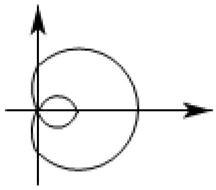
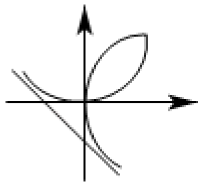
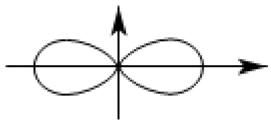
江苏省无锡市2023年滨湖区江南大学附属实验中学中考数学二模试卷

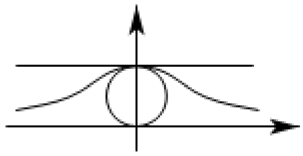
一、选择题（本大题共9小题，每题3分，共计30分）

1. 数学世界奇妙无穷，其中曲线是微分几何的研究对象之一，下列数学曲线是中心对称图形的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据中心对称图形的概念判断．把一个图形绕某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．

【详解】解：选项A、B、D都不能找到这样　一个点，使图形绕某一点旋转180°后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形，选项C能找到这样的一个点，使图形绕某一点旋转180°后与原来的图形重合，所以是中心对称图形，

故选：C．

【点睛】本题考查的是中心对称图形的概念．中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180度后与自身重合．

2. 下列运算正确的是（　　）

A. $a^3+a^4=a^7$

B. $a^3\bullet a^4=a^{12}$

C. $(a^3)^4=a^7$

D. $(-2a^3)^4=16a^{12}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项的法则，同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方的法则计算即可．

【详解】解：A、a^3与a^4不是同类项不能合并，故错误，不符合题意；

B、$a^3\bullet a^4=a^7$，故错误，不符合题意；

C、$(a^3)^4=a^{12}$，故错误，不符合题意；

D、$(-2a^3)^4=16a^{12}$，故正确，符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了合并同类项，幂的乘方，同底数幂的乘法，积的乘方，熟记法则是解题的关键．

3. 如果圆锥的母线长为 5，底面半径为 2，那么这个圆锥的侧面积为（　）

A. 10　　　　B. 10π　　　　C. 20　　　　D. 20π

【答案】B

【解析】

【分析】圆锥的侧面积=底面周长×母线长÷2，据此求解即可．

【详解】解：底面圆的半径为 2，则底面周长=4π，

圆锥的侧面积=$\frac{1}{2}$×4π×5=10π．

故选：B．

【点睛】本题考查了圆锥的计算，利用了圆的周长公式和扇形面积公式求解．

4. 下列命题中：（1）两组对边分别相等的四边形是平行四边形；（2）对角线相等的平行四边形是矩形；（3）一组邻边相等的平行四边形是菱形；(4)对角线相等且互相垂直的四边形是正方形，正确的命题个数为(　　　)

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行形四边形、矩形、菱形、正方形的判定分别得出各选项是否正确即可．

【详解】解：（1）两组对边分别相等的四边形是平行四边形，根据平行四边形的判定得出，表述正确，符合题意；

（2）对角线相等的平行四边形是矩形；根据矩形的判定得出，表述正确，符合题意；

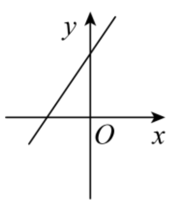
（3）一组邻边相等的平行四边形是菱形；根据菱形的判定得出，表述正确，符合题意；

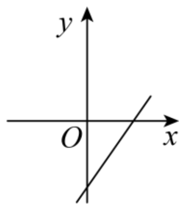
（4）对角线相等且互相垂直的平行四边形是正方形；原表述错误，不符合题意．

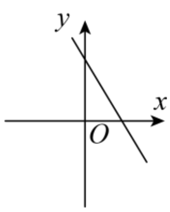
故选：C．

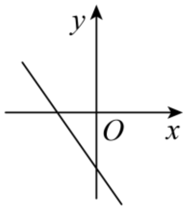
【点睛】本题主要考查命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．判断命题的真假关键是要熟悉课本中的定理．

5. 正比例函数 $y=kx\left(k\neq 0\right)$ 的图象在第二、四象限，则一次函数 $y=x-k$ 的图象大致是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据正比例函数图象所经过的象限判定 $k<0$，由此可以推知一次函数 $y=x-k$ 的图象的大致情况．

【详解】∵正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图象在第二、四象限，

∴ $k<0$，

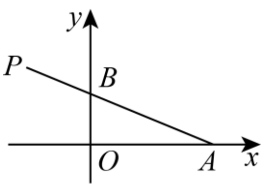
∴一次函数 $y=x-k$ 的图象与 y 轴交于正半轴，且经过第一、三象限．

观察选项，只有 A 选项正确．

故选：A．

【点睛】本题考查了正比例函数的性质以及一次函数图象与系数的关系，牢记“k＞0，b＞0⇔y=kx+b 的图象在一、二、三象限”是解题的关键．

6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴正半轴上，点 $P(-a,a)(a>0)$，连接 AP 交 y 轴于点 B．若 $AB:BP=2:1$．则 $\sin\angle PAO$ 的值是（　　）



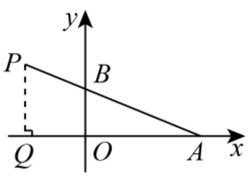
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】C

【解析】

【分析】过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，则 $PQ\parallel BO$，可得△ABO∽△APO，由 $\frac{AB}{AP}=\frac{2}{3}$ 得出 $AO=2a$，$BO=\frac{2}{3}a$，根据勾股定理求得 AB，根据正弦的定义即可求解．

【详解】解：如图所示，过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，



∴ $PQ\parallel BO$

∴△ABO∽△APO

$\therefore \dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AO}{AQ}=\dfrac{BO}{PQ}$，

$\because$ 点 $P(-a,a)(a>0)$

$\therefore PQ=QO=a$

$\because AB:BP=2:1$

$\therefore \dfrac{AB}{AP}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore AO=\dfrac{2}{3}AQ, BO=\dfrac{2}{3}PQ=\dfrac{2}{3}a$

$\because AQ=AO+OQ$

$\therefore \dfrac{AO}{AO+a}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore AO=2a$

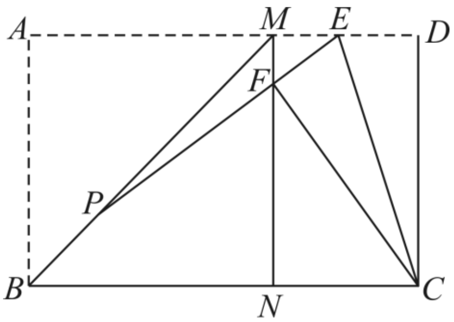
$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}a$，

$\therefore \sin\angle PAO=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故选：C.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质，求正切，熟练掌握以上知识是解题的关键.

7. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，将 AB 沿 BM 翻折，使点 A 落在 BC 上的点 N 处，BM 为折痕，连接 MN；再将 CD 沿 CE 翻折，使点 D 恰好落在 MN 上的点 F 处，CE 为折痕，连接 EF 并延长交 BM 于点 P，若 $AD=24$，$AB=15$，则线段 PB 的长等于（　　）



A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】过点P作$PG\perp MN$，$PH\perp BC$，垂足为点G、H，由折叠的性质可得$CD=CF=15$，四边形$ABNM$是正方形，利用勾股定理求得$FN=12$，再证明□PGF□□FNC可得$FG:PG:PF=9:12:15$，设$FG=9m$，则$PG=12m$，$PF=15m$，根据矩形的性质可得$HN=PG=12m$，又因为$HN=BN-BH=3+9m$，即可求出$m=1$，从而求得$PH=BH=3$，最后利用勾股定理即可求出结果.

