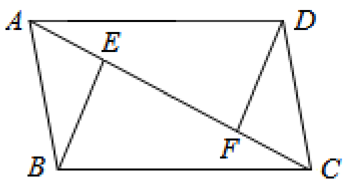
（1）$x^2+4x-1=0$；

（2）$\begin{cases}\frac{x-3}{2}+3\geqslant x+1\\1-3(x-1)<8-x\end{cases}$.

21.（10 分）如图，已知 $AB=DC$，$AB\parallel CD$，E、F 是 AC 上两点，且 $AF=CE$.

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$；

（2）若 $\angle BCE=30°$，$\angle CBE=70°$，求 $\angle CFD$ 的度数.



22.（10 分）甲、乙两人做游戏，他们在一只不透明的袋子中装了五个小球，分别标有数字：1，1，2，2，3，这些小球除编号外都相同.

（1）搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，则这个小球的编号是偶数的概率为 ______________________；

（2）搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，记录小球的编号后放回、搅匀，乙再从中任意摸出一个小球．若摸出两个小球编号之和为偶数甲获胜；否则，乙获胜．请你用画树状图或列表的方法说明谁获胜的概率大.

23.（10 分）劳动教育是新时代党对教育的新要求，某校为了解学生参加家务劳动的情况，随机抽取了部分学生在某个星期日做家务的时间 t（单位：h）作为样本，将收集的数据整理后分为 A，B，C，D，E 五个组别，其中 A 组的数据分别为：0.5，0.4，0.4，0.4，0.3，绘制成如下不完整的统计图表.

各组劳动时间的频数分布表

组别	时间 t/h	频数

A	$0<t\leqslant 0.5$	5
B	$0.5<t\leqslant 1$	*a*
C	$1<t\leqslant 1.5$	20
D	$1.5<t\leqslant 2$	15
E	$t>2$	8

请根据以上信息解答下列问题.

（1）本次调查的样本容量为 ________，频数分布表中的 a 的值为 ________；

（2）A 组数据的众数为 ________h，B 组所在扇形的圆心角的大小为 ________；

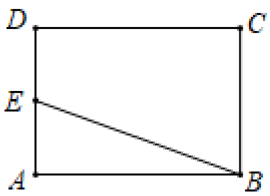
（3）若该校有 1200 名学生，估计该校学生劳动时间超过 $1h$ 的人数.

各组劳动时间的扇形统计图

24.（10 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，E 为 AD 的中点.

（1）在 CD 边上求作一点 F，使得 $\angle CFB=2\angle ABE$；

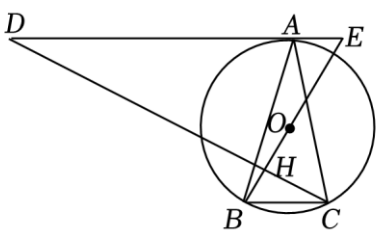
（2）在（1）中，若 $AB=9$，$BC=6$，求 BF 的长.



25.（10 分）$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$AB=AC$，过点 A 作 $AE\parallel BC$，交射线 BO 于点 E，过点 C 作 $CH\perp BE$ 于点 H，交直线 AE 于点 D.

（1）求证：DE 是 $\odot O$ 的切线.

（2）已知 $BC=4\sqrt{5}$，$\tan\angle D=\frac{1}{2}$，求 OE 的长度.



26.（10 分）图 1 是一种儿童可折叠滑板车，该滑板车完全展开后示意图如图 2 所示，由车架 $AB-CE-$

EF 和两个大小相同的车轮组成车轮半径为 8cm，已知 BC＝58cm，CD＝30cm，DE＝12cm，EF＝68cm，$\cos\angle ACD=\frac{4}{5}$，当 A，E，F 在同一水平高度上时，$\angle CEF$＝135°．

（1）求 AC 的长；

（2）为方便存放，将车架前部分绕着点 D 旋转至 $AB\parallel EF$，按如图 3 所示方式放入收纳箱，试问该滑板车折叠后能否放进长 a＝100cm 的收纳箱（收纳箱的宽度和高度足够大），请说明理由（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.4$）．

图 1

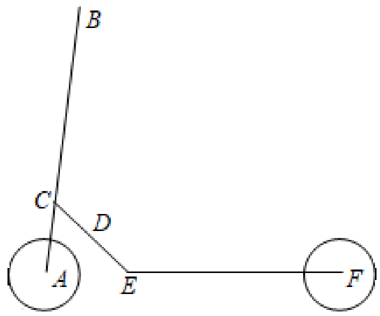


图 2

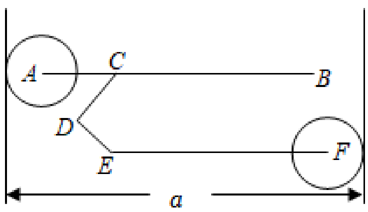


图 3

27.（10 分）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$（b、c 为常数）的对称轴为直线 x＝1，与 y 轴交点坐标为（0，3）．

（1）求此抛物线对应的函数表达式；

（2）点 A、点 B 均在这个抛物线上（点 A 在点 B 的左侧），点 A 的横坐标为 m，点 B 的横坐标为 $4-m$．将此抛物线上 A、B 两点之间的部分（含 A、B 两点）记为图象 G．

①当点 A 在 x 轴上方，图象 G 的最高与最低点的纵坐标差为 6 时，求 m 的值；

②设点 D（1，n），点 E（1，$1-n$），将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 后得到线段 DF，连结 EF，当△DEF（不含内部）和二次函数在 $x\geq0$ 范围上的图象有且仅有一个公共点时，求 n 的取值范围．

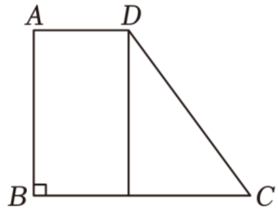
28.（10 分）如图 1，四边形 $ABCD$ 中 $AD\parallel BC$，$\angle B$＝90°，$\tan C=\frac{4}{3}$，CD＝10．

（1）线段 AB＝_______；

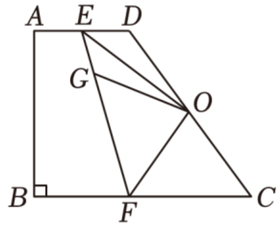
（2）如图 2，点 O 是 CD 的中点，E、F 分别是 AD、BC 上的点，将△DEO 沿着 EO 翻折得△GEO，将△COF 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合．

①当点 E 从点 D 运动到点 A 时，点 G 走过的路径长为 $\frac{5}{2}\pi$，求 AD 的长；

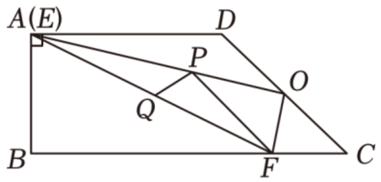
②在①的条件下，若 E 与 A 重合（如图 3），Q 为 EF 中点，P 为 OE 上一动点，将△FPQ 沿 PQ 翻折得到△$F'PQ$，若△$F'PQ$ 与△APF 的重合部分面积是△APF 面积的 $\frac{1}{4}$，求 AP 的长．



（图1）



（图2）



（图3）

2024年江苏省无锡市锡山区天一实验学校中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分.）

1.（3分）2024的倒数是（　　）

A．2024　　B．﹣2024　　C．|2024|　　D．$\frac{1}{2024}$

【分析】乘积是1的两数互为倒数，据此解答即可．

【解答】解：2024的倒数是$\frac{1}{2024}$，

故选：D．

【点评】本题考查了倒数，掌握倒数的定义是解答本题的关键．

2.（3分）下列运算正确的是（　　）

A．$(x^3)^2=x^5$　　B．$x^2+x^3=x^5$

C．$(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$　　D．$(a-b)(-a+b)=a^2-b^2$

【分析】利用平方差公式，完全平方公式，幂的乘方与积的乘方以及合并同类项法则判断即可．

【解答】解：A、原式$=x^6$，不符合题意；

B、原式不能合并，不符合题意；

C、原式$=-8a^6b^3$，符合题意；

D、原式$=-a^2+2ab-b^2$，不符合题意，

故选：C．

【点评】此题考查了平方差公式，合并同类项，以及幂的乘方与积的乘方，熟练掌握公式及法则是解本题的关键．

3.（3分）陈芋汐在2023年杭州亚运会女子十米跳台项目中获得了亚军，其中第五轮跳水的7个成绩分别是（单位：分）：9.0，9.0，8.5，9.0，9.5，9.0，8.5．这组数据的众数和中位数分别是（　　）

A．9.0，8.5　　B．9.0，9.0　　C．8.5，8.75　　D．9.0，9.25

【分析】根据中位数、众数的计算方法分别求解即可得到答案．

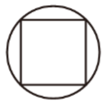
【解答】解：按照从小到大的顺序排列为8.5，8.5，9.0，9.0，9.0，9.0，9.5，由中位数的求解方法得到这组数据的中位数为9.0；

这组数据中众数为9.0；

故选：B．

【点评】本题考查中位数、众数，熟练掌握中位数、众数的计算方法是解决问题的关键．

4．（3 分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

A．　B．　C．　D．

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义解答即可．

【解答】解：*A*．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C．该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

D．该图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意．

故选：*D*．

【点评】本题考查了轴对称图形和中心对称图形，掌握相关定义是解答本题的关键．把一个图形绕某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．

5．（3 分）若圆锥的底面半径为 3，母线长为 5，则这个圆锥的侧面积为（　　）

A．6π　　B．8π　　C．15π　　D．30π

【分析】圆锥的侧面积＝底面周长×母线长÷2，把相应数值代入即可求解．

【解答】解：圆锥的侧面积＝2π×3×5÷2＝15π．

故选：*C*．

【点评】本题考查了圆锥的计算，解题的关键是弄清圆锥的侧面积的计算方法，特别是圆锥的底面周长等于圆锥的侧面扇形的弧长．

6．（3 分）下列命题中，真命题是（　　）

A．四边相等的四边形是正方形

B．对角线相等的菱形是正方形

C．正方形的两条对角线相等，但不互相垂直平分

D．矩形、菱形、正方形都具有“对角线相等”的性质

【分析】分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而利用排除法得出答案．

【解答】解：*A*、可判断为菱形，故本选项错误，

B、对角线相等的菱形是正方形，故本选项正确，

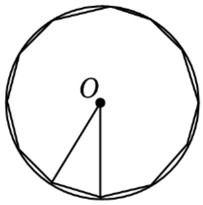
C、正方形的两条对角线相等，且互相垂直平分，故本选项错误，

D、菱形的对角线不一定相等，故本选项错误，

故选：B.

