

无锡市厚桥中学初三数学第 14 周限时练习卷

一、选择题（本大题共 10 小题，在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1. 5 的相反数是（ ）

- A. -5 B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，进而得出答案．

【详解】解：5 的相反数是 -5．

故选：A．

【点睛】本题主要考查相反数的定义，能熟练分辨相反数与倒数是解题关键．

2. 分式 $\frac{3}{2-x}$ 中 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq 2$ B. $x \neq -2$ C. $x \leq -2$ D. $x \leq 2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式的概念：一般地，如果 A 、 B (B 不等于零) 表示两个整式，且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式即可解答．

【详解】解： $\because$ 分式 $\frac{3}{2-x}$ 有意义，

$$\therefore 2-x \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 2,$$

故选 A．

【点睛】本题考查了分式的概念：一般地，如果 A 、 B (B 不等于零) 表示两个整式，且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式，理解分式的概念是解题的关键．

3. 下列运算正确的是（ ）

- A. $2a^2 - a^2 = 2$ B. $(ab^2)^2 = ab^4$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D.

$$a^8 \div a^4 = a^4$$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法及除法运算依次判断即可．

【详解】解：A、 $2a^2 - a^2 = a^2$ ，选项计算错误，不符合题意；

B、 $(ab^2)^2 = a^2b^4$ ，选项计算错误，不符合题意；

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，选项计算错误，不符合题意；

D、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，选项计算正确，符合题意；

故选：D．

【点睛】题目主要考查合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法及除法运算，熟练掌握运算法则是解题关键．

4. 某食堂销售三种午餐盒饭的有关数据如表所示，该食堂销售午餐盒饭的平均价格是（ ）

品种	A	B	C
单价（元/份）	12	10	8
销售比例	15%	60%	25%

A. 10.2 元

B. 10 元

C. 9.8 元

D. 9.5 元

【答案】C

【解析】

【分析】由加权平均数公式计算即可．

【详解】解：午餐盒饭的平均价格为： $12 \times 15\% + 10 \times 60\% + 8 \times 25\% = 9.8$ （元）

故选：C．

【点睛】本题考查了求加权平均数，掌握计算公式是关键．

5. 底面半径为10cm，高为 $10\sqrt{3}$ cm的圆锥的侧面展开图的面积为（ ）

A. $200\pi\text{cm}^2$

B. $100\pi\text{cm}^2$

C. $200\sqrt{3}\pi\text{cm}^2$

D.

$100\sqrt{3}\pi\text{cm}^2$

【答案】A

【解析】

【分析】先利用勾股定理求出圆锥 母线 l 的长，再利用圆锥的侧面积公式： $S_{\text{侧}} = \pi rl$ 计算即可．

【详解】解：根据题意可知，圆锥的底面半径 $r = 10\text{cm}$ ，高 $h = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，

$\therefore$ 圆锥的母线 $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 20$ ，

$$\therefore S_{\text{侧}} = \pi r l = \pi \times 10 \times 20 = 200\pi (\text{cm}^2).$$

故选：A.

【点睛】此题考查圆锥的计算，理解圆锥的侧面展开图是个扇形，扇形的半径是圆锥的母线，扇形的弧长是底面圆的周长 l . 掌握圆锥的侧面积公式： $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l$ 是解题的关键.

6. 正八边形的每一个内角都是 ()

- A. 120° B. 135° C. 140° D. 150°

【答案】B

【解析】

【分析】首先求得每个外角的度数，然后根据外角与相邻的内角互为邻补角即可求解.

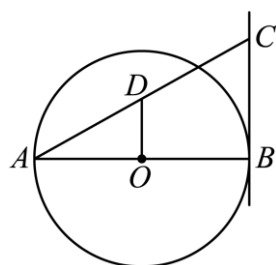
【详解】解：正八边形的每个外角的度数是： $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$,

则每一个内角的度数是： $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,

故选：B.

【点睛】本题主要考查了多边形的计算，正确理解内角与外角的关系是解题的关键.

7. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB = 6$ ， BC 是 $\odot O$ 的切线， D 是 AC 的中点， $OD = 2$ ，则 AC 的值为 ()



- A. 10 B. 8 C. $2\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{13}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据中位线的判定和性质得出 $BC = 2OD = 4$ ，再由切线的性质及勾股定理求解即可.

【详解】解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， D 是 AC 的中点，

$\therefore OD$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\because OD = 2$ ，

$\therefore BC = 2OD = 4$ ，

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore AB \perp BC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

故选：D.

【点睛】题目主要考查三角形中位线的性质，切线的性质及勾股定理理解三角形，理解题意，熟练掌握运用这些知识点是解题关键.

8. 菱形具有而矩形不一定具有的性质是（ ）

- A. 对边平行 B. 对角线互相平分 C. 对角线互相垂直 D. 对角互补

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据菱形与矩形的性质定理求解即可求得答案. 注意掌握排除法在选择题中的应用.

【详解】解： $\because$ 菱形的性质：对角相等，对边平行且相等，对角线垂直且互相平分；矩形具有的性质：对角相等，对边平行且相等，对角线相等且互相平分，

$\therefore$ 菱形具有而矩形不具有的性质是：对角线互相垂直.

故选 C.

【点睛】本题考查了菱形的性质以及矩形的性质. 此题比较简单，注意熟记定理是解答此题的关键.

9. 已知一次函数 $y = x + 2$ 的图象上存在两个点，这两个点关于 y 轴的对称点恰好在反比例

函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上，则 k 的范围是（ ）

- A. $0 < k < \frac{1}{2}$ B. $0 < k < 1$ C. $0 < k < 2$ D.

$$0 < k < 4$$

【答案】B

【解析】

【分析】设一次函数 $y = x + 2$ 的图象上的点坐标为 $(x, x + 2)$ ，可知 $x + 2 = \frac{k}{-x}$ 有两个

解，即 $x^2 + 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，再由一元二次方程根的判别式列不等式可解得答案.