【详解】解：过点P作$PG\perp MN$，$PH\perp BC$，垂足为点G、H，

由折叠的性质可知，四边形$ABNM$是正方形，$AB=BN=MN=AM=15$，

$CD=CF=15$，$\angle D=\angle CFE=90°$，$ED=EF$，

$\therefore NC=24-15=9$，

在Rt□FNC中，$FN=\sqrt{FC^2-CN^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

$\because \angle CFE=90°$，

$\therefore CF\perp PE$，

$\therefore \angle CFP=\angle PGF=90°$，

$\therefore \angle CFN+\angle PFG=90°$，

又$\because \angle PFG+\angle FPG=90°$，

$\therefore CFN=\angle FPG$，

$\because \angle FNC=\angle PGF=90°$，

$\therefore$□PGF□□FNC，

$\therefore FG:PG:PF=NC:FN:FC$，即$FG:PG:PF=9:12:15$，

设$FG=9m$，则$PG=12m$，$PF=15m$，

$\therefore MG=3+9m$，$GN=12-9m$，

$\because \angle PHN=\angle PGN=\angle GNH=90°$，$\angle PBH=45°$，

$\therefore$四边形$PHNG$是矩形，$BH=PH$，

$\therefore HN=PG=12m$，$BH=PH=GN=12-9m$，

$\because HN=BN-BH=15-(12-9m)=3+9m$，

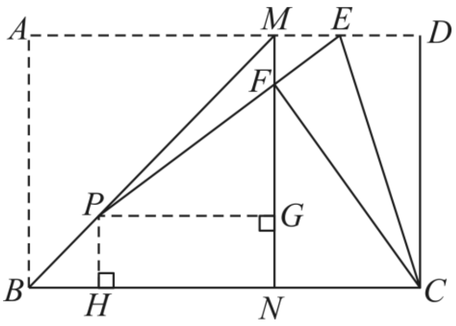
$\therefore 3+9m=12m$，

$\therefore m=1$，

$\therefore PH=BH=12-9=3$，

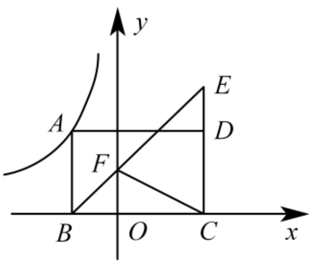
$\therefore PB=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

故选：B.



【点睛】本题考查折叠的性质、矩形的判定与性质、相似三角形的判定与性质，正方形的性质及勾股定理，作辅助线构造□PGF □□FNC 是解题的关键.

8. 如图，矩形 $ABCD$ 中，点 A 在双曲线 $y=-\frac{4}{x}$ 上，点 B，C 在 x 轴上，延长 CD 至点 E，使 $DE=\frac{1}{2}CD$ ，连接 BE 交 y 轴于点 F，连接 CF，则△BFC 的面积为（　　）



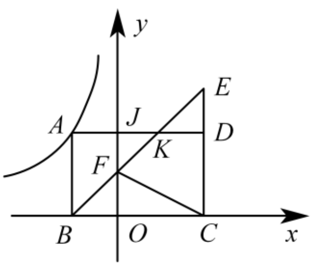
A. 2　　　B. 3　　　C. $\frac{7}{2}$　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】设 AD 交 y 轴于点 J，交 BE 于点 K，设 $DE=m$， $DK=b$，利用平行线分线段成比例推出 BC 和 JF 长度，从而求出 OF 长度，即可求出△BFC 的面积.

【详解】解：设 AD 交 y 轴于点 J，交 BE 于点 K，设 $DE=m$， $DK=b$ 则 $AB=CD=2m$.



$\because A$ 在双曲线 $y=-\frac{4}{x}$ 上，

$\therefore A\left(-\frac{2}{m},2m\right)$.

$\therefore AJ=\dfrac{2}{m}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore DK /\!/ BC$.

$\therefore \dfrac{DK}{BC}=\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore BC=AD=3b$，

$\therefore AK=2b, JK=2b-\dfrac{2}{m}$.

$\because JF /\!/ DE$，

$\therefore \dfrac{JF}{DE}=\dfrac{JK}{DK}$，

$\therefore \dfrac{JF}{m}=\dfrac{2b-\dfrac{2}{m}}{b}$，

$\therefore JF=\dfrac{2bm-2}{b}$，

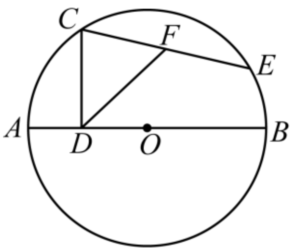
$\therefore OF=OJ-JF=2m-\dfrac{2bm-2}{b}=\dfrac{2}{b}$.

$\therefore S_{\triangle BFC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot OF=\dfrac{1}{2}\cdot 3b\cdot\dfrac{2}{b}=3$.

故答案选：B.

【点睛】本题考查了反比例函数的几何意义、矩形的性质，平行线分线段成比例定理，解题的关键在于学会利用参数解决问题，综合性比较强.

9. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，$CD\perp AB$，垂足为 D，$AD=2$，点 E 是⊙O 上的动点（不与 C 重合），点 F 为 CE 的中点，若在 E 运动过程中 DF 的最大值为 4，则 CD 的值为（　　）



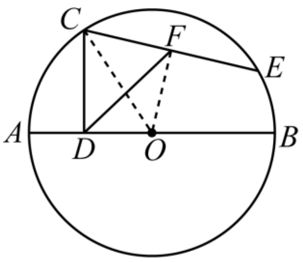
A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先判断出点 O，D，C，F 四点共圆，判断出 DF 的最大值为 OC，再求出 OC，然后根据勾股定理即可求出答案.

【详解】解：如图，



连接OC，OF，

∵点F是CE的中点，

∴$OF\perp CE$，

∴$\angle OFC=90^\circ$，

∵$CD\perp AB$，

∴$\angle ODC=90^\circ$，

∴$\angle ODC+\angle OFC=180^\circ$，

∴点O，D，C，F在以OC为直径的圆上，

∴$DF_{最大值}=OC=4$，

∵$AD=2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ODC$中，$OD=OC-AD=2$，$OC=4$，

根据勾股定理得$CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=2\sqrt{3}$，

故选A．

【点睛】此题主要考查了垂径定理，四点共圆，勾股定理，作出辅助线判断出点O，D，C，F四点共圆是解本题的关键．

二、填空题（本大题共8小题，每题3分，共计24分）

10. 分解因式：$x^3-x=$___________．

【答案】$x(x+1)(x-1)$

【解析】

【分析】本题主要考查了用提公因式以及公式法分解因式，先提出x，再利用平方差公式分解即可．

详解】解：x^3-x

$=x\left(x^2-1\right)$

$=x(x+1)(x-1)$．

故答案为：$x(x+1)(x-1)$．

11. 据统计，2023 年我国人口数约为 14 亿 4730 万，其中 4730 用科学记数法表示为 ______________．

【答案】4.73×10^{3}

【解析】

【分析】本题考查科学记数法表示较大的数，科学记数法是基础且重要知识点，必须熟练掌握．将一个数表示为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，这种记数方法叫做科学记数法，据此即可求得答案．

【详解】解：$4730=4.73\times10^{3}$，

故答案为：4.73×10^{3}

12. 命题“对顶角相等”的逆命题是 ______________．

【答案】相等的角为对顶角

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题．许多命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成“如果…那么…”形式．有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理．也考查了逆命题．

所以此题可根据交换原命题的题设与结论即可得到其逆命题．

【详解】解：命题“对顶角相等”的逆命题是“相等的角为对顶角”．

故答案为：相等的角为对顶角．

13. 请写出一个函数的表达式，使其图象是以直线 $x=-2$ 为对称轴，开口向上的抛物线：______．

【答案】$y=(x+2)^{2}$

【解析】

【分析】已知对称轴 $x=-2$，根据顶点坐标，开口方向，可写出满足条件的二次函数解析式．

【详解】解：根据题意，得二次函数的顶点坐标为$(-2，h)$，

根据顶点式，得 $y=a(x+2)^{2}+h$，

设 $a=1$，$h=0$，

则函数的表达式为 $y=(x+2)^{2}$（本题答案不唯一）．

故答案为：$y=(x+2)^{2}$（答案不唯一）．

【点睛】本题考查了二次函数的性质与解析式的关系，正确写抛物线的顶点坐标是解题的关键．

14. 小明在跳绳考核中，前 4 次跳绳成绩（次数/分钟）记录为：140，138，140，137，若要使 5 次跳绳成绩

的平均数与众数相同，则小明第 5 次跳绳成绩是______.

