

2023-2024 学年江苏省南通市海门区东洲国际学校九年级（上）开学数学 试卷

一. 选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）实数 3、-8、0、 π 中，绝对值最大的数是（ ）

- A. 3 B. -8 C. 0 D. π

2. （3 分）下列四个命题：

①一组对边平行且一组对角相等的四边形是平行四边形；

②对角线互相垂直且相等的四边形是正方形；

③顺次连接矩形四边中点得到的四边形是菱形；

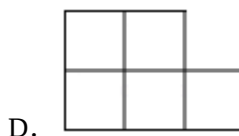
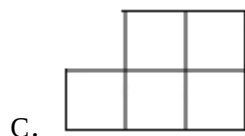
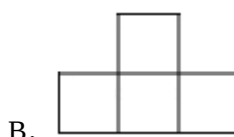
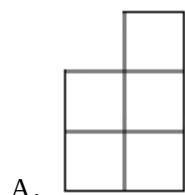
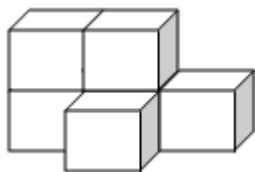
④正五边形既是轴对称图形又是中心对称图形．其中真命题共有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. （3 分）函数 $y = \frac{8}{a-4}$ 的自变量 a 的取值范围是（ ）

- A. $a \neq 0$ B. $a \neq 4$ C. $a \geq 4$ D. $a \leq 4$

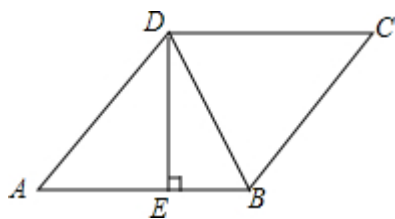
4. （3 分）如图，一个由 6 个相同小正方体组成的几何体，则该几何体的主视图是（ ）



5. （3 分）2023 年上半年，南通市的税收为 631.75 亿元，其中 631.75 亿用科学记数法表示为（ ）

- A. 631.75×10^8 B. 63.175×10^9
C. 6.3175×10^9 D. 6.3175×10^{10}

6. （3 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中， $DE \perp AB$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $BE = 2$ ，则 $\tan \angle DBE$ 的值是（ ）

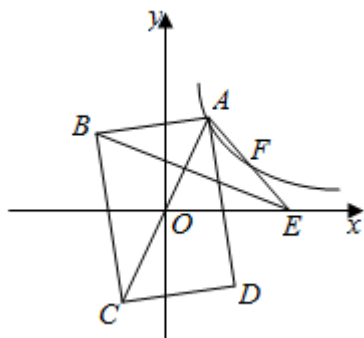


- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $10\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. (3分) 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y=x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度所得抛物线对应的函数表达式为 ()

- A. $y=(x-2)^2+1$ B. $y=(x+2)^2+1$
C. $y=(x+2)^2-1$ D. $y=(x-2)^2-1$

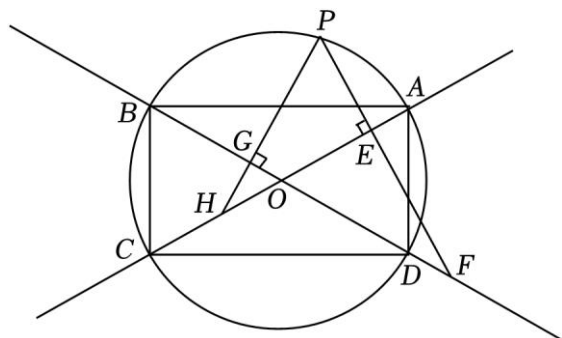
8. (3分) 如图，在平面直角坐标系中，矩形 ABCD 的对角线 AC 的中点与坐标原点重合，点 E 是 x 轴上一点，连接 AE. 若 AD 平分 $\angle OAE$ ，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 的图象经过 AE 上的两点 A, F, 且 $AF=EF$, $\triangle ABE$ 的面积为 18, 则 k 的值为 ()