【点评】本题主要考查命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理．

7．（3 分）魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”，用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积．如图所示的圆的内接正十二边形，若该圆的半径为 1，则这个圆的内接正十二边形的面积为（　　）



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【分析】根据题意，可以求得$\angle AOB$的度数，然后作 $AB\perp OC$ 于点 B 和 30°角所对的直角边等于斜边的一半，可以求得 AB 的长，然后即可得到$\triangle OAC$ 的面积，再根据圆的内接正十二边形的面积等于 12 个$\triangle OAC$ 的面积计算即可．

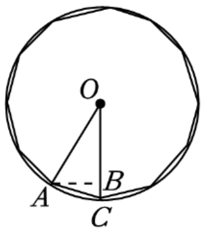
【解答】解：作 $AB\perp OC$ 于点 B，如图，

由题意可得，$\angle AOB=360°\div12=30°$，$OA=1$，

$\therefore AB=\frac{1}{2}$，

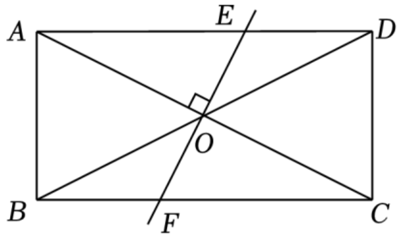
$\therefore$这个圆的内接正十二边形的面积为：$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times12=3$，

故选：C.



【点评】本题考查正多边形和圆，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

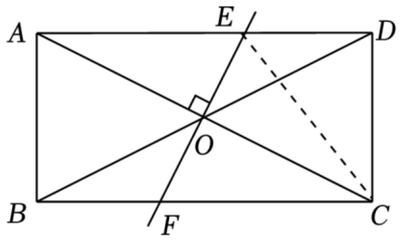
8．（3 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，过点 O 作 $EF\perp AC$ 交 AD 于点 E，交 BC 于点 F．已知 $AB=4$，$\triangle AOE$ 的面积为 5，则 DE 的长为（　　）



A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．3

【分析】连接 CE，由题意可得 OE 为对角线 BD 的垂直平分线，可得 $AE=CE$，$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COE}=5$，由三角形的面积则可求得 DE 的长，得出 AE 的长，然后由勾股定理求得答案．

【解答】解：如图，连接 CE，



由题意可得，OE 为对角线 AC 的垂直平分线，

∴$AE=CE$，$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}=5$，

∴$S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle COE}=10$．

∴$\frac{1}{2}AE\cdot CD=10$，

∵$CD=4$，

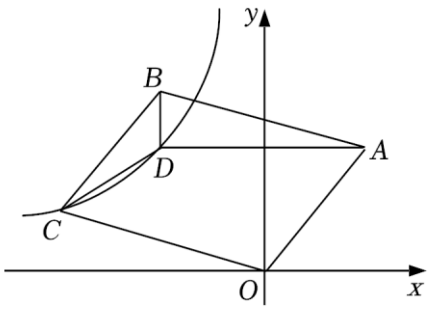
∴$AE=EC=5$，

在 Rt△CDE 中，由勾股定理得：$DE=\sqrt{5^2-4^2}=3$．

故选：D．

【点评】本题考查了矩形的性质、线段垂直平分线的性质、勾股定理以及三角形的面积问题．此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用．

9．（3 分）如图，点 D 是▱$OABC$ 内一点，AD 与 x 轴平行，BD 与 y 轴平行，$BD=\sqrt{3}$，$\angle BDC=120°$，$S_{\triangle BCD}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象经过 C，D 两点，则 k 的值是（　　）



A．$-6\sqrt{3}$　　B．-6　　C．$-12\sqrt{3}$　　D．-12

【分析】过点 C 作 $CE\perp y$ 轴，延长 BD 交 CE 于点 F，易证$\triangle COE\cong\triangle ABD$，求得 $OE=\sqrt{3}$，根据 $S_{\triangle BCD}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$，求得 $CF=9$，得到点 D 的纵坐标为 $4\sqrt{3}$，设 C（m，$\sqrt{3}$），则 D（$m+9$，$4\sqrt{3}$），由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象经过 C，D 两点，从而求出 m，进而可得 k 的值．

【解答】解：过点 C 作 $CE\perp y$ 轴，延长 BD 交 CE 于点 F，

∵四边形 $OABC$ 为平行四边形，

∴$AB\parallel OC$，$AB=OC$，

∴$\angle COE=\angle 1$，

∵BD 与 y 轴平行，

∴$\angle 1=\angle ABD$，$\angle ADB=90°$，

∴$\angle COE=\angle ABD$，

在$\triangle COE$ 和$\triangle ABD$ 中，

$$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEO\\ \angle COE=\angle ABD,\\ OC=AB\end{cases}$$

∴$\triangle COE\cong\triangle ABD$（$AAS$），

∴$OE=BD=\sqrt{3}$，

∵$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{9}{2}\sqrt{3}$，

∴$CF=9$，

∵$\angle BDC=120°$，

∴$\angle CDF=60°$，

∴$DF=3\sqrt{3}$，

点 D 的纵坐标为 $4\sqrt{3}$，

设 C（m，$\sqrt{3}$），则 D（$m+9$，$4\sqrt{3}$），

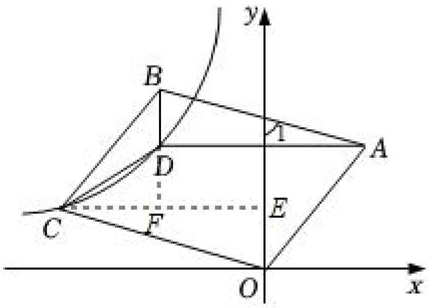
∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（x<0）的图象经过 C，D 两点，

∴$k=\sqrt{3}m=4\sqrt{3}$（m+9），

∴m=﹣12，

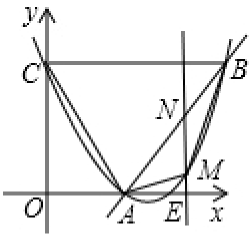
∴k=﹣12$\sqrt{3}$，

故选：C.



【点评】本题主要考查反比例函数，掌握平行四边形的性质和反比例函数图象的坐标特征是解题的关键.

10．（3 分）如图，抛物线 $y=ax^2-\frac{10}{3}x+4$ 与直线 $y=\frac{4}{3}x+b$ 经过点 A（2，0），且相交于另一点 B；抛物线与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于另一点 E；点 N 在线段 AB 上，过点 N 的直线交抛物线于点 M，且 MN∥y 轴，连接 AM、BM、BC、AC；当点 N 在线段 AB 上移动时（不与 A、B 重合），下列结论中正确的是（　　）



A．$MN+BN<AB$

B．$\angle BAC=\angle BAE$

C．$\angle ACB-\angle ANM=\frac{1}{2}\angle ABC$

D．四边形 $ACBM$ 的最大面积为 13

【分析】（1）当 MN 过对称轴的直线时，解得：$BN=\frac{25}{6}$，而 $MN=\frac{5}{6}$，$BN+MN=5=AB$；

（2）由 BC∥x 轴（B、C 两点 y 坐标相同）推知∠BAE=∠CBA，而△ABC 是等腰三角形，∠CBA≠∠BCA，故∠BAC=∠BAE 错误；

（3）如图，过点 A 作 AD⊥BC、BE⊥AC，由△ABC 是等腰三角形得到：EB 是∠ABC 的平分线，∠$ACB-\angle ANM=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle ABC$；

（4）$S_{\text{四边形}ACBM}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABM}$，其最大值为$\frac{9}{4}$.

【解答】解：将点 A（2，0）代入抛物线 $y=ax^2-\frac{10}{3}x+4$ 与直线 $y=\frac{4}{3}x+b$

解得：$a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{8}{3}$，

设：M 点横坐标为 m，则 M（m，$\frac{2}{3}m^2-\frac{10}{3}m+4$）、$N$（$m$，$\frac{4}{3}m-\frac{8}{3}$），

其它点坐标为 A（2，0）、B（5，4）、C（0，4），

则 $AB=BC=5$，则$\angle CAB=\angle ACB$，

∴$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

A、当 MN 过对称轴的直线时，此时点 M、N 的坐标分别为（$\frac{5}{2}$，$-\frac{1}{6}$）、（$\frac{5}{2}$，$\frac{2}{3}$），

由勾股定理得：$BN=\frac{25}{6}$，而 $MN=\frac{5}{6}$，

$BN+MN=5=AB$，

故本选项错误；

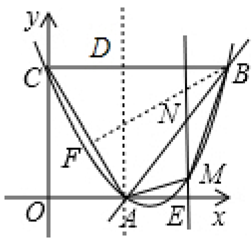
B、∵$BC\parallel x$ 轴（B、C 两点 y 坐标相同），

∴$\angle BAE=\angle CBA$，而$\triangle ABC$ 是等腰三角形不是等边三角形，

$\angle CBA\neq\angle BCA$，

∴$\angle BAC=\angle BAE$ 不成立，

故本选项错误；



C、如图，过点 A 作 $AD\perp BC$、$BF\perp AC$，

∵$\triangle ABC$ 是等腰三角形，

∴BF 是$\angle ABC$ 的平分线，

易证：$\angle CAD=\angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABC$，

而$\angle ACB-\angle ANM=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle ABC$，