【答案】145

【解析】

【分析】设第 5 次跳绳成绩为 x 次/分钟，由题意易知众数为 140，然后根据平均数及众数可进行求解.

【详解】解：设第 5 次跳绳成绩为 x 次/分钟，由前 4 次跳绳成绩可知众数为 140，

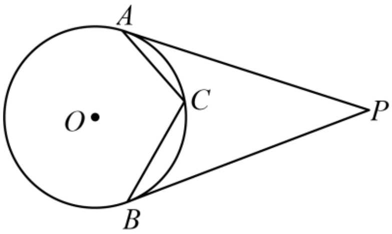
$\therefore \dfrac{140+138+140+137+x}{5}=140$，

解得：$x=145$；

故答案为 145.

【点睛】本题主要考查平均数与众数，熟练掌握平均数与众数是解题的关键.

15. 如图，PA、PB 是$\odot O$ 的两条切线，切点分别是 A、B，$\angle P=38°$，则$\angle ACB=$_____°.



【答案】109

【解析】

【分析】首先连接OA，OB，由PA、PB 是$\odot O$ 的切线，即可得$\angle PAO=\angle PBO=90°$，又由$\angle P=38°$，即可求得$\angle AOB$ 的度数，然后由圆周角定理，即可求得答案.

【详解】解：连接OA，OB，作 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角$\angle ADB$，

$\because PA$、PB 是$\odot O$ 的两条切线，

$\therefore OA\perp PA, OB\perp PB$，

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90°$，

$\because \angle AOB+\angle P=180°$，

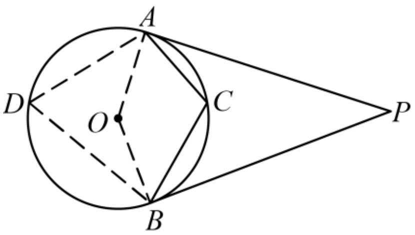
$\therefore \angle AOB=180°-38°=142°$，

$\therefore \angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=71°$，

$\because \angle ACB+\angle ADB=180°$，

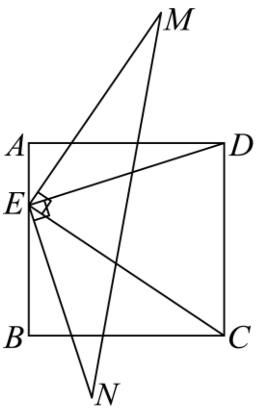
$\therefore \angle ACB=180°-71°=109°$.

故答案为：109.



【点睛】此题考查了切线的性质与圆周角定理，掌握辅助线的作法，以及四边形内角和是180°、圆内接四边形对角互补是解题的关键.

16. 如图，正方形$ABCD$的边长为2，点E是边AB上的动点，连接ED、EC，将ED绕点E顺时针旋转90°得到EN，将EC绕点E逆时针旋转90°得到EM，连接MN，则线段MN的取值范围为__________________.



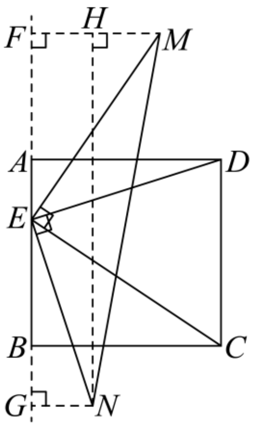
【答案】$4 \le MN \le 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题是正方形综合题，考查了正方形的性质，旋转变换的性质，矩形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，不等式的性质等，添加辅助线构造全等三角形是解题关键. 过点M作$MF \perp AB$，交BA的延长线于点F，过点N作$NG \perp AB$，交AB的延长线于点G，作$NH \perp FM$于点H，可证得$\triangle MEF \cong \triangle ECB(\text{AAS})$，得出$MF = BE = 2 - x$，$EF = BC = 2$，同理：$NG = AE = x$，$EG = AD = 2$，得出$FG = EF + EG = 2 + 2 = 4$，再证得四边形$FGNH$是矩形，得出$HN = FG = 4$，$FH = NG = x$，$MH = MF - FH = 2 - x - x = 2 - 2x$，再运用勾股定理即可求得答案.

【详解】解：如图，过点M作$MF \perp AB$，交BA的延长线于点F，过点N作$NG \perp AB$，交AB的延长线于点G，作$NH \perp FM$于点H，

则$\angle EFM = \angle EGN = \angle FHN = \angle NHM = 90^\circ$，



由旋转得：$EM=EC$，$EN=ED$，$\angle CEM=\angle DEN=90^\circ$，

$\therefore \angle MEF+\angle CEB=90^\circ$，$\angle DEA+\angle NEG=90^\circ$，

$\because \angle MEF+\angle EMF=90^\circ$，$\angle DEA+\angle EDA=90^\circ$，

$\therefore \angle CEB=\angle EMF$，$\angle NEG=\angle EDA$，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 是边 AB 上的动点，

设 $AE=x(0\le x\le 2)$，则 $BE=2-x$，

$\therefore AB=AD=BC=2$，$\angle DEA=\angle CBE=90^\circ$，

在$\triangle MEF$ 和$\triangle ECB$ 中，

$$\begin{cases}\angle EFM=CBE=90^\circ\\ \angle EMF=\angle CEB\\ EM=EC\end{cases},$$

$\therefore \triangle MEF\cong\triangle ECB(\text{AAS})$，

$\therefore MF=BE=2-x$，$EF=BC=2$，

同理：$NG=AE=x$，$EG=AD=2$，

$\therefore FG=EF+EG=2+2=4$，

$\because \angle MFE=\angle NGE=\angle FHN=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $FGNH$ 是矩形，

$\therefore HN=FG=4$，$FH=NG=x$，

$\therefore MH=MF-FH=2-x-x=2-2x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle MNH$ 中，$MN^2=MH^2+HN^2=(2-2x)^2+4^2=4(x-1)^2+16$，

$\because 0\le x\le 2$，

$\therefore 0\le (x-1)^2\le 1$，

$\therefore 16 \le 4(x-1)^2+16 \le 20$，

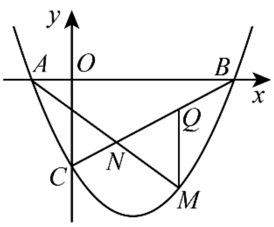
即 $16 \le MN^2 \le 20$，

$\because MN > 0$，

$\therefore$ 线段 MN 的取值范围为 $4 \le MN \le 2\sqrt{5}$．

故答案为：$4 \le MN \le 2\sqrt{5}$

17. 如图，二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，则 $\angle ACB$ $=$______°；M 是二次函数在第四象限内图象上一点，作 $MQ \parallel y$ 轴交 BC 于 Q，若□NQM 是以 NQ 为腰的等腰三角形，则线段 NC 的长为______.