【详解】解：设一次函数 $y = x + 2$ 的图象上的点坐标为 $(x, x + 2)$ ，它关于 y 轴的对称点坐标为 $(-x, x + 2)$ ，

根据题意， $x + 2 = \frac{k}{-x}$ 有两个解，即 $x^2 + 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0, \text{ 即 } 2^2 - 4k > 0,$$

解得 $k < 1$,

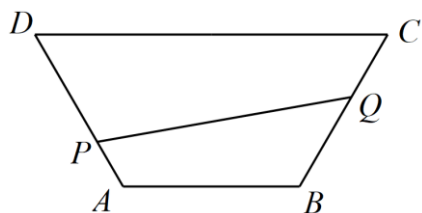
$$\because k > 0,$$

$$\therefore 0 < k < 1,$$

故选：B.

【点睛】本题考查一次函数，反比例函数图象上点坐标的特征，涉及一元二次方程根的判别式，解题的关键是理解题意，把所求问题转化为判断一元二次方程根的情况.

10. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $\angle C = \angle D = 60^\circ$ ， $AB = 6\text{cm}$ ， $CD = 12\text{cm}$ ，点 P 从 A 点出发，沿 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 以 1cm/s 的速度运动；点 Q 从 B 点出发，沿 $B \rightarrow C \rightarrow D$ 以 2cm/s 的速度运动，直到 P 与 Q 相遇就停止运动. 在运动过程中，四边形 $ABQP$ 的面积的最大值为（ ）



- A. $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ B. $21\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. $\frac{153\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$ D. $\frac{159\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$

$$\frac{159\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$$

【答案】C

【解析】

【分析】作 $AE \perp CD$ 于 E ，作 $BF \perp CD$ 于 F ，可求得 AD ， BC ， AE 的值，进而求得四边形 $ABCD$ 的面积；当点 Q 在 AC 上时，当点 Q 和点 C 重合时，四边形 $ABQP$ 的面积 $= 18\sqrt{3}$ ，当点 Q 在 CD 上，点 P 在 AP 上时，设四边形 $ABQP$ 的面积为 S ，求得

$$S = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{9}{2} \right)^2 + \frac{153\sqrt{3}}{8} \text{ 根据二次函数的性质即可求解.}$$

【详解】解：如图 1，

作 $AE \perp CD$ 于 E ，作 $BF \perp CD$ 于 F ，

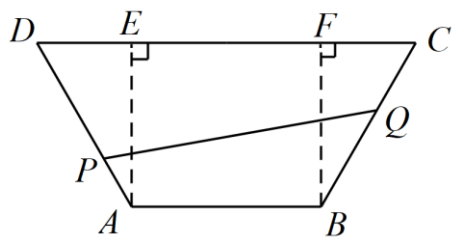


图1

$$\therefore \angle BFE = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel BF,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 是平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $AEFB$ 是矩形,

$$\therefore EF = AB = 6, \quad AE = BF,$$

$$\because \angle C = \angle D,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DE = CF = 3,$$

$$\therefore AD = BC = 2CF = 6, \quad AE = BF = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积 } S = \frac{(6+12) \times 3\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

如图 2,

当点 Q 在 BC 上时,

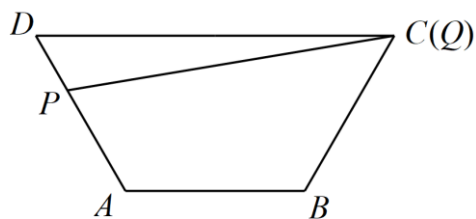


图2

当点 Q 和点 C 重合时, 四边形 $ABQP$ 的面积最大. 此时 $AP = PQ = 3$,

$$\therefore \text{四边形 } ABQP \text{ 的面积} = 27\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

如图 3,

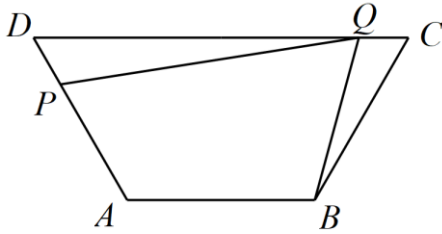


图3

当点 Q 在 CD 上，点 P 在 AD 上时，设四边形 $ABQP$ 的面积为 S ，

$$\therefore S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} BC \cdot CQ \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times (2t - 6) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (2t - 6),$$

$$S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2} DQ \cdot DP \cdot \sin D = \frac{\sqrt{3}}{4} (18 - 2t) \cdot (6 - t)$$

$$\therefore S = 27\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} (2t - 6) - \frac{\sqrt{3}}{4} (18 - 2t) \cdot (6 - t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{153\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{9}{2} \text{ 时, } S \text{ 最大, 最大值为 } \frac{153\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore \frac{153\sqrt{3}}{8} > 18\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{最大值为 } \frac{153\sqrt{3}}{8}$$

故选：C.

【点睛】本题考查了解直角三角形，二次函数及其图象的性质等知识，解决问题的关键是分类讨论。

二、填空题（本大题共 8 小题，不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡上相应的位置）

11. 分解因式： $x^3 - 2x^2y + xy^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $x(x-y)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式 x ，再对余下的多项式利用完全平方公式继续分解。

【详解】解： $x^3 - 2x^2y + xy^2$,

$$= x(x^2 - 2xy + y^2),$$

$$= x(x-y)^2.$$

故答案为： $x(x-y)^2$.

【点睛】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取

公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

12. 我市 2021 年 GDP 总量为 14000 亿元，14000 这个数据用科学记数法可表示为

_____.

【答案】 1.4×10^4

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

【详解】解： $14000 = 1.4 \times 10^4$.

故答案为： 1.4×10^4 .

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

13. 二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】利用加减消元法求解方程组即可.

【详解】解： $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \text{ ①} \\ 2x + y = 5 \text{ ②} \end{cases}$

②-①得： $4y = 4$,

解得： $y = 1$,

将 $y = 1$ 代入②得 $2x + 1 = 5$,

解得： $x = 2$,

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$,

故答案为： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

【点睛】题目主要考查利用加减消元法解二元一次方程组，熟练掌握运算法则是解题关键.

14. 数学中很多图形拥有对称之美，请你在所学习的几何图形中，写出一个既是中心对称图

形又是轴对称图形的图形：_____.