故本选项正确；

D、$S_{\text{四边形}ACBM}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABM}$，

$S_{\triangle ABC}=10$，

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}MN\cdot(x_B-x_A)=-m^2+7m-10$，其最大值为$\frac{9}{4}$，

故 $S_{四边形ACBM}$ 的最大值为 $10+\frac{9}{4}=12.25$，

故本选项错误．

故选：C．

【点评】本题考查的是二次函数综合题，涉及到一次函数图象上点的坐标特征，二次函数图象上点的坐标特征，抛物线与 x 轴的交点，以及等腰三角形、平行线等几何知识，是一道难度较大的题目．

二.填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11．（3 分）分解因式：$2m^2-8=$__2（m+2）（m - 2）__．

【分析】先提取公因式 2，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解因式．

【解答】解：$2m^2-8$，

$=2(m^2-4)$，

$=2(m+2)(m-2)$．

故答案为：$2(m+2)(m-2)$．

【点评】本题考查了提公因式法与公式法分解因式，要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解，一般来说，如果可以先提取公因式的要先提取公因式，再考虑运用公式法分解．

12．（3 分）若代数式$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$有意义，则实数 x 的取值范围是__$x>3$__．

【分析】直接利用分式和二次根式有意义的条件解答即可．

【解答】解：∵代数式$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$有意义，

∴$x-3>0$，

解得 $x>3$．

故答案为：$x>3$．

【点评】此题主要考查了分式及二次根式有意义的条件，熟知二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键．

13．（3 分）清代•袁枚的一首诗《苔》中的诗句："白日不到处，青春恰自来．苔花如米小，也学牡丹开．"若苔花的花粉直径约为 0.0000084 米，则数据 0.0000084 用科学记数法表示为__8.4×10^{-6}__．

【分析】绝对值小于 1 的数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a\times10^{-n}$，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数 n 由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定．

【解答】解：0.0000084＝8.4×10^{-6}.

故答案为：8.4×10^{-6}.

【点评】此题主要考查了用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a\times10^{-n}$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

14.（3 分）南宋数学家杨辉在他的著作《杨辉算法》中提出这样一个数学问题："直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何"．意思是：一块矩形地的面积为 864 平方步，已知长与宽的和为 60 步，问长比宽多几步？设矩形的长为 x 步，则可列出方程为 <u>$x(60-x)=864$</u>.

【分析】根据长与宽之间的关系，可得出矩形的宽为（$60-x$）步，利用矩形的面积计算公式，即可列出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【解答】解：∵长与宽的和为 60 步，且矩形的长为 x 步，

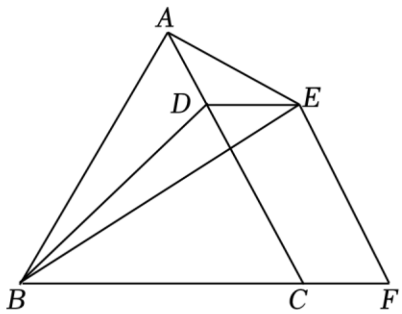
∴矩形的宽为（$60-x$）步.

根据题意得：$x(60-x)=864$.

故答案为：$x(60-x)=864$.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程以及数学常识，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

15.（3 分）如图，在△ABC 中，点 D 在线段 AC 上，点 F 在线段 BC 的延长线上，若 $BF=5CF$，四边形 $CDEF$ 是平行四边形，且△BDE 与△ADE 的面积和为 6，则△ABC 的面积为 <u>24</u>.



【分析】连接 EC，过 A 作 $AM\parallel BC$ 交 FE 的延长线于点 M，证四边形 $ACFM$ 是平行四边形，再证 $S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{平行四边形ACFM}=6$，设平行四边形 $ACFM$ 的边 CF 上的高为 h，则 $CF\cdot h=12$，然后证 $BC=4CF$，即可解决问题.

【解答】解：如图，连接 EC，过 A 作 $AM\parallel BC$ 交 FE 的延长线于点 M，

∵四边形 $CDEF$ 是平行四边形，

∴$DE\parallel CF$，$EF\parallel CD$，

∴$AM\parallel DE\parallel CF$，$AC\parallel FM$，

∴四边形 $ACFM$ 是平行四边形，

∵△BDE 边 DE 上的高和△CDE 的边 DE 上的高相同，

∴$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$，

同理：$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AME}$，

∴$S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\text{平行四边形}ACFM}=6$，

∴$S_{\text{平行四边形}ACFM}=2\times6=12$，

设平行四边形 $ACFM$ 的边 CF 上的高为 h，

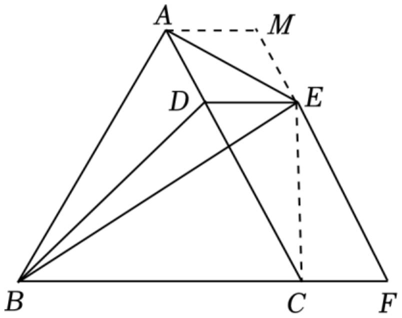
则 $CF\bullet h=12$，

∵$BF=5CF$，

∴$BC=4CF$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\bullet h=\frac{1}{2}\times4CF\bullet h=2\times12=24$，

故答案为：24．



【点评】本题考查了平行四边形的判定与性质以及三角形的面积等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题的关键．

16．（3 分）规定：若$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$，则$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1y_2+x_2y_1$．例如$\vec{a}=(1，3)$，$\vec{b}=(2，4)$，则$\vec{a}\bullet\vec{b}=1\times4+3\times2=10$．已知$\vec{a}=(x+1，x-2)$，$\vec{b}=(x-3，4)$，且 $1\leqslant x\leqslant2$，则$\vec{a}\bullet\vec{b}$的最小值是 <u>10</u>．

【分析】根据平面向量的新定义运算法则，列出关于 x 的二次函数，根据二次函数最值的求法解答即可．

【解答】解：根据题意知：$\vec{a}\bullet\vec{b}=(x-3)(x-2)+4(x+1)=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{39}{4}$．

因为 $1\leqslant x\leqslant2$，

所以当 $x=1$ 时，$\vec{a}\bullet\vec{b}$取最小值，此时$\vec{a}\bullet\vec{b}=10$．

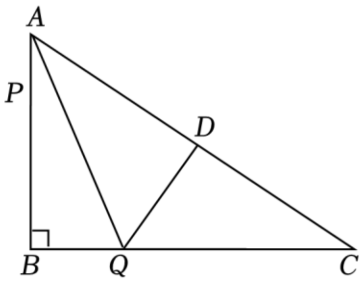
即$\vec{a}\bullet\vec{b}$的最小值是 10．

故答案为：10．

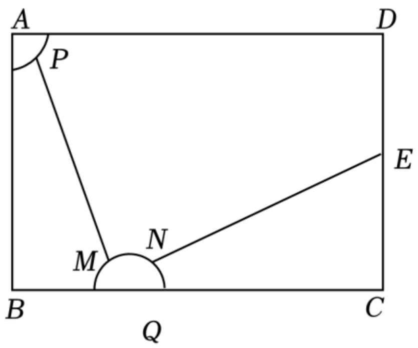
【点评】本题主要考查了平面向量，解题时，利用了二次函数的性质，并利用配方法求得二次函数的最值．

17．（3 分）（1）如图①，Rt△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，*AB*＝6，*BC*＝8，点 *D* 是边 *AC* 的中点．以点 *A* 为圆心，2 为半径在△*ABC* 内部画弧，若点 *P* 是上述弧上的动点，点 *Q* 是边 *BC* 上的动点，*PQ*+*QD* 的最小值是 __$\sqrt{97}-2$__；

（2）如图②，矩形 *ABCD* 中 $AB=200\sqrt{3}$，*BC*＝300．*E* 为 *CD* 中点，要在以点 *A* 为圆心，10 为半径的圆弧上选一处点 *P*，边 *BC* 上选一处点 *Q*，*M*、*N* 是以 *Q* 为圆心，10 为半径的半圆的三等分点处，*PM*+*NE* 的最小值是 __570__．



（图①）



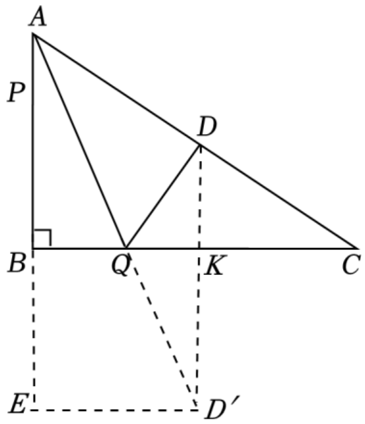
（图②）

【分析】（1）作点 *D* 关于 *BC* 的对称点 *D*′，连接 *DQ*、*AP*，过点 *D* 作 *DE*⊥*AB* 交 *AB* 的延长线于 *E*，则 *QD*＝*QD*，*DK*＝*DK*，当 *A*、*P*、*Q*、*D* 在同一条直线上时，*PQ*+*QD*＝*AD*－*AP* 取得最小值，由 *DK*∥*AB*，可得△*CDK*∽△*CAB*，运用相似三角形性质可得 *DK*＝3，*CK*＝4，再由勾股定理即可求得答案；

（2）连接 *MQ*，*NQ*，过点 *Q* 作 *QK*⊥*MN* 于 *K*，作点 *A* 关于直线 *MN* 的对称点 *A*，将 *E* 向左平移 10 得到点 *E*，过点 *E* 作 *EL*∥*AB*，过点 *A* 作 *AL*⊥*EL* 于 *L*，连接 *A*′*M*、*A*′*E*′、*E*′*M*，由题意得随着圆心 *Q* 在 *BC* 上运动，*MN* 在平行于 *BC* 且到 *BC* 距离为 $5\sqrt{3}$ 的 直线上运动，再运用勾股定理可得 *PM*+*NE* 最小值即可．