【答案】 ①. 90 ②. $5-\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】①根据题意求出 $A(-2,0)$，$B(8,0)$，$C(0,-4)$，从而可得 $AB=10$，$AC=2\sqrt{5}$，$BC=4\sqrt{5}$，根据勾股定理的逆定理即可求出结果；

②分两种情况，一是当 $NQ=MQ$ 时，过点 N 作 $NH \perp x$ 轴于点 H，设 AM 交 y 轴于点 K，可证 $\triangle AHN \cong \triangle ACN(\text{AAS})$，求出 BH，再由 $\triangle BHN \backsim \triangle BCA$，求出 $HN=5-\sqrt{5}$，故 $NC=5-\sqrt{5}$；

二是当 $NQ=NM$ 时，过点 N 作 $NT \perp y$ 轴于点 T，可证 $\triangle AOK \backsim \triangle COA$，求出 $OK=1$，再由 $\triangle AOK \backsim \triangle NTK$ 求出 $NK=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故 $NC=\frac{3\sqrt{5}}{2}$．

【详解】解：①$\because$ 二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，

$\therefore$ $y=0$ 时，$\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4=0$，

解得：$x_1=-2$，$x_2=8$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为：$(-2,0)$；点 B 的坐标为：$(8,0)$，

$\therefore OA=2$，$OB=8$，

$\therefore AB=10$，

$\because$二次函数$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$的图象与$y$轴交于点$C$，

$\therefore x=0$时，$y=-4$，

$\therefore$点C的坐标为：$(0,-4)$，

$\therefore OC=4$，

$\because \angle AOC=\angle BOC=90^\circ$，

在$Rt\triangle AOC$和$Rt\triangle BOC$中，

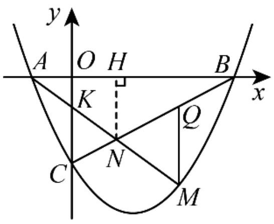
$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，

在$\triangle ACB$中，$(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2=10^2$，即$AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore \triangle ACB$是以AB为斜边的直角三角形，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$；

②当$NQ=MQ$时，过点N作$NH\perp x$轴于点H，设AM交y轴于点K，如图：



$\therefore \angle QMN=\angle QNM=\angle ANC$，

$\because MQ\parallel y$轴，

$\therefore \angle QMN=\angle NKC=\angle AKO$，

$\therefore \angle ANC=\angle AKO$，

$\therefore \angle OAK=90^\circ-\angle AKO=90^\circ-\angle ANC=\angle CAN$，

$\because \angle AHN=90^\circ=\angle ACN$，$AN=AN$，

$\therefore \triangle AHN\cong\triangle ACN(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AH=AC=2\sqrt{5}$，$CN=HN$，

$\therefore BH=AB-AH=10-2\sqrt{5}$，

$\because \angle HBN=\angle CBA$，$\angle NHB=90^\circ=\angle ACB$，

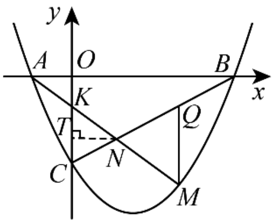
$\therefore \triangle BHN \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \dfrac{HN}{AC}=\dfrac{BH}{BC}$，即$\dfrac{HN}{2\sqrt{5}}=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$，

$\therefore HN=5-\sqrt{5}$，

$\therefore NC=5-\sqrt{5}$；

当$NQ=NM$时，过点N作$NT\perp y$轴于点T，如图：



$\therefore \angle NQM=\angle NMQ$，

$\because MQ\,/\!/\,y$轴，

$\therefore \angle NKC=\angle NCK$，

$\therefore NK=NC$，

$\because \angle AKO=\angle NKC$，

$\therefore \angle AKO=\angle NCK$，

$\therefore \angle OAK=90^\circ-\angle AKO=90^\circ-\angle NCK=\angle ACO$，

$\because \angle AOK=90^\circ=\angle COA$，

$\therefore \triangle AOK \backsim \triangle COA$，

$\therefore \dfrac{OK}{OA}=\dfrac{OA}{OC}$，即$\dfrac{OK}{2}=\dfrac{2}{4}$，

$\therefore OK=1$，

$\therefore CK=OC-OK=4-1=3$，$AK=\sqrt{OA^2+OK^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore TK=CT=\dfrac{1}{2}CH=\dfrac{3}{2}$，

$\because \angle AKO=\angle TKN$，$\angle AOK=90^\circ=\angle NTK$，

$\therefore \triangle AOK \backsim \triangle NTK$，

$\therefore \dfrac{OK}{TK}=\dfrac{AK}{NK}$，即$\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{NK}$，

$\therefore NK=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore NC=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，

故答案为：90；$5-\sqrt{5}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$．

【点睛】本题考查了二次函数的综合应用，涉及函数图象上点的特征，勾股定理的逆定理，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，熟练掌握二次函数的图象与性质，相似三角形的判定和性质是解题的关键．

三、解答题（本大题共 10 小题，共计 96 分）

18. （1）计算：$\sqrt{27}-3\cos30°+\left(1-\pi\right)^0$

（2）化简：$\dfrac{a-1}{a-b}-\dfrac{a+1}{b-a}+\dfrac{2b}{b-a}$

【答案】（1）$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+1$；（2）2

【解析】

【分析】（1）原式利用特殊角的三角函数值，二次根式的性质，以及零指数幂运算法则即可求出值；

（2）运用同分母分式的加减法则进行计算即可．

【详解】解：原式$=3\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+1$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+1$

原式$=\dfrac{a-1+\left(a+1\right)-2b}{a-b}$

$=\dfrac{2a-2b}{a-b}$

$=2$

【点睛】此题考查了实数的混合运算及分式的加减，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

19. （1）解不等式组 $\begin{cases}4\left(x+1\right)\le 7x+7\\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-4}{4}<1\end{cases}$

（2）已知 $M=2x^2-2x+3$，$N=4x^2-3x+4$，请比较 M 和 N 的大小．

【答案】（1）$-1\le x<2$；（2）$M<N$

【解析】

【分析】（1）先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分即可求解.

（2）先作差，将结果利用配方法分解，再比较大小.

【详解】解：（1）由$4\left(x+1\right)\le 7x+7$得：$x\ge -1$

由$\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-4}{4}<1$得：$x<2$

∴不等式组的解集为$-1\le x<2$；

（2）$N-M$

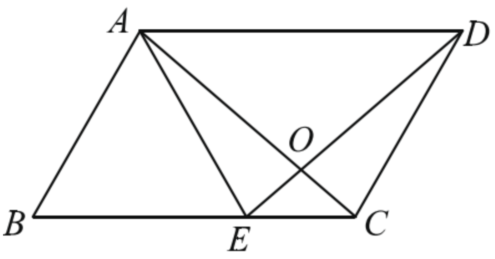
$=2x^2-x+1$

$=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$

$\therefore M<N$

【点睛】此题考查了解一元一次不等式组以及配方法的应用，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. 如图，在▱$ABCD$中，E是BC边上一点，连接AE、AC、ED，AC与ED交于点O，$AE=AB$，求证：



（1）$AC=DE$.

（2）$OE=OC$

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

【解析】

【分析】(1)利用平行四边形的性质，证明$\triangle AEC\cong\triangle DCE$即可.

(2)根据全等三角形的性质，证明$\angle OEC=\angle OCE$即可.

【小问 1 详解】

▱$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB=CD$，

$\therefore \angle B+\angle BCD=180^\circ$

$\because AB=AE$，

$\therefore AE=CD$，$\angle B=\angle AEB$，

$\because \angle AEB+\angle AEC=180^{\circ}$，

$\therefore \angle AEC=\angle ECD$，

$\because \begin{cases} AE=CD \\ \angle AEC=\angle ECD \\ EC=CE \end{cases}$，

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DCE$，

$\therefore AC=DE$．

【小问 2 详解】

由（1）得$\triangle AEC \cong \triangle DCE$，

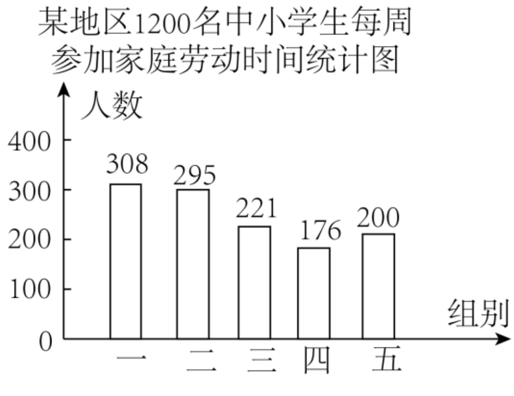
$\therefore \angle OEC=\angle OCE$，

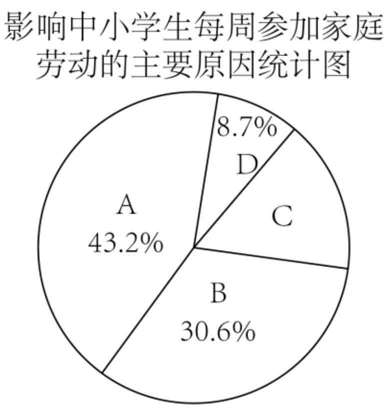
$\therefore OE=OC$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，三角形全等的判定和性质，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键．