【答案】圆（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念“如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形”与中心对称图形的概念“把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形”求解.

【详解】解：圆既是中心对称图形又是轴对称图形的图形，
故答案为：圆（答案不唯一）.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形，解题的关键是熟记轴对称图形和中心对称图形的概念.

15. 下列命题中，真命题有_____.（请填写命题前的标号）

①有公共顶点的两个角是对顶角；②三角形中最大的内角是直角；③有一个角是直角的菱形是正方形；④两直线平行，同旁内角互补.

【答案】③④##④③

【解析】

【分析】根据对顶角定义，三角形分类，正方形判定，平行线性质的逐项判断.

【详解】解：有公共顶点的两个角不一定是对顶角，故①是假命题；
三角形中最大的内角不一定是直角，故②是假命题；
有一个角是直角的菱形是正方形，故③是真命题；
两直线平行，同旁内角互补，故④是真命题；
 $\therefore$ 真命题有：③④；
故答案为：③④.

【点睛】本题考查命题与定理，解题的关键是掌握教材上相关的概念和定理.

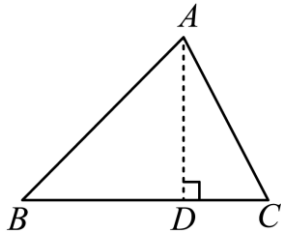
16. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， $AB = \sqrt{6}$ ，则 $AC =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于点 D ，根据三角形内角和定理，得到 $\angle BAD = \angle B$ ，进而得到 $AD = BD$ ，再利用勾股定理求得 $BD = AD = \sqrt{3}$ ，然后解直角三角形即可求解.

【详解】解：过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于点 D ，



$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ADC - \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{2}BD = \sqrt{2}AD = \sqrt{6},$$

$$\therefore BD = AD = \sqrt{3},$$

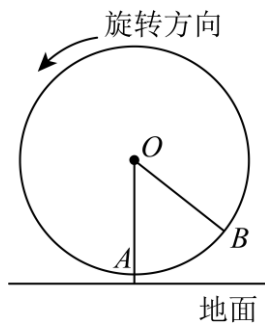
$$\because \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，等角对等边，勾股定理，解直角三角形，熟练掌握勾股定理是解题关键.

17. 如图，某游乐场的大型摩天轮的半径是 20m，摩天轮的中心离地面距离为 20.5m，摩天轮旋转 1 周需要 18min. 小明乘坐摩天轮从底部 A 处出发开始观光，已知 B 处离地面的距离为 10.5m，小明第一次到达 B 处需要_____ min.



【答案】3

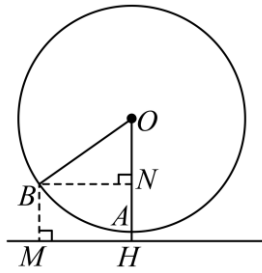
【解析】

【分析】过 B 作地面所在直线的垂线 BM，垂足为 M，BN ⊥ OA 于 N，证明四边形

BMHN 是矩形，由锐角三角函数定义求出 $\cos O = \frac{ON}{OB} = \frac{1}{2}$ ，得 $\angle O = 60^\circ$ ，再列式计算

可得答案.

【详解】解：过 B 作地面所在直线的垂线 BM，垂足为 M，BN ⊥ OA 于 N，如图：



根据题意， $OH = 20.5\text{m}$ ， $OA = OB = 20\text{m}$ ， $BM = 10.5\text{m}$ ，

$$\therefore \angle BMH = \angle BNH = \angle NHM = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BMHN$ 是矩形，

$$\therefore BM = NH = 10.5\text{m}, \quad \angle BNH = 90^\circ = \angle BNO,$$

$$\therefore ON = OH - NH = 20.5 - 10.5 = 10(\text{m}),$$

$$\therefore \cos O = \frac{ON}{OB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

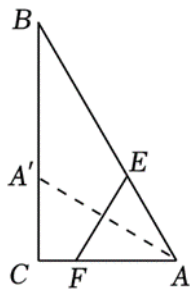
$$\therefore \angle O = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{小明第一次到达 } B \text{ 处需要 } 18 \times \frac{60}{360} = 3 \text{ min}$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是读懂题意，画出图形，求出 AB 所对的圆心角.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 4$ ，点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 上，点 A 关于 EF 的对称点 A' 落在 BC 上，设 $CA' = x$. 若 $AE = AF$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ；设 $AE = y$ ，请写出 y 关于 x 的函数表达式： $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 ①. $\sqrt{5}-1$ ②. $y = \frac{\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}}{4x + 4}$

【解析】

【分析】连接 $A'E$ 、 $A'F$ ，由点 A 关于 EF 的对称点 A' 落在 BC 上， $AE = AF$ ，可得 $A'E = AE = A'F = AF$ ，四边形 $AEA'F$ 是菱形，即知 $A'B = 2A'E$ ，而 $A'C = x$ ，在

Rt $\triangle A'CF$ 中，可得 $x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2$ ，解得 $x = \sqrt{5} - 1$ ；若 $AE = y$ ，过 E 作

$EH \perp BC$ 于 H ，由 $\triangle BHE \sim \triangle BCA$ ，可得 $BH = 4 - \frac{2\sqrt{5}}{5}y$ ， $EH = 2 - \frac{\sqrt{5}}{5}y$ ，在

Rt $\triangle A'HE$ 中，有 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - x\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}y\right)^2 = y^2$ 可得答案.