【解答】解：（1）如图①，作点 *D* 关于 *BC* 的对称点 *D*′，连接 *DQ*、*AP*，过点 *D* 作 *DE*⊥*AB* 交 *AB* 的延长线于 *E*，

则 *QD*＝*QD*，*DK*＝*DK*，



（图①）

∴$PQ+QD=PQ+QD'=AQ-AP+QD'$，

当 A、P、Q、D 在同一条直线上时，$PQ+QD=AD-AP$ 取得最小值，

∵$\angle ABC=90°$，$AB=6$，$BC=8$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∵点 D 是边 AC 的中点，

∴$CD=\frac{1}{2}AC=5$，

∵$DK\parallel AB$，

∴$\triangle CDK\sim\triangle CAB$，

∴$\frac{DK}{AB}=\frac{CK}{BC}=\frac{CD}{AC}$，即 $\frac{DK}{6}=\frac{CK}{8}=\frac{5}{10}$，

∴$DK=3$，$CK=4$，

∴$D'K=3$，$BK=4$，

∵$\angle E=\angle EBK=\angle BKD'=90°$，

∴四边形 $BED'K$ 是矩形，

∴$DE=BK=4$，$BE=DK=3$，

∴$AE=AB+BE=6+3=9$，

∴$AD'=\sqrt{AE^2+D'E^2}=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$，

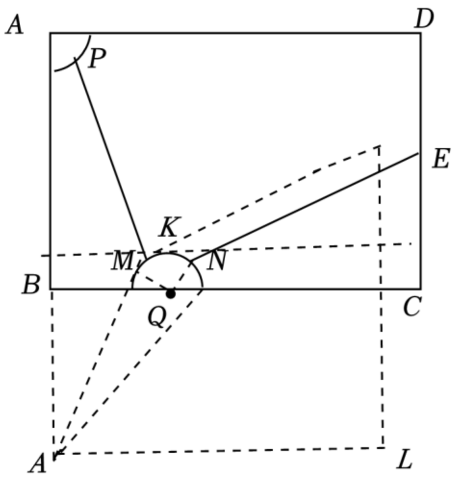
∵$AP=2$，

∴$PQ+QD$ 的最小值$=\sqrt{97}-2$，

故答案为：$\sqrt{97}-2$；

（2）如图②，连接 MQ，NQ，过点 Q 作 $QK\perp MN$ 于 K，作点 A 关于直线 MN 的对称点 A，将 E 向左

平移 10 得到点 E，过点 E 作 $EL\parallel AB$，过点 A 作 $AL\perp EL$ 于 L，连接 $A'M$、AE'、$E'M$，



（图②）

∵M、N 是半圆 Q 的三等分点，且半径为 10，

∴△QMN 为等边三角形，且 $MN\parallel BC$，$MN=10$，

∵$QK\perp MN$，$QM=10$，

∴$QK=5\sqrt{3}$，

∴随着圆心 Q 在 BC 上运动，MN 在平行于 BC 且到 BC 距离为 $5\sqrt{3}$ 的直线上运动，

∵$EE\parallel MN$ 且 $EE=MN=10$，

∴四边形 $EEMN$ 是平行四边形，

∴$NE=ME$，

∴$PM+NE=PM+ME\geqslant AM-AP+ME'=AM+ME'-10$，

∵E 是 CD 的中点，

∴$DE=\frac{1}{2}CD=100\sqrt{3}$，

∴$EL=AA-DE=2(AB-QK)-DE=2\times(200\sqrt{3}-5\sqrt{3})-100\sqrt{3}=290\sqrt{3}$，

$AL=BC-EE=300-10=290$，

在 Rt△AEL 中，

$AE'=\sqrt{AL^2+E'L^2}=\sqrt{290^2+(290\sqrt{3})^2}=580'$，

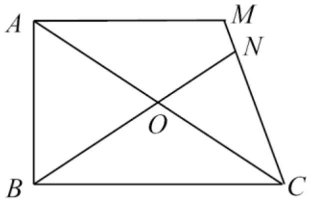
∴$PM+NE$ 最小值$=AE-AP=580-10=570$，

故答案为：570．

【点评】本题考查了矩形的性质，轴对称—最小值问题，相似三角形的性质与判定等，巧妙的添加辅助线是解题的关键．

18．（3 分）如图，在△ABC 中，$\angle ABC=90^\circ$，以 AC 为边在△ABC 外作等腰△AMC，满足 $MA=MC$，

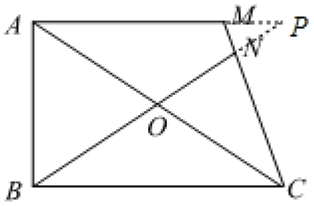
$AM // BC$，O 是边 AC 的中点，连结 BO，作射线 BO 交折线段 $A-M-C$ 于点 N，若 $MN=2$，$ON=3$，则 AM 的长为 __$3+\sqrt{19}$或 $1+\sqrt{19}$__．



【分析】分 N 在 AM 和 CM 上两种情况：①当 N 在 CM 上，分别延长 AM，BN，并交于点 P，根据全等三角形的判定与性质，可得△MAC≌△OCB，根据相似三角形的判定与性质，△MNP∽△CNB，△MNP∽△ONC，设 $MA=MC=x$，根据 $MN=2$，$ON=3$，列分式方程，然后整理得一元二次方程，求解即可得结论；②当 N 在 AM 上时，连接 CN，根据全等三角形的判定与性质，可得△AON≌△COB，设 $MA=MC=x$，根据 $MN=2$，$ON=3$，根据勾股定理列出一元二次方程，求解即可得结论．

【解答】解：分 N 在 AM 和 CM 上两种情况：

①当 N 在 CM 上，分别延长 AM，BN，并交于点 P，如图，



∵$\angle ABC=90°$，O 是边 AC 的中点，

∴$OA=OB=OC$，

∴$\angle OBC=\angle OCB$，

∵$MA=MC$，

∴$\angle MAC=\angle MCA$，

∵$AM // BC$，

∴$\angle MAC=\angle OCB$，

在△PAO 和△CBO 中，

$$\begin{cases}\angle MAC=\angle OCB \\ OA=OC \\ \angle AOP=\angle COB\end{cases},$$

∴△PAO≌△CBO（ASA），

∴$OP=OC$，

∴$OA=OC=OB=OP$，$\angle P=\angle OBC=\angle MCA$，

∴△MNP∽△CNB，△MNP∽△ONC，

∴$\frac{MN}{CN}=\frac{NP}{NB}$，$\frac{MN}{ON}=\frac{NP}{NC}$，

设 $MA=MC=x$，

∵$MN=2$，$ON=3$，

∴$\frac{2}{x-2}=\frac{OB-3}{OB+3}$，$\frac{2}{3}=\frac{OB-3}{x-2}$，

∴$OB=\frac{3x}{x-4}$，$OB=\frac{2x+5}{3}$，

∴$\frac{3x}{x-4}=\frac{2x+5}{3}$，

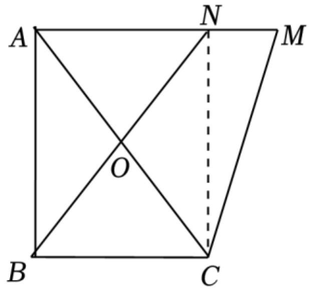
∴$x^2-6x-10=0$，

解得 $x=3+\sqrt{19}$或 $x=3-\sqrt{19}$（不符合题意，舍去），

经检验，$x=3+\sqrt{19}$时，$x-4\neq0$，

∴$x=3+\sqrt{19}$是原方程的解；

②当 N 在 AM 上时，连接 CN，如图，



设 $MA=MC=x$，

∵$\angle ABC=90°$，O 是边 AC 的中点，

∴$OA=OB=OC$，

∵$AM\parallel BC$，

∴$\angle MAC=\angle OCB$，

在△AON 和△COB 中，

$\begin{cases}\angle MAC=\angle OCB\\ AO=CO\\ \angle AON=\angle COB\end{cases}$，

∴△AON≌△COB（ASA），

∴$AN=BC$，$ON=OB$，

∴$OA=OC=OB=ON=3$，$AN=AM-MN=x-2$，

∵$\angle ABC=90°$，

∴四边形 $ABCN$ 是矩形，

∴$\angle ANC=\angle CNM=90°$，

∴$CN^2=AC^2-AN^2=CM^2-MN^2$，

∵$AC=AO+CO=6$，

∴$6^2-(x-2)^2=x^2-2^2$，

∴$x^2-2x-18=0$，

解得 $x=1+\sqrt{19}$或 $x=1-\sqrt{19}$（不符合题意，舍去），

综上所述：AM 的长为：$3+\sqrt{19}$或 $1+\sqrt{19}$.

故答案为：$3+\sqrt{19}$或 $1+\sqrt{19}$.

【点评】本题属于代数几何综合题，是中考填空题的压轴题，考查了三角形中位线定理，等腰三角形的性质，矩形，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，分式方程，一元二次方程，勾股定理，解决本题的关键是熟练掌握以上知识并综合运用.

三.解答题（本大题共 10 小题，共 96 分）

19.（8 分）（1）计算：$(-1)^3+\sqrt{2}\tan45°-\sqrt{8}$；

（2）化简：$\frac{a^2-4}{a}\div(1-\frac{2}{a})$.

【分析】（1）直接利用特殊角的三角函数值、二次根式的性质、有理数的乘方运算法则分别化简，进而得出答案；

（2）直接将括号里面通分运算，再结合分式的混合运算法则化简得出答案.

【解答】解：（1）原式$=-1+\sqrt{2}\times1-2\sqrt{2}$

$=-1-\sqrt{2}$；

（2）原式$=\frac{(a-2)(a+2)}{a}\div\frac{a-2}{a}$

$=\frac{(a-2)(a+2)}{a}\cdot\frac{a}{a-2}$

$=a+2$.