- A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

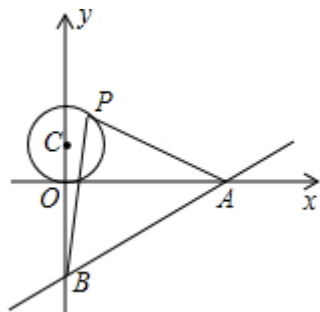
9. (3分) 如图，在 $\odot O$ 中，AC, BD 是直径， $\angle BOC=60^\circ$ ，点 P 是劣弧 AB 上任意一点（不与 A、B 重合），过点 P 作 AC 垂线，交 AC、BD 所在直线于点 E, F, 过点 P 作 BD 垂线，交 BD、AC 所在直线于点 G, H, 下列选项中，正确的有几个 ()

- ① $\frac{PE}{PG} = \frac{PH}{PF}$;
② $\angle GPE=60^\circ$;
③ $PG+PE$ 最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}AO$;
④ 当 $\triangle PEH \cong \triangle CBA$ 时, $S_{\triangle PGF} : S_{\text{矩形} ABCD} = 1: 8$.



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

10. (3分) 如图, 已知直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, P 是以 $C(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上一动点, 连接 PA 、 PB . 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()



- A. $10\sqrt{3}+1$ B. $10\sqrt{3}$ C. 10.5 D. 11.5

二. 填空题 (本题共 8 小题, 11-12 题每题 3 分, 13-18 题每题 4 分, 共 30 分)

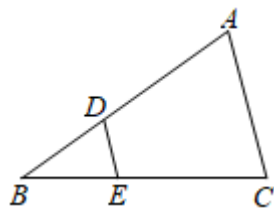
11. (3分) 若 x_1 、 x_2 是方程 $x^2+3x=0$ 的两个根, 则 $x_1+x_2=$ _____.

12. (3 分) 分解因式: $a^2 - 49 =$ _____.

13. (4分) 若 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别为 4cm 、 7cm ，圆心距 $AB=2\text{cm}$ ，则两圆的位置关系是_____.

14. (4 分) 小丽的笔试成绩为 98.5 分, 面试成绩为 97 分, 若笔试成绩、面试成绩按 6: 4 计算平均成绩, 则小丽的平均成绩是 _____ 分.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BA 、 BC 上, 且 $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$, $\triangle DBE$ 与四边形 $ADEC$ 的面积比 _____.

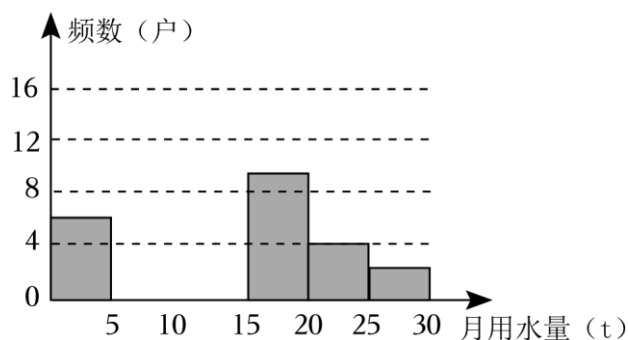


16. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, DE 平分 $\angle ADC$, 交 AB 于点 E , $EF \perp CE$, 交 AD 于点 F , 以 CE , EF 为边, 作矩形 $CEFG$, FG 与 DC 相交于点 H . 则下列结论:

(2) 求该居委会用水量不超过 15t 的家庭占被调查家庭总数的百分比；

月均用水量 x (t)	频数 (户)
$0 < x \leq 5$	6
$5 < x \leq 10$	12
$10 < x \leq 15$	16
$15 < x \leq 20$	10
$20 < x \leq 25$	4
$25 < x \leq 30$	2