【详解】连接 $A'E$ 、 $A'F$ ，如图：



$\because$ 点 A 关于 EF 的对称点 A' 落在 BC 上

$\therefore A'E = AE$ ， $A'F = AF$

$\because AE = AF$

$\therefore A'E = AE = A'F = AF$

$\therefore$ 四边形 $AEA'F$ 菱形

$\therefore A'E \perp AC$

$\therefore \angle BA'E = \angle C = 90^\circ$

$\therefore \tan B = \frac{A'E}{A'B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore A'B = 2A'E$

$\because AC = x$

$\therefore A'B = 4 - x$

$\therefore A'E = \frac{1}{2}A'B = 2 - \frac{1}{2}x = A'F = AF$

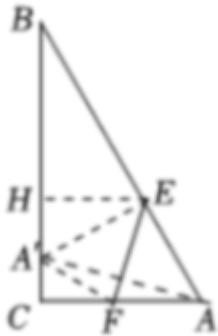
$\therefore CF = AC - AF = 2 - (2 - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}x$

在 Rt $\triangle A'CF$ 中， $A'C^2 + CF^2 = A'F^2$

$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2$

解得 $x = \sqrt{5} - 1$ 或 $x = -\sqrt{5} - 1$ （舍去），

若 $AE = y$ ，过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ，如图：



$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 2, BC = 4$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{5} - y$$

$$\because \angle BHE = 90^\circ = \angle C, \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle BHE \sim \triangle BCA$$

$$\therefore \frac{BH}{BC} = \frac{HE}{AC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\therefore BH = 4 - \frac{2\sqrt{5}}{5}y, EH = 2 - \frac{\sqrt{5}}{5}y$$

$$\therefore AH = BC - BH - AC = \frac{2\sqrt{5}}{5}y - x$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHE \text{ 中, } \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - x\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}y\right)^2 = y^2$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}}{4x + 4}$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{5} - 1, y = \frac{\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}}{4x + 4}$$

【点睛】本题考察勾股定理，相似三角形的性质与判定，涉及直角三角形中的翻折问题，解题的关键是掌握翻折的性质，利用相似三角形的性质及勾股定理列方程解决问题。

三、解答题（本大题共 10 小题，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤等）

19. 计算：

$$(1) |-5| + (-2)^{-1} + \tan 45^\circ;$$

$$(2) \frac{m-6}{m^2-4} - \frac{1}{2-m}.$$

【答案】(1) 5.5 (2) $\frac{2}{m+2}$

【解析】

【分析】(1) 实数的混合运算，先计算绝对值、负指数幂、特殊角的三角函数值即可求解；

(2) 异分母分式的加法法则，先通分再化简即可求解。

【小问 1 详解】

解：原式 $= 5 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 4.5 + 1 = 5.5.$

【小问 2 详解】

解：原式 $= \frac{m-6}{(m+2)(m-2)} + \frac{1}{m-2} = \frac{m-6}{(m+2)(m-2)} + \frac{m+2}{(m+2)(m-2)}$
 $= \frac{(m-6)+(m+2)}{(m+2)(m-2)} = \frac{2m-4}{(m+2)(m-2)} = \frac{2(m-2)}{(m+2)(m-2)} = \frac{2}{m+2}.$

【点睛】本题主要考查了实数混合运算及分式的加法，解题关键是熟练掌握绝对值、负指数幂、特殊角的三角函数值及异分母分式的加法法则。

20. 计算题

(1) 解方程： $x^2+6x-1=0$ ；

(2) 解不等式组： $\begin{cases} 6x-5 \leq 7 \\ 2x+1 > \frac{3x-1}{2} \end{cases}$

【答案】(1) $x_1 = -3+\sqrt{10}$ ， $x_2 = -3-\sqrt{10}$ ；

(2) $-3 < x \leq 2$

【解析】

【分析】(1) 根据公式法解一元二次方程；

(2) 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集。

【小问 1 详解】

解： $x^2+6x-1=0$

$a=1$ ， $b=6$ ， $c=-1$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 40$ ，

$$\therefore \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10},$$

$$\therefore x_1 = -3 + \sqrt{10}, \quad x_2 = -3 - \sqrt{10};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \begin{cases} 6x - 5 \leq 7 \text{ ①} \\ 2x + 1 > \frac{3x - 1}{2} \text{ ②} \end{cases}$$

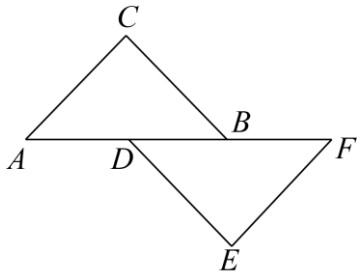
解不等式①得: $x \leq 2$,

解不等式②得: $x > -3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为: $-3 < x \leq 2$,

【点睛】本题考查了解一元二次方程，解一元一次不等式组，正确的计算是解题的关键.

21. 已知，点 B, D 在线段 AF 上， $AD = BF$ ， $BC \parallel DE$ 且 $BC = DE$.



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle FDE$;

(2) 连接 AE, CF ，求证: 四边形 $AEFC$ 是平行四边形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

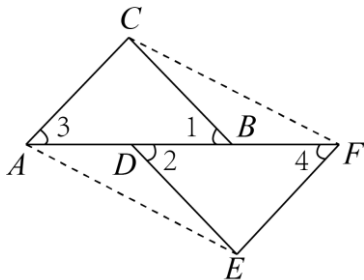
【解析】

【分析】(1) 由 $AD = BF$ 得到 $AD + DB = BF + DB$ ，即 $AB = FD$ ，由 $BC \parallel DE$ 得到 $\angle 1 = \angle 2$ ，即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$;

(2) 连接 AE, CF ，由 (1) 知 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ ，可得 $\angle 3 = \angle 4$ ， $AC = EF$ ，则 $AC \parallel EF$ ，即可证得结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示:



$\because AD = BF$,

$$\therefore AD + DB = BF + DB.$$

$$\therefore AB = FD.$$

$$\because BC \parallel DE,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FDE$ 中，

$$\because \begin{cases} AB = FD \\ \angle 1 = \angle 2, \\ BC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FDE \text{ (SAS)}.$$

【小问 2 详解】

连接 AE ， CF ，

由 (1) 知 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ ，

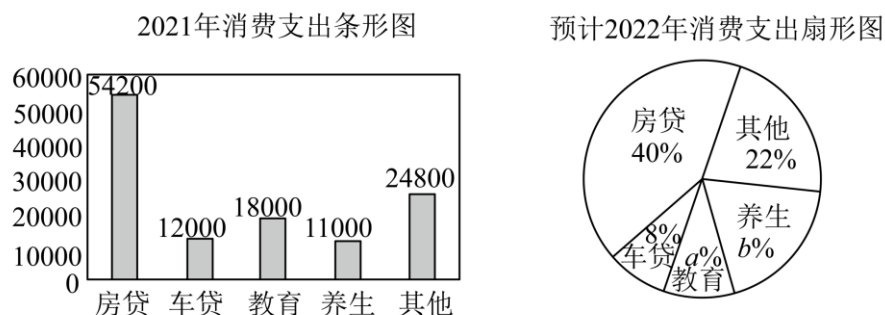
$$\therefore \angle 3 = \angle 4, AC = EF.$$

$$\therefore AC \parallel EF.$$

$\therefore$ 四边形 $AEFC$ 是平行四边形.