【点评】此题主要考查了分式的混合运算以及实数的运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

20.（8 分）解方程与不等式组：

（1）$x^2+4x-1=0$；

（2）$\begin{cases}\frac{x-3}{2}+3\geqslant x+1\\1-3(x-1)<8-x\end{cases}$.

【分析】（1）利用配方法求出 x 的值即可；

（2）分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可．

【解答】解：（1）移项得，$x^2+4x=1$，

配方得，$x^2+4x+4=1+4$，

即（$x+2$）$^2=5$，

解得：$x_1=-2+\sqrt{5}$，$x_2=-2-\sqrt{5}$；

（2）$\begin{cases}\frac{x-3}{2}+3\geqslant x+1① \\ 1-3(x-1)<8-x②\end{cases}$，

解不等式①得 $x\leqslant 1$．

解不等式②得 $x>-2$，

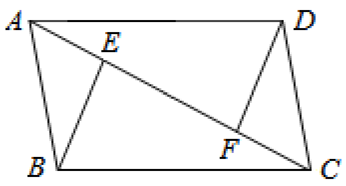
故不等式组的解集为：$-2<x\leqslant 1$．

【点评】本题考查的是解一元二次方程和解一元一次不等式组，熟知"同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到"的原则是解题的关键．

21．（10 分）如图，已知 $AB=DC$，$AB\parallel CD$，E、F 是 AC 上两点，且 $AF=CE$．

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$；

（2）若 $\angle BCE=30°$，$\angle CBE=70°$，求 $\angle CFD$ 的度数．



【分析】（1）由平行线的性质得出 $\angle BAE=\angle FCD$，根据 SAS 可得出 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$；

（2）求出 $\angle AEB=\angle BCE+\angle CBE=100°$，可得出 $\angle CFD=\angle AEB=100°$．

【解答】（1）证明：$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle BAE=\angle FCD$，

$\because AF=CE$，

$\therefore AE=CF$，

又 $\because AB=CD$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$（$SAS$）．

（2）解：$\because \angle BCE=30°$，$\angle CBE=70°$，

$\therefore \angle AEB=\angle BCE+\angle CBE=30°+70°=100°$，

∵△ABE≌△CDF，

∴∠CFD＝∠AEB＝100°．

【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的性质，三角形的外角和等知识，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键．

22．（10 分）甲、乙两人做游戏，他们在一只不透明的袋子中装了五个小球，分别标有数字：1，1，2，2，3，这些小球除编号外都相同．

（1）搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，则这个小球的编号是偶数的概率为 ___$\frac{2}{5}$___；

（2）搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，记录小球的编号后放回、搅匀，乙再从中任意摸出一个小球．若摸出两个小球编号之和为偶数甲获胜；否则，乙获胜．请你用画树状图或列表的方法说明谁获胜的概率大．

【分析】（1）直接利用概率公式可得答案．

（2）列表可得出所有等可能的结果数以及摸出两个小球编号之和为偶数的结果数、摸出两个小球编号之和为奇数的结果数，再结合概率公式可得答案．

【解答】解：（1）1，1，2，2，3 中，是偶数的有：2，2，

∴甲从中任意摸出一个小球，这个小球的编号是偶数的概率为$\frac{2}{5}$．

故答案为：$\frac{2}{5}$．

（2）列表如下：

	1	1	2	2	3
1	（1，1）	（1，1）	（1，2）	（1，2）	（1，3）
1	（1，1）	（1，1）	（1，2）	（1，2）	（1，3）
2	（2，1）	（2，1）	（2，2）	（2，2）	（2，3）
2	（2，1）	（2，1）	（2，2）	（2，2）	（2，3）
3	（3，1）	（3，1）	（3，2）	（3，2）	（3，3）

共有 25 种等可能的结果，其中摸出两个小球编号之和为偶数的结果有：（1，1），（1，1），（1，3），（1，1），（1，1），（1，3），（2，2），（2，2），（2，2），（2，2），（3，1），（3，1），（3，3），共 13 种，

摸出两个小球编号之和为奇数的结果有：（1，2），（1，2），（1，2），（1，2），（2，1），（2，1），（2，3），（2，1），（2，1），（2，3），（3，2），（3，2），共 12 种，

∴甲获胜的概率为$\frac{13}{25}$，乙获胜的概率为$\frac{12}{25}$.

∵$\frac{13}{25}>\frac{12}{25}$，

∴甲获胜的概率大.

【点评】本题考查列表法与树状图法、概率公式，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键.

23.（10 分）劳动教育是新时代党对教育的新要求，某校为了解学生参加家务劳动的情况，随机抽取了部分学生在某个星期日做家务的时间 t（单位：h）作为样本，将收集的数据整理后分为 A，B，C，D，E 五个组别，其中 A 组的数据分别为：0.5，0.4，0.4，0.4，0.3，绘制成如下不完整的统计图表.

各组劳动时间的频数分布表

组别	时间 t/h	频数
A	$0<t\leqslant0.5$	5
B	$0.5<t\leqslant1$	a
C	$1<t\leqslant1.5$	20
D	$1.5<t\leqslant2$	15
E	$t>2$	8

请根据以上信息解答下列问题.

（1）本次调查的样本容量为 ＿60＿，频数分布表中的 a 的值为 ＿12＿；

（2）A 组数据的众数为 ＿0.4＿h，B 组所在扇形的圆心角的大小为 ＿72°＿；

（3）若该校有 1200 名学生，估计该校学生劳动时间超过 1h 的人数.

各组劳动时间的扇形统计图

【分析】（1）用频数分布表中 D 组的频数除以扇形统计图中 D 组的百分比可得本次调查的样本容量；用本次调查的样本容量分别减去频数分布表中 A，C，D，E 组的频数，可得 a 的值.

（2）根据众数的定义可得答案；用 360° 乘以本次调查中 B 组的百分比，即可得 B 组所在扇形的圆心角的大小.

（3）根据用样本估计总体，用 1200 乘以样本中学生劳动时间超过 1h 的人数所占的百分比，即可得出答案．

【解答】解：（1）本次调查的样本容量为 15÷25%＝60．

频数分布表中的 a 的值为 60﹣5﹣20﹣15﹣8＝12．

故答案为：60；12．

（2）由题意可知，A 组数据的众数为 0.4h．

B 组所在扇形的圆心角的大小为 $360°\times\frac{12}{60}=72°$．

故答案为：0.4；72°．

（3）$1200\times\frac{20+15+8}{60}=860$（名）．

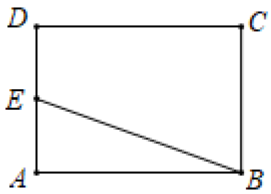
∴该校学生劳动时间超过 1h 的约有 860 名．

【点评】本题考查频数（率）分布表、扇形统计图、总体、个体、样本、样本容量、众数、用样本估计总体，能够读懂统计图表，掌握样本容量、众数的定义、用样本估计总体是解答本题的关键．

24．（10 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，E 为 AD 的中点．

（1）在 CD 边上求作一点 F，使得 $\angle CFB=2\angle ABE$；

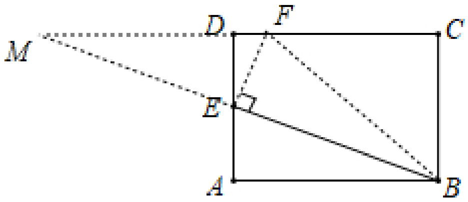
（2）在（1）中，若 $AB=9$，$BC=6$，求 BF 的长．



【分析】（1）过点 E 作 $EF\perp BE$ 交 CD 于点 F 即可；

（2）根据矩形的性质和勾股定理可得 $EF^2+BE^2=BF^2$，结合（1）得 $(3^2+DF^2)+(3^2+6^2)=(9-DF)^2+6^2$，解得 $DF=1$，再根据勾股定理即可求出 BF 的长．

【解答】解：（1）如图，过点 E 作 $EF\perp BE$ 交 CD 于点 F，点 F 即为所求；



延长 BE 和 CD 交于点 M，

∴∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$CD\parallel AB$，

∴$\angle M=\angle ABE$，$\angle CFB=\angle ABF$，

∵E 为 AD 的中点．

∴$DE=AE$，

在△DEM 和△AEB 中，

$$\begin{cases}\angle M=\angle EBA\\ \angle MED=\angle BEA,\\ DE=AE\end{cases}$$

∴△DEM≌△AEB（AAS），

∴$EM=EB$，

∵$EF\perp BE$，

∴FE 是线段 MB 的垂直平分线，

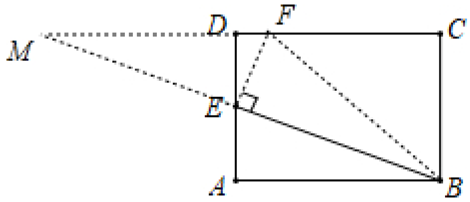
∴$FM=FB$，

∴$\angle M=\angle FBM$，

∵$\angle CFB=\angle M+\angle FBM$，$\angle ABF=\angle ABE+\angle FBM$，

∴$\angle CFB=2\angle ABE$；

（2）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，



∴$CD=AB=9$，$AD=BC=6$，

∴$DE=AE=3$，

∵$EF^2+BE^2=BF^2$，

∴（3^2+DF^2）+（3^2+9^2）=（$9-DF$）$^2+6^2$，

解得 $DF=1$，

∴$CF=CD-DF=9-1=8$，

∴$BF=\sqrt{8^2+6^2}=10$．

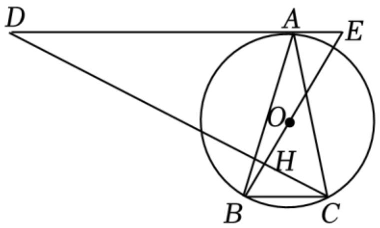
BF 的长．

【点评】本题考查了作图﹣复杂作图，矩形的性质，解决本题的关键是根据矩形的性质找到点 F．

25．（10 分）⊙O 是△ABC 的外接圆，$AB=AC$，过点 A 作 $AE/\!/BC$，交射线 BO 于点 E，过点 C 作 $CH\perp BE$ 于点 H，交直线 AE 于点 D．