21．某教育部门为了解本地区中小学生参加家庭劳动时间的情况，随机抽取该地区 1200 名中小学生进行问卷调查，并将调查问卷（部分）和结果描述如下：

调查问卷（部分） 1．你每周参加家庭劳动时间大约是_________h，如果你每周参加家庭劳动时间不足 2h，请回答第 2 个问题； 2．影响你每周参加家庭劳动的主要原因是_________（单选）． *A*．没时间　　*B*．家长不舍得　　*C*．不喜欢　　*D*．其它





中小学生每周参加家庭劳动时间 x（h）分为 5 组：第一组（$0\le x<0.5$），第二组（$0.5\le x<1$），第三组（$1\le x<1.5$），第四组（$1.5\le x<2$），第五组（$x\ge 2$）．根据以上信息，解答下列问题：

（1）本次调查中，中小学生每周参加家庭劳动时间的中位数落在哪一组？

（2）在本次被调查的中小学生中，选择“不喜欢”的人数为多少？

（3）该教育部门倡议本地区中小学生每周参加家庭劳动时间不少于 2h，请结合上述统计图，对该地区中小学生每周参加家庭劳动时间的情况作出评价，并提出两条合理化建议．

【答案】（1）第二组　　（2）175 人

（3）该地区大部分学生家庭劳动时间没有达到 2 个小时以上主要原因是学生没有时间；建议：①家长多指导孩子家庭劳动技能；②各学校严控课后作业总量

【解析】

【分析】（1）根据中位数的定义求解即可；

（2）根据扇形统计图求出 C 所占的比例再计算即可；

（3）根据统计图反应的问题回答即可．

【小问 1 详解】

1200 人的中位数是按从小到大排列后第 600 和 601 位的平均数，而前两组总人数为 308+295=603

∴本次调查中，中小学生每周参加家庭劳动时间的中位数落在第二组；

【小问 2 详解】

由扇形统计图得选择“不喜欢”的人数所占比例为$1-43.2\%-30.6\%-8.7\%=17.5\%$

而扇形统计图只统计不足两小时的人数，总人数为 1200-200=1000

∴选择“不喜欢”的人数为$1000\times17.5\%=175$（人）

【小问 3 详解】

答案不唯一、言之有理即可．

例如：该地区大部分学生家庭劳动时间没有达到 2 个小时以上主要原因是学生没有时间；建议：①家长多指导孩子家庭劳动技能；②各学校严控课后作业总量；③学校开设劳动拓展课程：等等．

【点睛】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用．读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

22. 将分别标有数字 1，2，4，5 的四张卡片洗匀后，背面朝上放在桌面上．

（1）随机地抽取一张，则抽到卡片上所标数字为质数的概率是______．

（2）随机地抽取一张，卡片上所标数字作为十位上的数字（不放回），再抽取一张，卡片上所标数字作为个位上的数字，请利用列表或画树状图的方法，求这个两位数能被 3 整除的概率是多少？

【答案】（1）$\frac{1}{2}$

（2）$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）先求出这组数中质数的个数，再利用概率公式解答即可；

（2）首先根据题意可直接列出所有可能出现的结果，再算出这个两位数能被 3 整除的概率.

【小问 1 详解】

解：数字 1，2，4，5 中，2，5 是质数，

则随机抽取 1 张，抽到卡片数字是奇数的概率为$\frac{1}{2}$；

故答案为：$\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

解：列表如下：

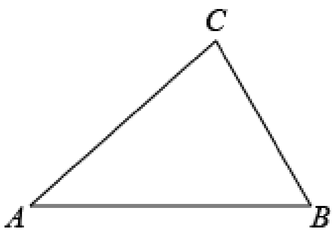
	1	2	4	5
1		12	14	15
2	21		24	25
4	41	42		45
5	51	52	54	

出现的等可能性结果有 12 种，两位数能被 3 整除的有，12，15，21，24，42，45，51，54 共有 8 种，

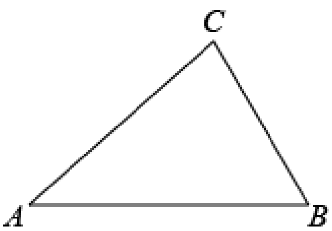
$\therefore P$（两位数能被 3 整除）$=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查　是用列表法或画树状图法求概率，列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件，熟记概率公式是解决本题的关键.

23. 已知△*ABC*，∠*B*=60°，$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$.



(图1)



(图2)

（1）如图 1，若 $BC=2\sqrt{3}$，求 *AC* 的长；

（2）试确定四边形 *ABCD*，满足∠*ADC*+∠*B*=180°，且 *AD*=2*DC*.（尺规作图，不需写作法，但要保留作

图痕迹.）

【答案】（1）AC 的长为 $\sqrt{21}$；

（2）见解析

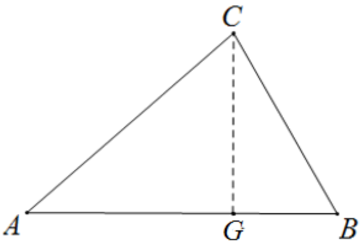
【解析】

【分析】（1）先求得 $AB=3\sqrt{3}$，在 Rt△BCG 中，求得 $BG=\sqrt{3}$，$CG=3$，再在 Rt△ACG 中，利用勾股定理即可求解；

（2）分别作线段 AB、BC 的垂直平分线，两直线相交于点 O，以 O 为圆心，OA 为半径作⊙O，再以 A 为圆心，BC 长为半径作弧，交弧 AC 于点 D，则四边形 $ABCD$ 即为所求作.

【小问 1 详解】

解：过点 C 作 $CG\perp AB$ 于点 G，



∵ $BC=2\sqrt{3}$，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{2}$，

∴$AB=3\sqrt{3}$，

在 Rt△BCG 中，$\angle B=60°$，

∴$\angle BCG=30°$，

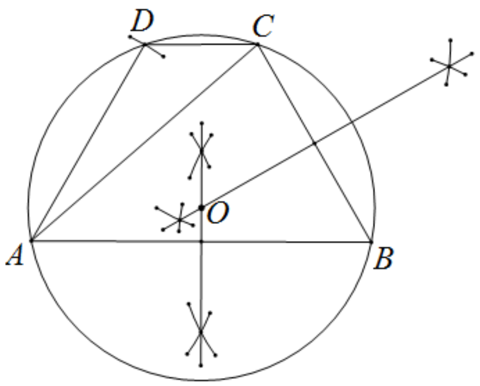
∴$BG=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，$CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=3$，$AG=AB-BG=2\sqrt{3}$，

在 Rt△ACG 中，

$AC=\sqrt{AG^2+CG^2}=\sqrt{21}$；

【小问 2 详解】

解：如图，四边形 $ABCD$ 即为所求作.