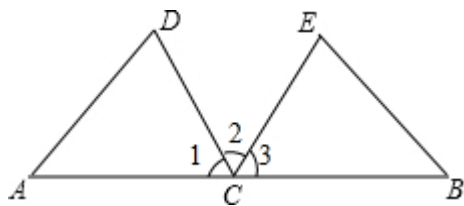
(3) 若该居委会会有 1000 户家庭，根据调查数据估计，该小区月均用水量超过 20t 的家庭大约有多少户？



22. (10 分) 如图， C 是线段 AB 的中点， CD 平分 $\angle ACE$ ， CE 平分 $\angle BCD$ ， $CD=CE$ 。

(1) 求证： $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ；

(2) 若 $\angle D = 50^\circ$ ，求 $\angle B$ 的度数。



23. (10 分) 如图，斜坡 AB 的坡角 $\angle BAC = 13^\circ$ ，计划在该坡面上安装两排平行的光伏板。前排光伏板的一端位于点 A ，过其另一端 D 安装支架 DE ， DE 所在的直线垂直于水平线 AC ，垂足为点 F ， E 为 DF 与 AB 的交点。已知 $AD = 100\text{cm}$ ，前排光伏板的坡角 $\angle DAC = 28^\circ$ 。

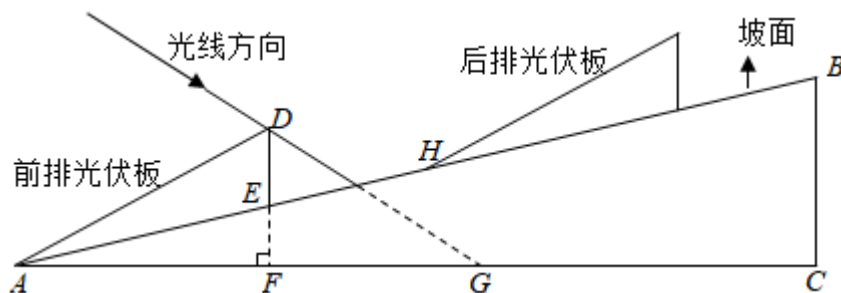
(1) 求 AE 的长（结果取整数）；

(2) 冬至日正午，经过点 D 的太阳光线与 AC 所成的角 $\angle DGA = 32^\circ$ ，后排光伏板的前端 H 在 AB 上。此时，若要后排光伏板的采光不受前排光伏板的影响，则 EH 的最小值为多少（结果取整数）？

参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{6} \approx 2.45$ 。

锐角 A	13°	28°	32°
--------	------------	------------	------------

三角函数			
$\sin A$	0.22	0.47	0.53
$\cos A$	0.97	0.88	0.85
$\tan A$	0.23	0.53	0.62

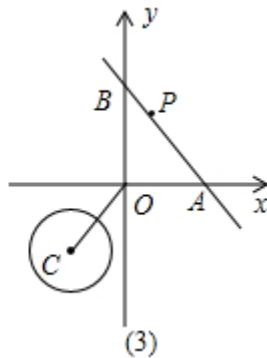
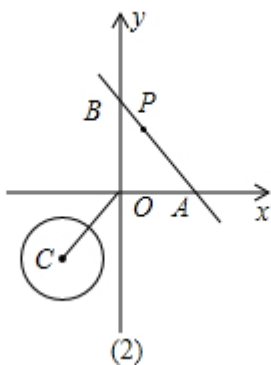
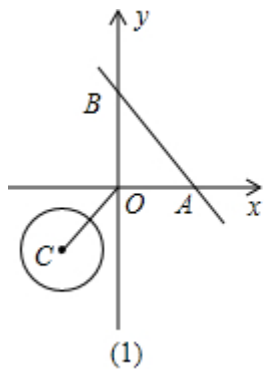