（1）求证：DE 是⊙O 的切线．

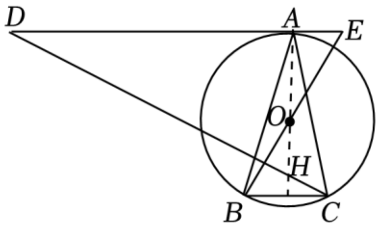
（2）已知$BC=4\sqrt{5}$，$\tan\angle D=\frac{1}{2}$，求 OE 的长度．



【分析】（1）根据已知想到等腰三角形的三线合一性质，所以过点 A 作 $AF\perp BC$，垂足为 F，再利用垂径定理证明 AF 过圆心 O，最后根据 $DE\parallel BC$，求出$\angle EAO=90°$ 即可；

（2）利用已知可得$\angle D=\angle DCB$，然后在 Rt$\triangle BHC$ 中，求出 BH，CH 的长，从而想到连接 OC，在 Rt$\triangle OHC$ 中求出半径的长，再利用等角的余角相等证明$\angle D=\angle AOE$，进而在 Rt$\triangle AOE$ 中，求出 OE 的长．

【解答】（1）证明：过点 A 作 $AF\perp BC$，垂足为 F，



∵$AB=AC$，$AF\perp BC$，

∴AF 是 BC 的垂直平分线，

∴AF 过圆心 O，

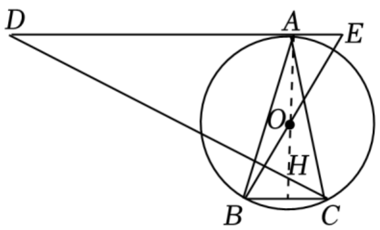
∵$DE\parallel BC$，

∴$\angle EAO=\angle AFB=90°$，

∵OA 是圆 O 的半径，

∴DE 是⊙O 的切线；

（2）解：连接 OC，



∵$DE\parallel BC$，

∴$\angle D=\angle DCB$，

∴$\tan\angle DCB=\tan D=\frac{1}{2}$，

∵$CH\perp BE$，

∴$\angle BHC=\angle OHC=\angle DHE=90°$，

在 Rt△BHC 中，$\tan\angle DCB=\frac{BH}{CH}=\frac{1}{2}$，

∴设 $BH=x$，则 $CH=2x$，

∵$BH^2+CH^2=BC^2$，

∴$x^2+(2x)^2=(4\sqrt{5})^2$，

∴$x=\pm4$（负值舍去），

∴$BH=4$，$CH=8$，

设⊙O 的半径为 r，

在 Rt△OHC 中，$OH^2+CH^2=OC^2$，

∴$(r-4)^2+8^2=r^2$，

∴$r=10$，

∴$OC=OA=OB=10$，

∴$OH=OB-BH=10-4=6$，

∵$\angle DHE=\angle EAO=90°$，

∴$\angle E+\angle AOE=90°$，$\angle E+\angle D=90°$，

∴$\angle D=\angle AOE$，

∴$\tan\angle AOE=\tan\angle D=\frac{1}{2}$，

在 Rt△AOE 中，$AE=AO\tan\angle AOE=10\times\frac{1}{2}=5$，

∴$OE=\sqrt{AO^2+AE^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$.

【点评】本题考查了切线的判定与性质，圆周角定理，解直角三角形，垂径定理，勾股定理，等腰三角形的性质，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

26.（10 分）图 1 是一种儿童可折叠滑板车，该滑板车完全展开后示意图如图 2 所示，由车架 $AB-CE-EF$ 和两个大小相同的车轮组成车轮半径为 8cm，已知 $BC=58cm$，$CD=30cm$，$DE=12cm$，$EF=68cm$，$\cos\angle ACD=\frac{4}{5}$，当 A，E，F 在同一水平高度上时，$\angle CEF=135°$.

（1）求 AC 的长；

（2）为方便存放，将车架前部分绕着点 D 旋转至 $AB\parallel EF$，按如图 3 所示方式放入收纳箱，试问该滑

板车折叠后能否放进长 $a=100cm$ 的收纳箱（收纳箱的宽度和高度足够大），请说明理由（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.4$）．

图 1

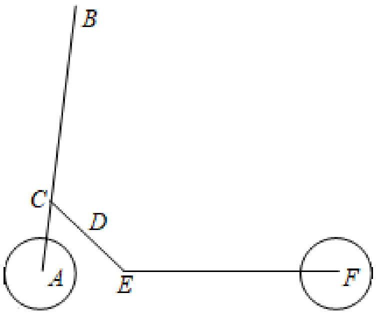


图 2

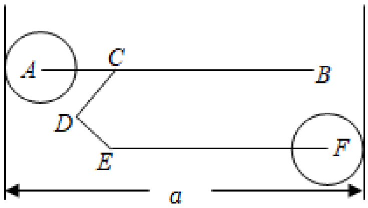
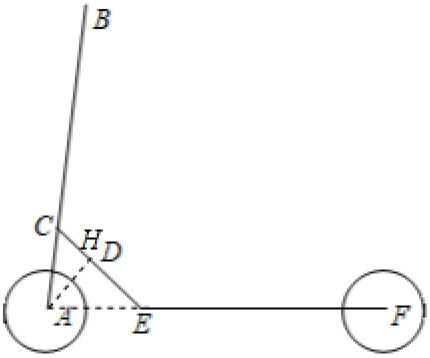


图 3

【分析】（1）过点 A 作 $AH\perp CE$，垂足为 H，连接 AE，则 A、E、F 在同一条直线上，根据已知可求出 $\angle AED=45°$，从而可得△AHE 是等腰直角三角形，然后设 $AH=HE=x\ cm$，从而得 $CH=(42-x)\ cm$，然后在 Rt△ACH 中，利用锐角三角函数的定义求出 $\tan\angle ACH=\frac{3}{4}$，从而列出关于 x 的方程，进行计算即可解答；

（2）过点 D 作 $DM\perp AB$，垂足为 M，延长 MD 交 FE 的延长线于点 N，根据已知可得△DNE 是等腰直角三角形，从而利用锐角三角函数定义可求出 NE 的长，再在 Rt△DMC 中，利用锐角三角函数的定义求出 CM 的长，然后进行计算即可解答．

【解答】解：（1）过点 A 作 $AH\perp CE$，垂足为 H，连接 AE，则 A、E、F 在同一条直线上，



∴$\angle AHE=\angle AHC=90°$，

∵$\angle CEF=135°$，

∴$\angle AED=180°-\angle CEF=45°$，

∴$\angle HAE=90°-\angle AEH=45°$，

∴$AH=HE$，

设 $AH=HE=x\ cm$，

∵$CD=30cm$，$DE=12cm$

∴$CE=CD+DE=42$（cm），

∴$CH=CE-EH=$（$42-x$）cm，

在 Rt△ACH 中，$\cos\angle ACD=\frac{CH}{AC}=\frac{4}{5}$，

∴设 $CH=4a$，$AC=5a$，

∴$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{(5a)^2-(4a)^2}=3a$，

∴$\tan\angle ACH=\frac{AH}{CH}=\frac{x}{42-x}=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}$，

∴$x=18$，

经检验：$x=18$ 是原方程的根，

∴$AH=18$，

∴$3a=18$，

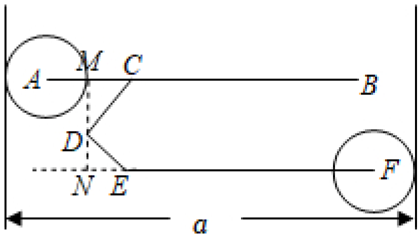
∴$a=6$，

∴$AC=5a=30$（cm），

∴AC 的长为 $30cm$；

（2）该滑板车折叠后能放进长 $a=100cm$ 的收纳箱，

理由：过点 D 作 $DM\perp AB$，垂足为 M，延长 MD 交 FE 的延长线于点 N，



∵$\angle DEF=135°$，

∴$\angle NED=180°-\angle DEF=45°$，

∴$\angle NDE=90°-\angle NED=45°$，

∴$ND=NE=DE\cdot\cos45°=12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$（$cm$），

在 Rt△DMC 中，$CD=30cm$，$\cos\angle ACD=\frac{4}{5}$，

∴$CM=CD\cdot\cos\angle ACD=30\times\frac{4}{5}=24$（$cm$），

∵$AC=30cm$，

∴$AM=AC-CM=30-24=6$（cm），

∴折叠后的总长$=8+AM+NE+EF+8$

$=8+6+6\sqrt{2}+68+8$

≈ 98.4（cm）$<100cm$，

∴该滑板车折叠后能放进长 $a=100cm$ 的收纳箱．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用，翻折变换（折叠问题），根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键．

27．（10 分）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$（b、c 为常数）的对称轴为直线 $x=1$，与 y 轴交点坐标为（0，3）．

（1）求此抛物线对应的函数表达式；

（2）点 A、点 B 均在这个抛物线上（点 A 在点 B 的左侧），点 A 的横坐标为 m，点 B 的横坐标为 $4-m$．将此抛物线上 A、B 两点之间的部分（含 A、B 两点）记为图象 G．

①当点 A 在 x 轴上方，图象 G 的最高与最低点的纵坐标差为 6 时，求 m 的值；

②设点 D（1，n），点 E（1，$1-n$），将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 后得到线段 DF，连结 EF，当△DEF（不含内部）和二次函数在 $x\geqslant 0$ 范围上的图象有且仅有一个公共点时，求 n 的取值范围．