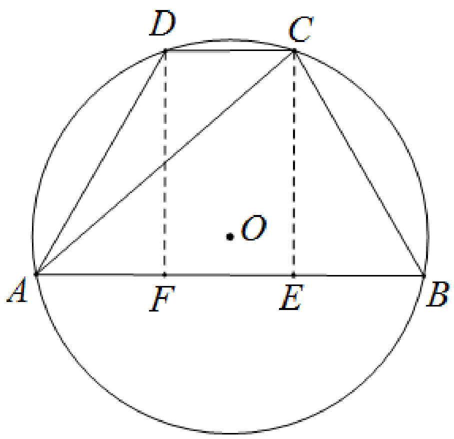


证明：∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴$\angle ADC+\angle B=180°$，

由作图知 $BC=AD$，则 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$，$CD\parallel AB$，

分别过 C、D 作 AB 的垂线，垂足分别为 E、F，如图：



∴$CE=DF$，四边形 $DCEF$ 为矩形，

∴$\triangle ADF\cong\triangle BCE$(HL)，$CD=EF$，

∴$AF=BE$，

∵$\angle B=60°$，

∴$\angle DAF=60°$，

∴$BE=\frac{1}{2}BC$，$AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=BE$，

∵$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$

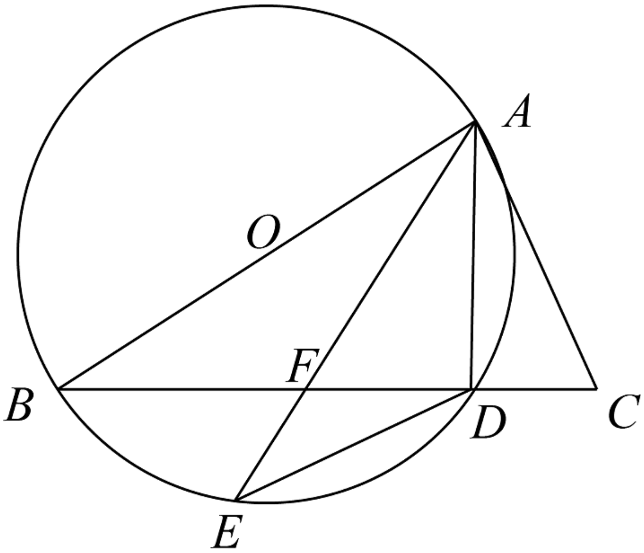
∴$AF=BE=EF=CD=\frac{1}{2}BC$，

∴$AD=2CD$，

∴四边形 $ABCD$ 符合题意．

【点睛】本题考查了尺规作图—作三角形的外接圆，含 30 度角的直角三角形的性质，勾股定理，圆内接四边形的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

24. 如图，$\triangle ABD$ 内接于$\odot O$， AB 是直径，E 是 $\overset{\frown}{BD}$ 上一点，且 $DE=DA$，连接 AE 交 BD 于 F，在 BD 延长线上取点 C，使得 $\angle CAD=\angle EAD$．



（1）试判断直线 AC 与$\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

（2）若 $AE=24$， $\tan\angle E=\dfrac{3}{4}$，求$\odot O$ 的半径长．

【答案】（1）相切，见解析

（2）12.5

【解析】

【分析】（1）证得$\angle B=\angle DAC$，进而由角的互余关系可证得$\angle BAC=90°$，即 AC 与$\odot O$ 相切．

（2）作 $DH\perp AE$，先求得 DH 的长，然后求得 AD 的长，接着求得 BD 的长，进而求得 AB 长，求得半径．

【小问 1 详解】

解：AC 与$\odot O$ 相切

$\because DE=DA$

$\therefore \angle EAD=\angle E$，

$\because \angle EAD=\angle DAC$，$\angle B=\angle E$

$\therefore \angle B=\angle DAC$，

$\because AB$ 是$\odot O$ 直径

$\therefore \angle ADB=90°$

∴∠B＋∠BAD＝90°

∴∠DAC＋∠BAD＝90°即∠BAC＝90°

∴AC 切⊙O 于 B

【小问 2 详解】

解：作 DH⊥AE

∵AD＝ED，AE＝24

∴AH＝HE＝12

$\therefore \tan E=\dfrac{DH}{EH}=\dfrac{3}{4}$

∴DH＝9

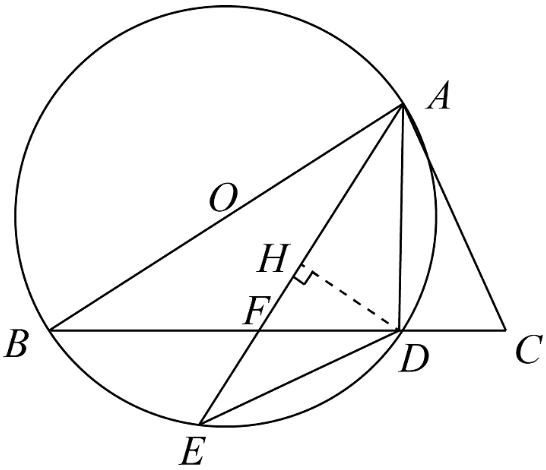
∴ED＝AD＝15

∵∠B＝∠E，∠ADB＝90°

$\therefore \tan\angle B=\dfrac{AD}{BD}=\tan\angle E=\dfrac{3}{4}$

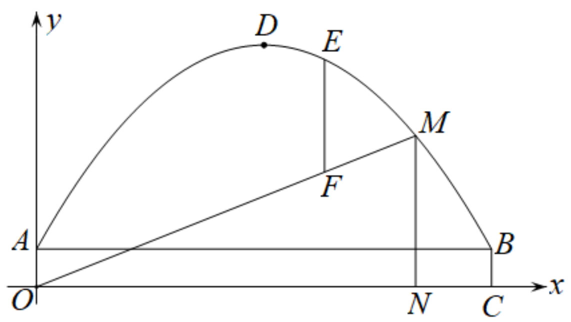
∴BD＝20

∴AB＝25，⊙O 的半径长为 12.5



【点睛】本题考查圆与三角形的综合问题，熟练掌握圆的相关性质定理是解题的关键．

25. 如图，国家会展中心大门的截面图是由抛物线 ADB 和矩形 $OABC$ 构成.矩形 $OABC$ 的边 $OA=\dfrac{3}{4}$ 米，$OC=9$ 米，以 OC 所在的直线为 x 轴，以 OA 所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，抛物线顶点 D 的坐标为 $(\dfrac{9}{2},\dfrac{24}{5})$．



（1）求此抛物线对应的函数表达式；

（2）近期需对大门进行粉刷，工人师傅搭建一木板 OM，点 M 正好在抛物线上，支撑 $MN\perp x$ 轴，$ON=7.5$ 米，点 E 是 OM 上方抛物线上一动点，且点 E 的横坐标为 m，过点 E 作 x 轴的垂线，交 OM 于点 F．

①求 EF 的最大值.②某工人师傅站在木板 OM 上，他能刷到的最大垂直高度是 $\frac{12}{5}$ 米，求他不能刷到大门顶部的对应点的横坐标的范围.

【答案】（1）$y=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}$；

（2）①当 $m=\frac{7}{2}$ 时，EF 有最大值 $\frac{16}{5}$；②$\frac{3}{2}<m<\frac{11}{2}$.

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法即可求出函数表达式；

（2）①先求出点 M 坐标为 $\left(\frac{15}{2},3\right)$，再求出直线$OM$的解析式为 $y=\frac{2}{5}x$，进而求出 $EF=-\frac{1}{5}m^2+\frac{7}{5}m+\frac{3}{4}=-\frac{1}{5}\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{16}{5}$，根据二次函数性质即可求出当 $m=\frac{7}{2}$ 时，EF 有最大值 $\frac{16}{5}$；

②根据师傅能刷到的最大垂直高度是 $\frac{12}{5}$ 米，得到当 $EF>\frac{12}{5}$ 时，他就不能刷到大门顶部，令 $EF=\frac{12}{5}$，得到 $-\frac{1}{5}\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{16}{5}=\frac{12}{5}$，解得 $m_1=\frac{3}{2},m_2=\frac{11}{2}$，结合二次函数性质即可得到他不能刷到大门顶部的对应点的横坐标 m 的范围是 $\frac{3}{2}<m<\frac{11}{2}$.