【点睛】此题考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定等知识，证明 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ 是解题的关键.

22. (某校研究性学习小组根据某居民家庭全年消费支出的统计数据，制作了 2021 年消费支出条形图(单位：元)和预计 2022 年消费支出扇形图(如图). 预计 2022 年该居民家庭全年消费支出比 2021 年消费支出提高 10%. 解答下列问题：



(1) 2022 年的“其他类消费支出”与 2021 年的“其他类消费支出”哪一年高？

(2) 预计 2022 年“养生支出”为 26400 元，则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 预计 2022 年“教育支出”比 2021 年减少多少元？

【答案】(1) 2022 年“其他类消费支出”高.

(2) 20. (3) 4800 元.

【解析】

【分析】(1) 根据“预计 2022 年该居民家庭全年消费支出比 2021 年消费支出提高 10%”

求出 2022 年该居民全年消费支出，再列式计算 2022 年那边的“其他类消费支出”，比较即可得出答案.

(2) 由 2022 年“养生支出”为 26400 元，列式算出 2022 年“养生支出”的百分比，即可得到答案.

(3) 先求出 2022 年“教育支出”，在用 2021 年“教育支出”减去 2022 年“教育支出”即可.

【小问 1 详解】

∵ 预计 2022 年该居民家庭全年消费支出比 2021 年消费支出提高 10%.

∴ 2022 年该居民家庭全年消费支出为

$$(54200+12000+18000+11000+24800) \times (1+10\%) = 132000 \text{ (元)}.$$

∴ 2022 年的“其他类消费支出”是 $132000 \times 22\% = 29040$ (元).

而 $29040 > 24800$,

∴ 2022 年“其他类消费支出”高.

【小问 2 详解】

由 (1) 可知，2022 年该居民个家庭全年消费支出为 132000 元.

$$\frac{26400}{132000} \times 100\% = 20\%,$$

$$\therefore b = 20.$$

故答案为 20.

【小问 3 详解】

预计 2022 年“教育支出”为 $13200 \times (1 - 40\% - 8\% - 20\% - 20\%) = 13200$ (元).

$$\therefore 18000 - 13200 = 4800 \text{ (元)}.$$

∴ 预计 2022 年“教育支出”比 2021 年减少 4800 元.

【点睛】 本题考查扇形统计图和条形统计图，解题的关键是读懂题意，能从统计图中获取有用的信息.

23. A 袋中有 3 白球 1 红球，B 袋中有 1 白球 1 红球，某人第一次从 A 袋中任意摸出一个球，放入 B 袋中，再将 B 袋中的球摇匀后第二次从 B 袋中任意摸出一个球，放入 A 袋.

(1) 第一次摸出的是白球的概率是_____;

(2) 经过二次摸球后，A 袋中有 2 白球 2 红球的概率（请用“画树状图”或“列表”等方法写出分析过程）.

【答案】 (1) $\frac{3}{4}$

(2) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】（1）由概率公式直接可得答案；

（2）画树状图，列出所有可能，再用概率公式可得答案．

【小问 1 详解】

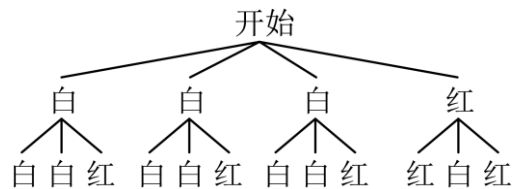
解：∵A 袋中有 3 白球 1 红球，

∴第一次从袋中任意摸出一个球，摸出是白球的概率是 $\frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$ ，

故答案为： $\frac{3}{4}$ ．

【小问 2 详解】

解：由题可得：



由树状图可知，共有 12 种等可能结果，满足 A 袋中有 2 白球 2 红球（第一次摸到白球，第二次摸到红球）的结果有 3 种，

∴经过二次摸球后，A 袋中有 2 白球，2 红球的概率为： $\frac{1}{4}$ ．

【点睛】本题考查画树状图进行概率的计算，熟练掌握概率公式是解题的关键．

24. 某水果店出售一种水果，每箱定价 58 元时，每周可卖出 300 箱．试销发现：每箱水果每降价 1 元，每周可多卖出 25 箱；每涨价 1 元，每周将少卖出 10 箱．已知每箱水果的进价为 35 元，每周每箱水果的平均损耗费为 3 元．

（1）若不进行价格调整，这种水果的每周销售利润为多少元？

（2）根据以上信息，你认为应当如何定价才能使这种水果的每周销售利润最多？

【答案】（1）若不进行价格调整，这种水果每周销售利润为 6000 元；

（2）当每箱水果定价为 54 元时，这种水果的每周销售利润最大为 6400 元．

【解析】

【分析】（1）根据已知列式计算即可；

（2）分两种情况：若每箱水果降价 x 元，这种水果的每周销售利润为 y 元，可得：

$y = (58 - 35 - 3 - x)(300 + 25x) = -25(x - 4)^2 + 6400$ ，若每箱水果涨价 x' 元，这种水果的每周销售利润为 y' 元，有