【分析】（1）根据对称轴求出 b 的值，再由抛物线与 y 轴的交点坐标求出 c 的值；

（2）①首先推导出 A、B 的坐标为 A（n，$-n^2+n+3$），B（$4-n$，$-n^2+6n-5$），当 $-1<n\leqslant 1$ 时，$4-[-(-n^2+6n-5)]=6$，求出 m 的值，当 $1<n<2$ 时，$-n^2+2n+3-[-n^2+6n-5]=6$，求出 n 的值，再结合题意确定符合条件的 m 值即可；

②分四种情况：当 $n<-3$ 时，当 $-3\leqslant n<\frac{1}{2}$时，当$\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant 4$ 时，当 $n>4$ 时，分别根据△DEF（不含内部）和二次函数在 $x\geqslant 0$ 范围上的图象有且仅有一个公共点，求得 n 的取值范围即可．

【解答】解：（1）∵抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2\times(-1)}=1$，

∴$b=2$，

∵抛物线与 y 轴交点坐标为（0，3），

∴$c=3$，

∴此抛物线对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$；

（2）①抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

令 $y=0$，得：$0=-(x-1)^2+4$，

解得：$x=-1$ 或 $x=3$，

故抛物线与 x 轴的交点为（-1，0），（3，0），对称轴为直线 $x=1$；顶点坐标为（1，4），

由题意得：A（m，$-m^2+2m+3$），B（$4-m$，$-m^2+6m-5$），

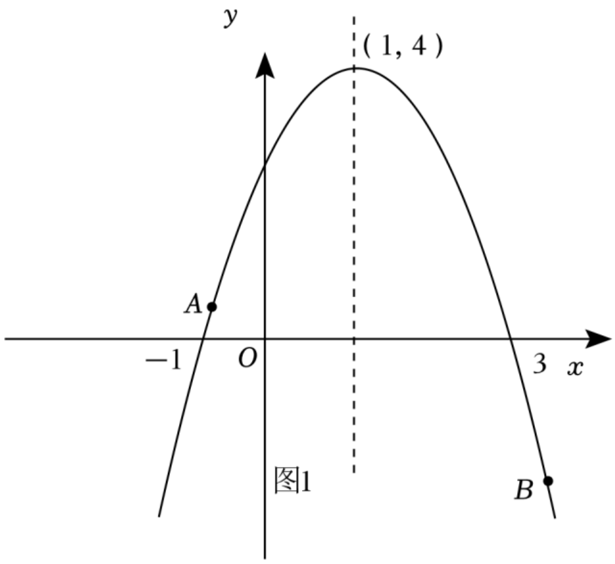


图1

当$-1<m\leqslant 1$时，如图1，

$4-(-m^2+6m-5)=6$，

解得：$m=3-\sqrt{6}$或$m=3+\sqrt{6}$（不合题意，舍去）；

当$1<m<2$时，如图2，

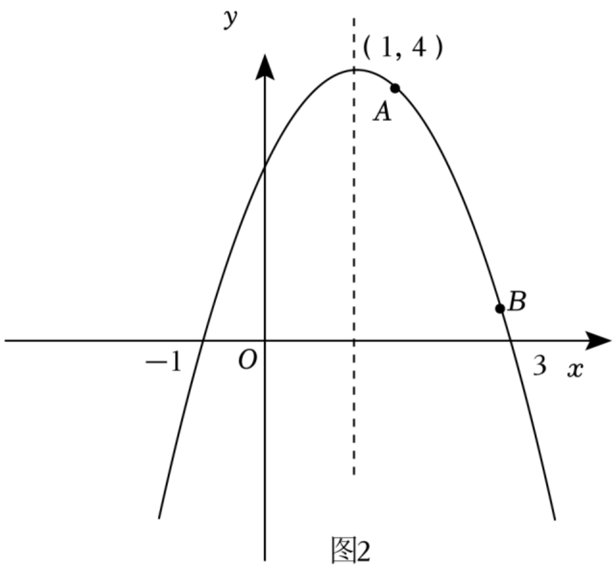


图2

$-m^2+2m+3-(-m^2+6m-5)=6$，

解得：$m=\dfrac{1}{2}$（不合题意，舍去），

综上所述：图象G的最高点与最低点的纵坐标差为6时，m的值为$3-\sqrt{6}$；

②当$n<-3$时，如图3，

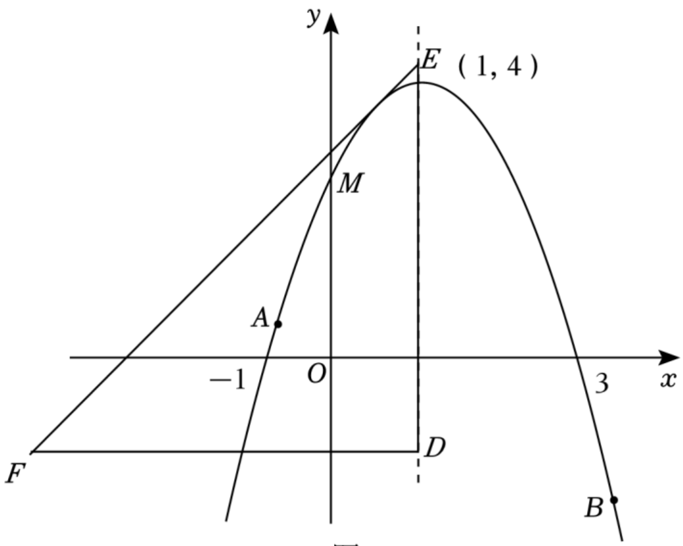


图3

∵D（1，n），E（1，$1-n$），

∴$DE=1-n-n=1-2n$，

由旋转得：$DF=DE$，$\angle EDF=90°$，

∴F（$2n$，n），

∴直线 EF 的解析式为 $y=x-n$，

联立方程组得：$x-n=-x^2+2x+3$，

整理得：$x^2-x-(n+3)=0$，

∵△DEF（不含内部）和二次函数在 $x\geqslant 0$ 范围上的图象有且仅有一个公共点，

∴$\Delta=(-1)^2-4\times1\times[-(n+3)]=0$，

解得：$n=-\dfrac{13}{4}$，

∴$n<-\dfrac{13}{4}$；

当 $-3\leqslant n<\dfrac{1}{2}$时，如图 4，△$DEF$（不含内部）和二次函数在 $x\geqslant 0$ 范围上的图象没有公共点；

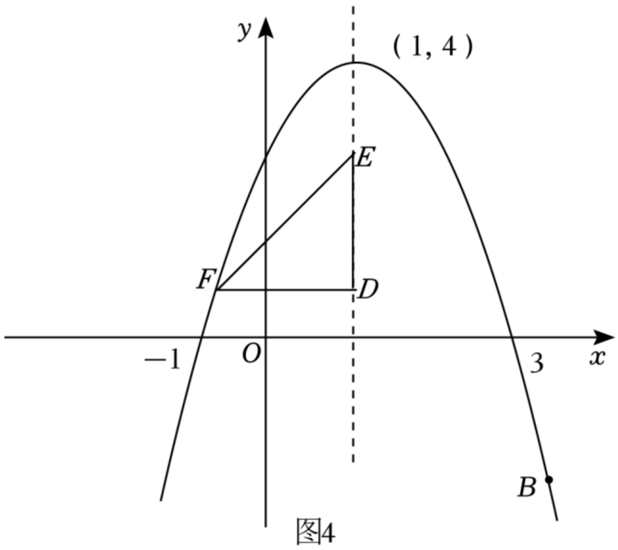
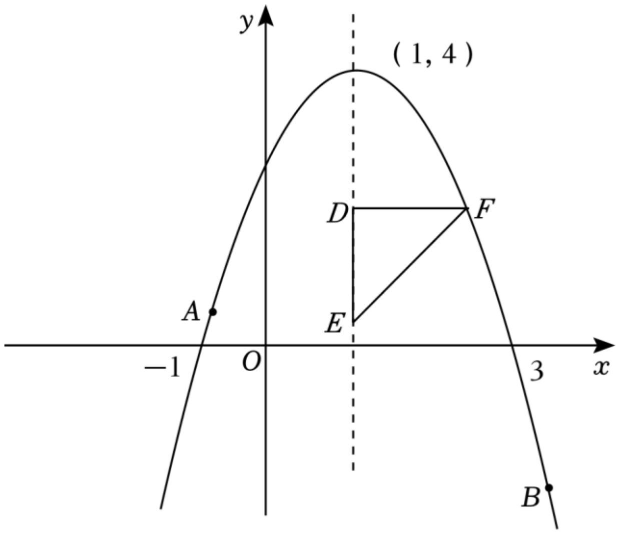


图4

当$\frac{1}{2}$≤n≤4 时，如图 5，△DEF（不含内部）和二次函数在 x≥0 范围上的图象有且仅有一个公共点，



∵D（1，n），E（1，1﹣n），F（2n，n），

∵点 F 在抛物线上，

∴﹣（2n）^{2}+4n+3＝n，

解得：$n=\frac{3-\sqrt{57}}{8}$（舍去）或 $n=\frac{3+\sqrt{57}}{8}$，

∴$n=\frac{3+\sqrt{57}}{8}$；

当 n＞4 时，如图 6，△DEF（不含内部）和二次函数在 x≥0 范围上的图象有两个公共点，（舍去）

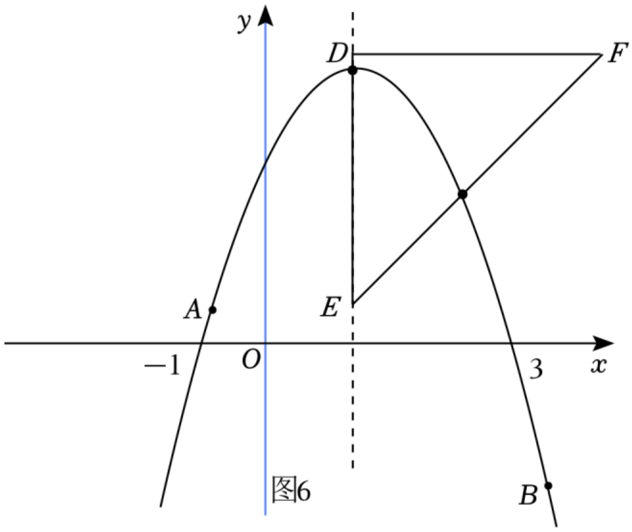


图6

综上所述：当 $n<-\dfrac{13}{4}$ 或 $n=\dfrac{3+\sqrt{57}}{8}$ 时，△*DEF*（不含内部）和二次函数在 $x\geqslant0$ 范围上的图象有且仅有一个公共点．