24. (15分) 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点， $\odot C$ 的圆心坐标为 $(-2, -2)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 。函数 $y = -x + 2$ 的图象与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，

(1) 图 1 中，连接 CO 并延长和 AB 交于点 G ，求证： $CG \perp AB$ ；

(2) 图 2 中，当点 P 从 B 出发，以 1 个单位/秒的速度在线段 AB 上运动，连接 PO ，当直线 PO 与 $\odot C$ 相切时，求点 P 运行的时间 t 是多少？

(3) 图 3 中，当直线 PO 与 $\odot C$ 相交时，设交点为 E, F ，如果 $CM \perp EF$ 于点 M ，令 $PO = x$ ， $MO = y$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式，写出 x 的取值范围。



25. (15分) 如图 1， $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 90^\circ$ ， AB, FE, DC 为铅直方向的边， AF, ED, BC 为水平方向的边，点 E 在 AB, CD 之间，且在 AF, BC 之间，我们称这样的图形为“L 图形”，记作“L 图形 $ABCDEF$ ”。若直线将 L 图形分成面积相等的两个图形，则称这样的直线为该 L 图形的面积平分线。

【活动】

小华同学给出了图 1 的面积平分线的一个作图方案：如图 2，将这个 L 图形分成矩形 $AGEF$ 、矩形 $GBCD$ ，这两个矩形的对称中心 O_1, O_2 所在直线是该 L 图形的面积平分线。

请用无刻度的直尺在图 1 中作出其他的面积平分线。（作出一种即可，不写作法，保留作图痕迹）

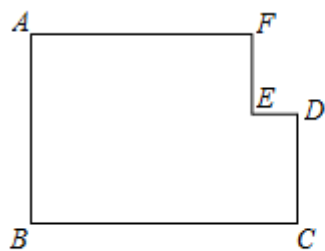


图1

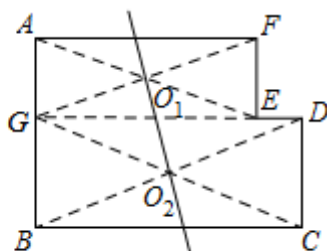


图2

【思考】

如图 3，直线 O_1O_2 是小华作的面积平分线，它与边 BC ， AF 分别交于点 M ， N ，过 MN 的中点 O 的直线分别交边 BC ， AF 于点 P ， Q ，直线 PQ _____（填“是”或“不是”） L 图形 $ABCDEF$ 的面积平分线。

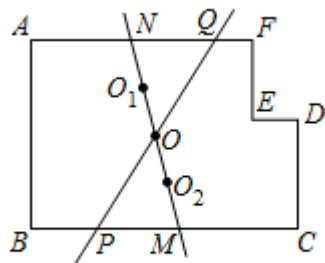


图3

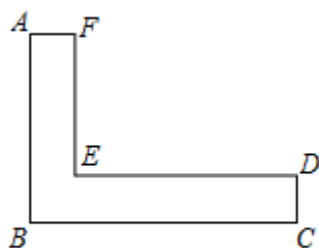


图4

【应用】

在 L 图形 $ABCDEF$ 形中，已知 $AB=4$ ， $BC=6$ 。

（1）如图 4， $CD=AF=1$ 。

①该 L 图形的面积平分线与两条水平的边分别相交于点 P ， Q ，求 PQ 长的最大值；

②该 L 图形的面积平分线与边 AB ， CD 分别相交于点 G ， H ，当 GH 的长取最小值时， BG 的长为 _____。

（2）设 $\frac{CD}{AF}=t$ ($t>0$)，在所有的与铅直方向的两条边相交的面积平分线中，如果只有与边 AB ， CD 相交的面积平分线，直接写出 t 的取值范围 _____。

2023-2024 学年江苏省南通市海门区东洲国际学校九年级（上）开学数学 试卷

参考答案与试题解析

一. 选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）实数 3、-8、0、 π 中，绝对值最大的数是（ ）