$y' = (58 - 35 - 3 + x')(300 - 10x') = -10(x' - 5)^2 + 6250$ ，由二次函数性质可得答案．

【小问 1 详解】

解：∵ $58 - 35 - 3 = 20$, $20 \times 300 = 6000$ （元），

∴ 若不进行价格调整，这种水果每周销售利润为 6000 元；

【小问 2 详解】

若每箱水果降价 x 元，这种水果的每周销售利润为 y 元，

根据题意得： $y = (58 - 35 - 3 - x)(300 + 25x) = -25(x - 4)^2 + 6400$ ，

由二次函数性质可知，当 $x = 4$ 时， y 的最大值为 6400 元；

若每箱水果涨价 x' 元，这种水果的每周销售利润为 y' 元，

根据题意得： $y' = (58 - 35 - 3 + x')(300 - 10x') = -10(x' - 5)^2 + 6250$ ，

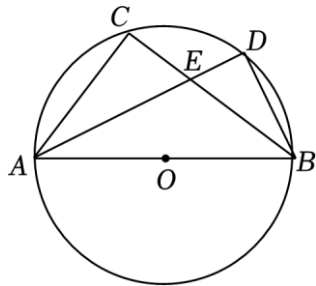
由二次函数性质可知，当 $x' = 5$ 时， y' 的最大值为 6250 元；

综上所述，当每箱水果定价为 54 元时，这种水果的每周销售利润最大为 6400 元。

【点睛】本题考查二次函数的应用，解题的关键是读懂题意，分情况列出函数关系式。

25. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点， D 为 BC 的中点， AD 交 BC 于点

E 。 $AB = 5$ ， $\tan \angle CAD = \frac{1}{2}$ 。



(1) 求证： $\triangle DBE \sim \triangle DAB$ ；

(2) 求线段 BE 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $BE = \frac{5}{2}$ ，见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 D 为 BC 的中点，可得 $\angle DBE = \angle DAB$ ，即可得到结论；

(2) 根据题中信息求出 $\angle CAD = \angle DAB$ ，可得 $\tan \angle DAB = \frac{1}{2} = \frac{DB}{DA}$ ，设 $DB = x$ ，则

$DA = 2x$ ，根据勾股定理求出 AB ，再结合 $\triangle DBE \sim \triangle DAB$ (AA) 即可求出答案。

【小问 1 详解】

证明：∵ D 为 BC 的中点，

∴ $BD = DC$ ，

∴ $\angle DBE = \angle DAB$ ，

∵ $\angle D = \angle D$ ，

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DAB;$$

【小问 2 详解】

解：∵ D 为 BC 的中点，

$$\therefore BD = DC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAB,$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{1}{2}, \quad AB \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径,}$$

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \frac{1}{2} = \frac{DB}{DA},$$

设 $DB = x$ ，则 $DA = 2x$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore x = \sqrt{5},$$

$$\therefore DB = \sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{DB}{BE} = \frac{AD}{AB}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{5}}{BE} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{解得: } BE = \frac{5}{2};$$

【点睛】本题考查相似三角形的性质和判定，涉及圆周角定理，勾股定理等的应用，掌握相似三角形判定定理是关键。

26. “黄金分割”给人以美感，它在建筑、艺术等领域有着广泛的应用．如图 1，点 B 把线段 AC 分成两部分，如果 $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$ ，那么称线段 AC 被点 B 黄金分割，点 B 为线段 AC

的黄金分割点． AB 与 AC 的比称为黄金比，它们的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ．请在图 2 中完成相应的问题．已知， $\angle MON = 60^\circ$ ，点 A 在 OM 边上， $OA = 4$ ．

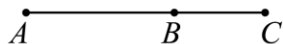


图1

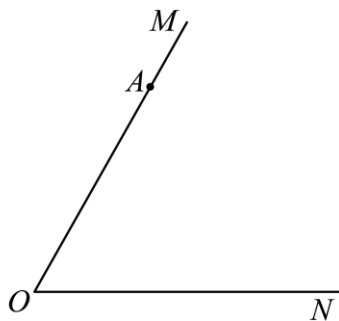


图2

(1) 请在 ON 边上用无刻度的直尺和圆规作出点 B ，使得 OB 与 OA 的比为黄金比；（不写作法，保留作图痕迹）

(2) $\triangle AOB$ 的面积 = _____.

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$

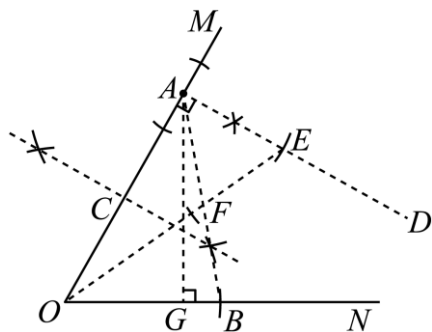
【解析】

【分析】(1) 先作线段 OA 的垂直平分线，交线段 OA 于点 C ，再过点 A 作 OA 的垂线 AD ，以点 A 为圆心， AC 的长为半径画弧，交射线 AD 于点 E ，连接 OE ，然后以点 E 为圆心， AE 的长为半径画弧，交线段 OE 于点 F ，最后以点 O 为圆心， OF 的长为半径画弧，交射线 ON 于点 B ，如图，点 B 即为所求。

(2) 过点 A 作 $AG \perp OB$ ，由正弦函数得出 $AG = 2\sqrt{3}$ ，然后求三角形面积即可。

【小问 1 详解】

解：先作线段 OA 的垂直平分线，交线段 OA 于点 C ，再过点 A 作 OA 的垂线 AD ，以点 A 为圆心， AC 的长为半径画弧，交射线 AD 于点 E ，连接 OE ，然后以点 E 为圆心， AE 的长为半径画弧，交线段 OE 于点 F ，最后以点 O 为圆心， OF 的长为半径画弧，交射线 ON 于点 B ，如图，点 B 即为所求。



理由：根据作法得： $AD \perp OA$, $EF = AE = AC = \frac{1}{2}OA = 2$, $OB = OF$,

$$\therefore OE = \sqrt{OA^2 + AE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore OF = OE - EF = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore OB = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\therefore OB$ 与 OA 的比为黄金比；

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AG \perp OB$ ，

$$\because \angle MON = 60^\circ, OA = 4.$$

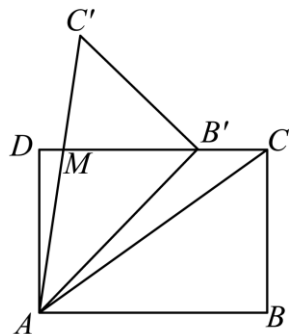
$$\therefore AG = \sin \angle AOB \times AO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \times AG = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{5} - 2) \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{3},$$

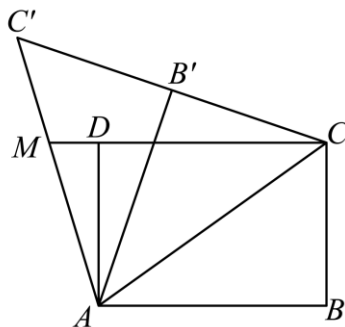
故答案为： $2\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了黄金分割，相似三角形的判定和性质，复杂作图，勾股定理等知识，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

27. 如图 1，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $AD = 3$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 位置，设 AC' 交直线 CD 交于点 M .