【小问 1 详解】

解：由题意知，抛物线顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},\frac{24}{5}\right)$，

设抛物线的表达式为 $y=a\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}$，

将点 $A\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 代入抛物线解析式得 $\frac{3}{4}=a\left(0-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}$，

解得 $a=-\frac{1}{5}$ ，

$\therefore$抛物线对应的函数的表达式为 $y=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}$；

【小问 2 详解】

解：①将 $x=7.5$ 代入 $y=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}$ 中，得 $y=3$，

$\therefore$点 $M\left(\frac{15}{2},3\right)$，

$\therefore$ 设直线 OM 的解析式为 $y=kx\left(k\neq 0\right)$，

将点 $M\left(\frac{15}{2},3\right)$ 代入得 $\frac{15}{2}k=3$，

$\therefore k=\frac{2}{5}$，

$\therefore$ 直线OM的解析式为 $y=\frac{2}{5}x$，

$\therefore EF=-\frac{1}{5}\left(m-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{24}{5}-\frac{2}{5}m=-\frac{1}{5}m^2+\frac{7}{5}m+\frac{3}{4}=-\frac{1}{5}\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{16}{5}$，

$\because -\frac{1}{5}<0$,

$\therefore$当 $m=\frac{7}{2}$ 时，EF 有最大值，为 $\frac{16}{5}$；

②$\because$ 师傅能刷到的最大垂直高度是 $\frac{12}{5}$ 米，

$\therefore$当 $EF>\frac{12}{5}$ 时，他就不能刷到大门顶部，

令 $EF=\frac{12}{5}$，即 $-\frac{1}{5}\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{16}{5}=\frac{12}{5}$,

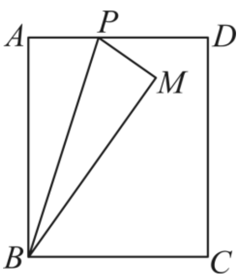
解得 $m_1=\frac{3}{2},m_2=\frac{11}{2}$，

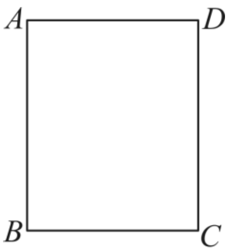
又$\because$ EF 是关于 m 的二次函数，且图象开口向下，

∴他不能刷到大门顶部的对应点的横坐标m的范围是$\frac{3}{2}<m<\frac{11}{2}$.

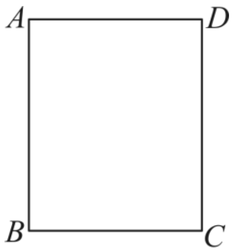
【点睛】本题考查为二次函数的实际应用，考查了待定系数法求解析式，二次函数的性质、应用等知识，熟知二次函数的性质并灵活应用是解题关键.

26. 如图，矩形$ABCD$中，$AB=5$，$BC=4$．点P在AD上运动（点P不与点A、D重合）将△ABP沿直线翻折，使得点A落在矩形内的点M处（包括矩形边界）.





备用图



备用图

（1）求AP的取值范围；

（2）连接DM并延长交矩形$ABCD$的AB边于点G，当$\angle ABM=2\angle ADG$时，求AP的长.

【答案】（1）$0<AP\le\frac{5}{2}$

（2）$\frac{25-5\sqrt{21}}{2}$

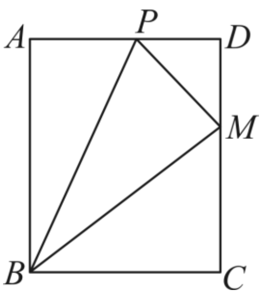
【解析】

【分析】（1）根据点P在AD上运动可判断出，点M落在CD上时，AP 长度达到最大．利用翻折的性质和勾股定理求出CM和DM长度，再利用△PDM∽△MCB，即可推断出AP最大长度，从而求出AP取值范围.

（2）利用已知条件和翻折性质推出$\angle ABP=\angle ADG$，从而证明△ADG∽△ABP，得出$\frac{AP}{AG}=\frac{5}{4}$，再根据翻折性质、矩形性质和等腰三角形性质推出$DH=AH$，$MH=\frac{1}{2}AG$．在$\mathrm{Rt}\triangle PHM$中，$PM^2=PH^2+HM^2$，即可求出$AP$长度.

【小问1详解】

解：当M落在CD上时，AP的长度达到最大，如图所示，



∵四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB = CD = 5$， $BC = AD = 4$， $\angle A = \angle C = \angle D = 90^{\circ}$，

$\because \triangle ABP$ 沿直线翻折，

$\therefore \angle PMB = \angle A = 90^{\circ}$， $BM = AB = 5$，

$\therefore CM = \sqrt{BM^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ， $\angle PMD + \angle BMC = 90^{\circ}$．

$\therefore DM = 5 - 3 = 2$．

$\because \angle PMD + \angle MPD = 90^{\circ}$，

$\therefore \angle BMC = \angle MPD$．

$\because \angle D = \angle C = 90^{\circ}$，

$\therefore \triangle PDM \backsim \triangle MCB$．

$\therefore \dfrac{PD}{CM} = \dfrac{DM}{BC}$．

$\therefore \dfrac{PD}{3} = \dfrac{2}{4}$．

$\therefore PD = \dfrac{3}{2}$．

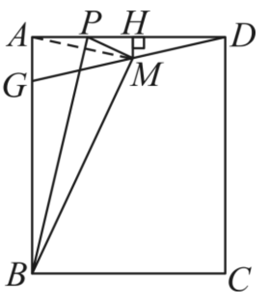
$\therefore AP = AD - AP = \dfrac{5}{2}$．

$\therefore AP$ 的取值范围是 $0 < AP \le \dfrac{5}{2}$．

故答案为：$0 < AP \le \dfrac{5}{2}$．

【小问 2 详解】

解：如图，



由折叠性质得：$\angle ABP = \angle MBP$，

$\therefore \angle ABM = 2\angle ABP$，

$\because \angle ABM = 2\angle ADG$，

$\therefore \angle ABP = \angle ADG$，

$\because \angle DAG = \angle BAP$，

$\therefore \triangle ADG \backsim \triangle ABP$，

$\therefore \dfrac{AP}{AG}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{5}{4}$.

设 $AP=5x$，$AG=4x$ 过 M 作 $MH\perp AD$ 于 H，连接 AM，

由折叠性质得：$AP=MP=5x$，$AM\perp BP$，

$\therefore \angle DAM=90^{\circ}-\angle BAM=\angle ABP=\angle ADG$.

$\therefore AM=DM$，

$\therefore DH=AH=\dfrac{1}{2}AD=2$.

$\therefore HP=2-5x$.

$\because \angle BAD=\angle MHA=90^{\circ}$，

$\therefore MN\ /\!/\ AG$.

$\because DH=AH$，

$\therefore MN$ 为 $\triangle ADG$ 的中位线，则 $MN=\dfrac{1}{2}AG=2x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PHM$ 中，$PM^{2}=PH^{2}+HM^{2}$，

$\therefore (5x)^{2}=(2x)^{2}+(2-5x)^{2}$，

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

$\therefore AP=\dfrac{25\pm5\sqrt{21}}{2}$.

$\because AP<AD=4$.

$\therefore\ AP=\dfrac{25+5\sqrt{21}}{2}$（舍去）.

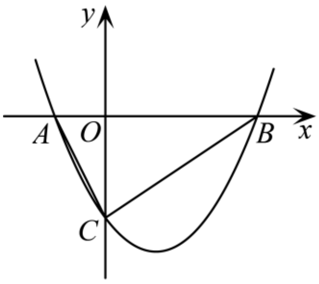
$\therefore AP=\dfrac{25-5\sqrt{21}}{2}$.

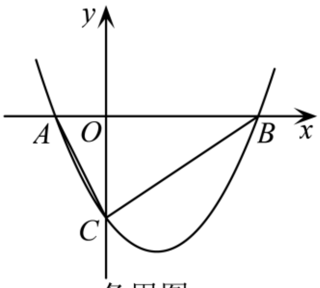
故答案为：$\dfrac{25-5\sqrt{21}}{2}$.

【点睛】本题考查的是矩形的综合题，涉及到的知识点有翻折性质、三角形相似、中位线定理和勾股定理．解题的关键在于是否能判断出 M 落在 CD 上时，AP 的长度达到最大．解题的难点在于是否能正确画出图形，解题的易错点在于是否能排除 AP 的其中一个值．

27. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^{2}+bx-2$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，与 y

轴交于点C，连接BC、AC.