【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，数形结合，分类讨论是解题的关键．

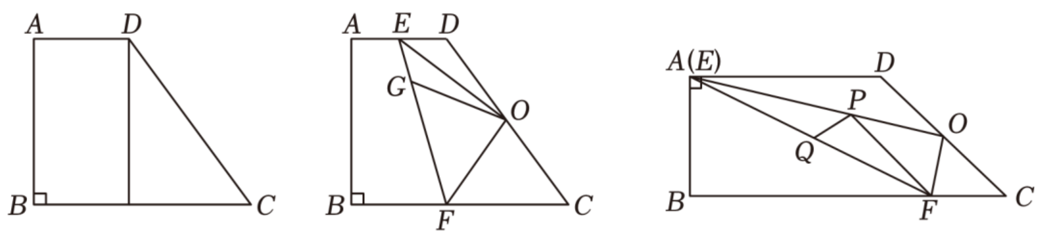
28．（10 分）如图 1，四边形 *ABCD* 中 *AD*∥*BC*，∠*B*＝90°，$\tan C=\dfrac{4}{3}$，*CD*＝10．

（1）线段 *AB*＝__8__；

（2）如图 2，点 *O* 是 *CD* 的中点，*E*、*F* 分别是 *AD*、*BC* 上的点，将△*DEO* 沿着 *EO* 翻折得△*GEO*，将△*COF* 沿着 *FO* 翻折使 *CO* 与 *GO* 重合．

①当点 *E* 从点 *D* 运动到点 *A* 时，点 *G* 走过的路径长为 $\dfrac{5}{2}\pi$，求 *AD* 的长；

②在①的条件下，若 *E* 与 *A* 重合（如图 3），*Q* 为 *EF* 中点，*P* 为 *OE* 上一动点，将△*FPQ* 沿 *PQ* 翻折得到△*F*′*PQ*，若△*F*′*PQ* 与△*APF* 的重合部分面积是△*APF* 面积的 $\dfrac{1}{4}$，求 *AP* 的长．



（图1） （图2） （图3）

【分析】（1）作 *DG*⊥*BC* 于 *G*，解直角三角形 *CDG* 求得结果；

（2）①作 *AH*⊥*CD*，交 *CD* 的延长线于点 *H*，可得出点 *G* 的轨迹是以 *O* 为圆心，5 为半径的弧，根据弧长公式求得∠*DOG*＝90°，进而得出∠*AOD*＝45°，解△*AOD* 求得结果；

②先解三角形 *AOD* 和 *COF* 求得 *AO* 和 *OF*，进而根据勾股定理得出 *AF* 的值，分两种情形：当 *QF*′ 交

AP 于 R 时，取 OA 的中点 X，连接 QX，可得出点 R 是 AP 的中点，$\angle PQF=\angle PQF'$，根据角平分线的性质得出$\frac{QR}{AQ}=\frac{AP}{AR}=2$，从而求得 RQ 的值，根据勾股定理得出 RX 的值，进一步得出结果；当 PF' 交 AQ 于 R 时，同理可得：R 是 AQ 的中点，$\frac{PF}{PR}=\frac{FQ}{RQ}=2$，进而推出四边形 $APQF'$ 是平行四边形，进一步得出结果.

【解答】解：（1）如图 1，

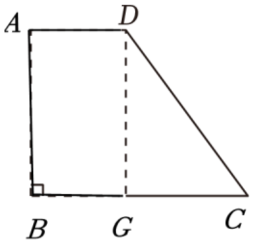


图1

作 $DG\perp BC$ 于 G，

$\therefore \angle DGB=90^\circ$，

$\because AD\parallel BC$，$\angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle A=180^\circ-\angle B=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是矩形，

$\therefore AB=DG$，

$\because \tan C=\frac{4}{3}$，

$\therefore \sin C=\frac{4}{5}$，

$\therefore AB=Dg=CD\bullet \sin C=10\times\frac{4}{5}=8$，

故答案为：8；

（2）①如图 2，

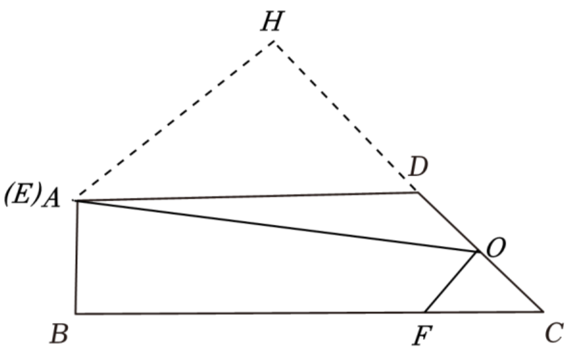


图2

作 $AH\perp CD$，交 CD 的延长线于点 H，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle ADH=\angle C$，

∴$\frac{AH}{DH}=\tan\angle ADH=\frac{4}{3}$，

设 $AH=4a$，$DH=3a$，则 $AD=5a$，

∵$\triangle DEO$ 沿着 EO 翻折得$\triangle GEO$，

∴$OG=OD$，$\angle DOE=\angle GOE$，

∴点 G 的轨迹是以 O 为圆心，5 为半径的弧，

∴$\frac{n\cdot\pi\cdot5}{180}=\frac{5\pi}{2}$，

∴$n=90°$，

∴$\angle AOE=45°$，

∴$\frac{AH}{OH}=\tan\angle AOD=1$，

∴$OH=AH=4a$，

由 $OH-DH=OD$ 得，

$4a-3a-5$，

∴$a=5$，

∴$OH=4a=20$，$AD=5a=25$；

②∵将$\triangle DEO$ 沿着 EO 翻折得$\triangle GEO$，将$\triangle COF$ 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合，

∴$\angle DOE=\angle GOE$，$\angle COF=\angle GOF$，

∴$\angle EOF=90°$，

∵$\angle AOD=45°$，

∴$\angle COF=45°$，

如图 3，

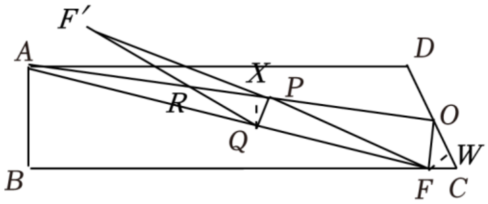


图3

作 $FW\perp CD$ 于 W，设 QF' 交 AP 于 R，

∴$\tan C=\frac{FW}{CW}=\frac{4}{3}$，

设 $FW=4x$，$CW=3x$，

∵$\tan\angle COF=\frac{FW}{OW}=1$，

∴$OW=FW=4x$，

由 $OW+CW=OC$ 得，

$4x+3x=5$，

∴$x=\frac{5}{7}$，

∴$FW=OW=4x=\frac{20}{7}$，

∴$OF=\sqrt{2}OW=\frac{20}{7}\sqrt{2}$，

由①知：$AO=\sqrt{2}AH=20\sqrt{2}$，

∴$AF=\sqrt{OA^2+OF^2}=\sqrt{(20\sqrt{2})^2+(\frac{20\sqrt{2}}{7})^2}=\frac{200}{7}$，

当 QF' 交 AP 于 R 时，取 OA 的中点 X，连接 QX，

∵Q 是 AF 的中点，

∴$QX\parallel OF$，

∴$QX=\frac{1}{2}OF=\frac{10\sqrt{2}}{7}$，$\angle AXQ=\angle AOF=90^\circ$，$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}S_{\triangle APF}$，

∵$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{4}S_{\triangle APF}$，

∴$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}S_{\triangle APQ}$，

∴点 R 是 AP 的中点，

由折叠得：$\angle PQF=\angle PQF'$，

∴$\frac{QR}{AQ}=\frac{AP}{AR}=2$，

∴$RQ=\frac{1}{2}AQ=\frac{50}{7}$，

∴$RX=\sqrt{RQ^2-OX^2}=\sqrt{(\frac{50}{7})^2-(\frac{10\sqrt{2}}{7})^2}=\frac{10\sqrt{23}}{7}$，

∴$AR=AX-RX=10\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{23}}{7}$，

∴$AP=2AR=20\sqrt{2}-\frac{20\sqrt{23}}{7}$，

如图 4，

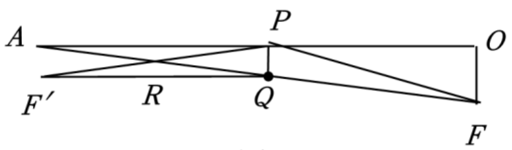


图4

当 PF' 交 AQ 于 R 时，

同理可得：R 是 AQ 的中点，$\frac{PF}{PR}=\frac{FQ}{RQ}=2$，

∴$PF'=PF=2PR$，

∴R 是 PF' 的中点，

∴四边形 $APQF'$ 是平行四边形，

∴$AP=QF'=QF=\frac{1}{2}AF=\frac{100}{7}$，

综上所述：$AP=2\sqrt{2}-\frac{20\sqrt{3}}{7}$或$\frac{100}{7}$.

【点评】本题考查了解直角三角形，角平分线的性质，轴对称的性质，弧长公式等知识，解决问题的关键是分类讨论和较强计算能力.