(图1)



(图2)

(1) 当点 B' 恰好落在 DC 边上时，求 $\triangle AB'C'$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积；

(2) 如图 2，当点 C 、 B' 、 C' 恰好在一一直线上时，求 DM 的长度.

【答案】(1) $\frac{25}{6}$

(2) $\frac{5}{33}$

【解析】

【分析】(1) 过点 C' 作 $C'H \perp DC$ 于点 H ，根据旋转的性质及勾股定理得出 $DB' = 4$ ，再由相似三角形的判定和性质得出 $C'H = \frac{12}{5}$ ，确定面积之间的关系即可求解；

(2) 过点 C 作 $CN \perp AC'$ ，由旋转的性质及勾股定理确定 $AC' = AC = \sqrt{34}$ ，

$\angle AB'C' = \angle B = 90^\circ = \angle AB'C$, $B'C' = BC = 3$, 再由三角形等面积法得出 $CN = \frac{30}{\sqrt{34}}$, 然

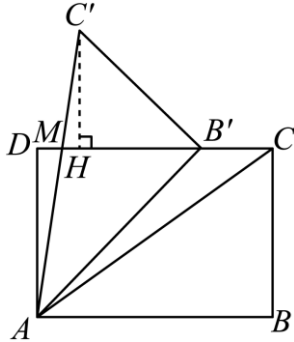
后利用相似三角形的判定和性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD = 5, AD = BC = 3,$$

过点 C' 作 $C'H \perp DC$ 于点 H , 如图所示:



$\because \square ABC$ 绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore AB' = AB = 5, B'C' = BC = 3,$$

$$\therefore DB' = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = 4,$$

$$\because \angle C'B'H = 90^\circ - \angle DB'A = \angle DAB', \angle CHB' = 90^\circ = \angle D,$$

$$\therefore \square C'HB' \sim \square B'DA,$$

$$\therefore \frac{C'H}{DB'} = \frac{B'C'}{AB'} \text{ 即 } \frac{C'H}{4} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore C'H = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \frac{S_{\square B'C'M}}{S_{\square AB'M}} = \frac{C'H}{AD} = \frac{\frac{12}{5}}{3} = \frac{4}{5},$$

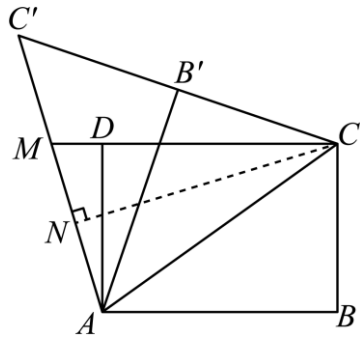
$$\because S_{\square AB'C} = S_{\square B'C'M} + S_{\square AB'M} = \frac{1}{2} AB' \cdot B'C' = \frac{15}{2},$$

$$\therefore S_{\square AB'M} = \frac{5}{9} S_{\square AB'C} = \frac{25}{6},$$

$\therefore \triangle AB'C'$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 $\frac{25}{6}$;

小问 2 详解】

过点 C 作 $CN \perp AC'$, 如图所示:



$\because \triangle ABC$ 绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore AB' = AB = 5, AC' = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{34},$$

$$\angle AB'C' = \angle B = 90^\circ = \angle AB'C, B'C' = BC = 3,$$

$$\therefore CC' = 2B'C' = 6,$$

$$\because 2S_{\triangle ACC'} = CC' \cdot AB' = AC' \cdot CN,$$

$$\therefore CN = \frac{CC' \cdot AB'}{AC'} = \frac{6 \times 5}{\sqrt{34}} = \frac{30}{\sqrt{34}},$$

$$\because \angle CMN = \angle AMD, \angle CNM = \angle ADM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle AMD,$$

$$\therefore \frac{CN}{AD} = \frac{CM}{AM},$$

$$\therefore \frac{CN^2}{AD^2} = \frac{CM^2}{AM^2} \text{ 即 } CN^2 \cdot AM^2 = AD^2 \cdot CM^2,$$

设 $DM = x$,

$$\therefore \left(\frac{30}{\sqrt{34}} \right)^2 \times (x^2 + 3^2) = 3^2 (x + 5)^2,$$

$$\text{整理得 } 33x^2 - 170x + 25 = 0,$$

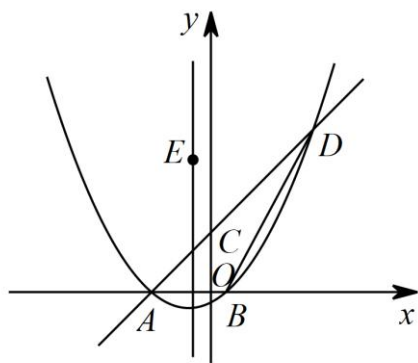
$$\text{解得: } x = 5 \text{ (舍去) 或 } x = \frac{5}{33},$$

$$\therefore DM \text{ 的长度为 } \frac{5}{33}.$$

【点睛】题目主要考查旋转的性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，矩形的性质等，理解题意，作出相应辅助线，综合运用这些知识点是解题关键。

28. 如图，二次函数 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B (A 在 B 左侧)，点 $C(3, \frac{3}{4})$ ，

点 E 在对称轴上。



- (1) 求 A 、 B 两点坐标；
- (2) 设直线 AC 与抛物线的另一个交点为 D ，求点 D 坐标；
- (3) 设 E 关于直线 BD 、 CD 的对称点分别为 F 、 G ，求以 GF 为直径的圆面积的最小值。