备用图

（1）求二次函数的函数表达式；

（2）设二次函数的图象的顶点为D，求直线BD的函数表达式以及$\sin\angle CBD$的值；

（3）若点M在线段AB上（不与A,B重合），点N在线段BC上（不与B、C重合），是否存在$\triangle CMN$与$\triangle AOC$相似，若存在，请直接写出点N的坐标，若不存在，请说明理由.

【答案】（1）$y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2$

（2）$y=\dfrac{4}{3}x-4$；$\sin\angle CBD=\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$

（3）存在，点N的坐标为：$\left(\dfrac{15}{7},-\dfrac{4}{7}\right)$或$\left(\dfrac{12}{7},-\dfrac{6}{7}\right)$或$\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】（1）用待定系数法可得二次函数的函数表达式为$y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2$；

（2）由$y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2=\dfrac{2}{3}(x-1)^2-\dfrac{8}{3}$，得$D\left(1,-\dfrac{8}{3}\right)$，用待定系数法可得直线$BD$的函数表达式为：$y=\dfrac{4}{3}x-4$，设$BD$与$y$轴交于$E$，过点$C$作$CP\perp BE$于点$P$，求得$C(0,-2)$，$E(0,-4)$，根据$2S_{\triangle CBE}=BE\cdot CP=CE\cdot OB$，得$CP=\dfrac{CE\cdot OB}{BE}=\dfrac{2\times 3}{5}=\dfrac{6}{5}$，及可得

$$\sin\angle CBD=\frac{CP}{BC}=\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{65};$$

（3）由待定系数法可得直线BC解析式为$y=\dfrac{2}{3}x-2$，设$M(p,0)$，$N\left(q,\dfrac{2}{3}q-2\right)$，根据$\triangle AOC$是直角三角形，且$\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{1}{2}$，得到$\triangle CMN$与$\triangle AOC$相似，$\triangle CMN$是直角三角形，且两直角边的比为$\frac{1}{2}$，再分三种情况进行讨论即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：将 $A(-1,0)$， $B(3,0)$ 代入 $y=ax^2+bx-2$ 得：

$\begin{cases} a-b-2=0 \\ 9a+3b-2=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{4}{3} \end{cases}$，

$\therefore$ 二次函数的函数表达式为 $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2$；

【小问 2 详解】

解：$\because y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2=\dfrac{2}{3}(x-1)^2-\dfrac{8}{3}$，

$\therefore$ 抛物线顶点 $D\left(1,-\dfrac{8}{3}\right)$；

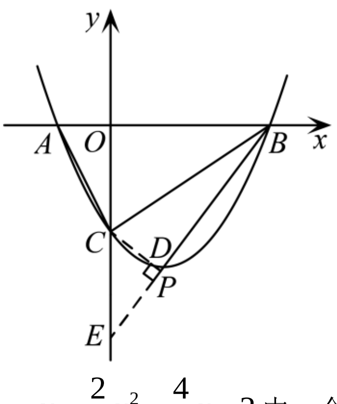
设直线 BD 的函数表达式为 $y=kx+n$，

$\therefore \begin{cases} 3k+n=0 \\ k+n=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k=\dfrac{4}{3} \\ n=-4 \end{cases}$，

$\therefore$ 直线 BD 的函数表达式为：$y=\dfrac{4}{3}x-4$；

设 BD 与 y 轴交于 E，过点 C 作 $CP\perp BE$ 于点 P，如图，



，

$y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-2$，

$\therefore C(0,-2)$，

在 $y=\frac{4}{3}x-4$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-4$，

$\therefore E\left(0,-4\right)$，

$\therefore BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$， $CE=OE-OC=2$，

$\because 2S_{\triangle CBE}=BE\cdot CP=CE\cdot OB$，

$\therefore CP=\frac{CE\cdot OB}{BE}=\frac{2\times 3}{5}=\frac{6}{5}$，

$\because BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore \sin\angle CBD=\frac{CP}{BC}=\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{65}$；

【小问 3 详解】

解：存在$\triangle CMN$与$\triangle AOC$相似，理由如下：

由 $C\left(0,-2\right)$，$B\left(3,0\right)$ 得直线 BC 解析式为 $y=\frac{2}{3}x-2$，

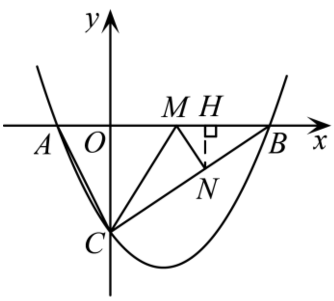
设 $M\left(p,0\right)$， $N\left(q,\frac{2}{3}q-2\right)$，

$\because\triangle AOC$ 是直角三角形，且 $\frac{OA}{OC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\triangle CMN$ 与$\triangle AOC$ 相似，$\triangle CMN$ 是直角三角形，且两直角边的比为 $\frac{1}{2}$，

①点 M 在线段 AB 上（不与 A、B 重合），点 N 在线段 BC 上（不与 B、C 重合），$\angle MCN$ 不可能是直角；

②若 $\angle CMN$ 是直角，则 $\frac{MN}{CM}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{CM}{MN}=\frac{1}{2}$，过 N 作 $NH\perp x$ 轴于 H，如图，



，

$\because\angle NMH=90^\circ-\angle CMO=\angle MCO$，$\angle MHN=90^\circ=\angle COM$，

$\therefore\triangle MHN\backsim\triangle COM$，

$\therefore \dfrac{MH}{OC}=\dfrac{HN}{OM}=\dfrac{MN}{CM}$，即 $\dfrac{q-p}{2}=\dfrac{2-\frac{2}{3}q}{p}=\dfrac{MN}{CM}$，

若 $\dfrac{MN}{CM}=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{q-p}{2}=\dfrac{2-\frac{2}{3}q}{p}=\dfrac{1}{2}$，

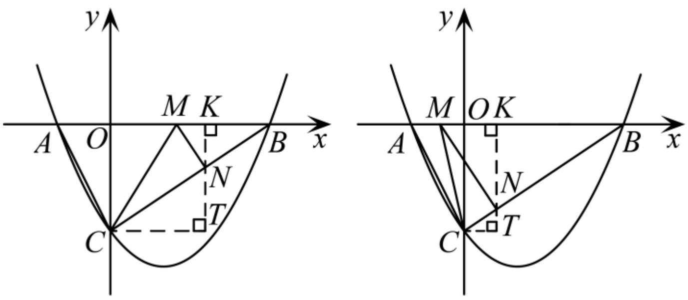
解得：$\begin{cases} p=\dfrac{8}{7} \\ q=\dfrac{15}{7} \end{cases}$，

$\therefore N\left(\dfrac{15}{7},-\dfrac{4}{7}\right)$；

若 $\dfrac{CM}{MN}=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{a-p}{2}=\dfrac{2-\frac{2}{3}a}{2}$ =2，

解得：$\begin{cases} p=-\dfrac{1}{4} \\ q=\dfrac{15}{4} \end{cases}$（此时 N 不在线段 BC 上，舍去）；

③若 $\angle CNM$ 为直角，则 $\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{CM}{MN}=\dfrac{1}{2}$，过 N 作 $KT\perp x$ 轴于 K，过 C 作 $CT\perp KT$ 于 T，如图，



，

同理可得△CNT∽△NMK，

$\therefore \dfrac{MK}{NT}=\dfrac{KN}{CT}=\dfrac{MN}{CN}$，

当 $\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{a-p}{\frac{2}{3}a}=\dfrac{2-\frac{2}{3}a}{a}=\dfrac{1}{2}$，

解得：$q=\dfrac{12}{7}$，

$\therefore N\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7}\right)$，

当$\frac{CM}{MN}=\frac{1}{2}$时，

$\frac{a-p}{\frac{2}{3}a}=\frac{2-\frac{2}{3}a}{9}=2$，

解得：$q=\frac{3}{4}$，

$\therefore N\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$；

综上所述，点N的坐标为：$\left(\frac{15}{7},-\frac{4}{7}\right)$或$\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7}\right)$或$\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的综合运用，涉及待定系数法，锐角三角函数，三角形相似的判定与性质等知识，解题的关键是分类讨论的思想的应用.