【答案】(1) $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ；

(2) $D(5, 8)$ ；

(3) 以 GF 为直径的圆面积最小为 $\frac{18}{5}\pi$

【解析】

【分析】(1) 令 $y=0$ ，解方程即可求解；

(2) 用待定系数法求出直线 AC 对应的函数表达式为 $y=x+3$ ，再联立解析式可得 $D(5, 8)$ ；

(3) 设 EF 交 BD 于点 P ，抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 的对称轴交 x 轴于点 Q ，直线 AD 交 EQ 于 N ，连接 NG ， EG ，过 D 作 $DH \perp x$ 轴于 H ，过 F 作 $FM \perp EQ$ 于 M ，求出 $N(-1, 2)$ ，由 E ， G 关于 AD 对称，可得 $\angle ENG = 90^\circ$ ， $\square ENG$ 是等腰直角三角形，设 $EM = a$ ， $EQ = b$ ，则 $E(-1, b)$ ， $G(b-3, 2)$ ，证明 $\square DBH \sim \square FEM$ ，求得 F, P 的坐标，得出 FG^2 关于 b 的二次函数解析式，进而根据二次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：由 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ，

当 $y=0$ ，即 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

解得： $x_1 = 1, x_2 = 3$

$\therefore A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$

【小问 2 详解】

设直线 AC 对应的函数表达式为 $y = kx + t$

$A(-3, 0)$, $C(0, 3)$, 代入得:

$$\begin{cases} -3k + t = 0 \\ t = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 对应的函数表达式为 $y = x + 3$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ y = x + 3 \end{cases},$$

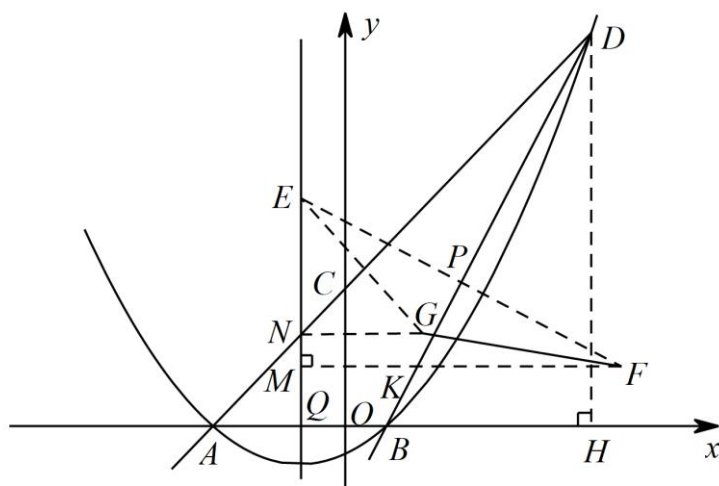
$$\text{解得} \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases},$$

$\therefore D(5, 8)$;

【小问 3 详解】

设 EF 交 BD 于点 P , 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 的对称轴交 x 轴于点 Q , 直线 AD 交 EQ 于

N , 连接 NG , EG , 过 D 作 $DH \perp x$ 轴于 H , 过 F 作 $FM \perp EQ$ 于 M , 如图:



$$\text{由 } y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$\text{抛物线对称轴为直线 } x = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{4}} = -1,$$

在 $y = x + 3$ 中，令 $x = -1$ 得 $y = 2$ ，

$$\therefore N(-1, 2),$$

$$\because OA = OC = 3,$$

$$\therefore \angle CAO = 45^\circ = \angle ANQ = \angle END,$$

$\because E, G$ 关于 AD 对称，

$$\therefore \angle END = \angle GND = 45^\circ, \quad EN = GN,$$

$\therefore \angle ENG = 90^\circ$ ， $\square ENG$ 是等腰直角三角形，

设 $EM = a, EQ = b$ ，则 $E(-1, b)$ ，

$$\therefore EN = b - 2 = EG,$$

$$\therefore G(b-3, 2),$$

$\because E, F$ 关于 BD 对称，

$\therefore \angle KPF = 90^\circ$ ， P 为 EF 的中点，

$$\therefore \angle DBH = \angle PKF = 90^\circ - \angle PFK = \angle MEF,$$

$$\because \angle DHB = 90^\circ = \angle EMF,$$

$$\therefore \square DBH \sim \square FEM,$$

$$\therefore \frac{BH}{DH} = \frac{EM}{FM}$$

$$\because B(1, 0), \quad D(5, 8),$$

$$\therefore BH = 4, \quad DH = 8,$$

$$\therefore \frac{EM}{FM} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore FM = 2EM = 2a,$$

$$\therefore F(2a-1, b-a),$$

$\because P$ 为 EF 的中点，

$$\therefore P\left(a-1, b-\frac{a}{2}\right)$$

由 $B(1, 0)$ ， $D(5, 8)$ 可得直线 BD 解析式为 $y = 2x - 2$ ，

把 $P\left(a-1, b-\frac{a}{2}\right)$ 代入 $y = 2x - 2$ 得：

$$2(a-1) - 2 = b - \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = \frac{2b+8}{5}$$

$$\therefore F\left(\frac{4b+11}{5}, \frac{3b-8}{5}\right)$$

$$\therefore FG^2 = \left(b-3-\frac{4b+11}{5}\right)^2 + \left(2-\frac{3b-8}{5}\right)^2$$

$$= \frac{2}{5}b^2 - \frac{32}{5}b + 40$$

$$= \frac{2}{5}(b-8)^2 + \frac{72}{5}$$

$$\therefore \frac{2}{5} > 0,$$

$$\therefore FG^2 \text{ 的最小值为 } \frac{72}{5},$$

$$\therefore \text{以 } GF \text{ 为直径的圆面积最小为 } \pi \left(\frac{FG}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} FG^2 = \frac{18}{5} \pi .$$

【点睛】 本题考查二次函数综合应用，待定系数法，相似三角形判定与性质，对称变换等知识，解题的关键是用含字母的代数式表示相关点坐标和相关线段的长度.