- A. 3 B. -8 C. 0 D. π

【答案】B

【分析】分别求得各数的绝对值，然后比较大小即可．

【解答】解：3、-8、0、 π 的绝对值分别为 3、8、0、 π ，

$$\because 8 > \pi > 3 > 0,$$

$\therefore$ 绝对值最大的数是 -8，

故选：B．

2. （3 分）下列四个命题：

①一组对边平行且一组对角相等的四边形是平行四边形；

②对角线互相垂直且相等的四边形是正方形；

③顺次连接矩形四边中点得到的四边形是菱形；

④正五边形既是轴对称图形又是中心对称图形．其中真命题共有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【分析】根据平行四边形的各种判定方法、正方形的各种判定方法、菱形的各种判定方法以及正多边形的轴对称性逐项分析即可．

【解答】解：①一组对边平行，且一组对角相等，则可以判定另外一组对边也平行，所以该四边形是平行四边形，故该命题正确；

②对角线互相垂直且相等的四边形不一定是正方形，也可以是普通的四边形（例如对角线垂直的等腰梯形），故该命题错误；

③因为矩形的对角线相等，所以连接矩形的中点后都是对角线的中位线，所以四边相等，所以是菱形，故该命题正确；

④正五边形只是轴对称图形不是中心对称图形，故该命题错误；

所以正确的命题个数为 2 个，

故选：B.

3. (3 分) 函数 $y = \frac{8}{a-4}$ 的自变量 a 的取值范围是 ()

- A. $a \neq 0$ B. $a \neq 4$ C. $a \geq 4$ D. $a \leq 4$

【答案】B

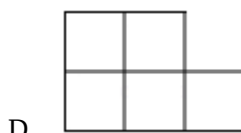
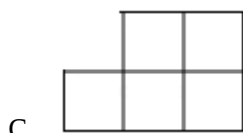
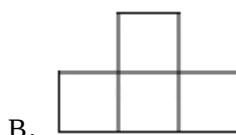
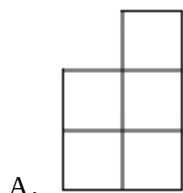
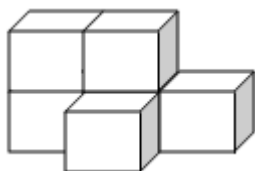
【分析】根据分式的分母不为零列出不等式，解不等式得到答案.

【解答】解：由题意得： $a - 4 \neq 0$,

解得： $a \neq 4$,

故选：B.

4. (3 分) 如图，一个由 6 个相同小正方体组成的几何体，则该几何体的主视图是 ()



【答案】D

【分析】由已知条件可知，主视图有 3 列，每列小正方体数目分别为 2，2，1，据此可得出图形，从而求解.

【解答】解：观察图形可知，该几何体的主视图是

故选：D.

5. (3 分) 2023 年上半年，南通市的税收为 631.75 亿元，其中 631.75 亿用科学记数法表示为 ()

- A. 631.75×10^8 B. 63.175×10^9
C. 6.3175×10^9 D. 6.3175×10^{10}

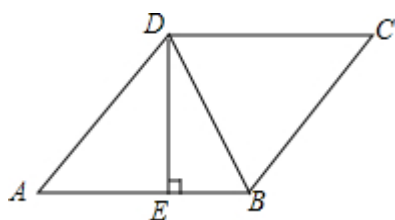
【答案】D

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：631.75 亿 $= 63175000000 = 6.3175 \times 10^{10}$ ．

故选：D．

6. （3 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中， $DE \perp AB$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $BE = 2$ ，则 $\tan \angle DBE$ 的值是（ ）



A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $10\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【分析】首先设菱形 $ABCD$ 边长为 x ，则 $AE = x - 2$ ，根据三角函数定义可得 $\frac{x-2}{x} = \frac{3}{5}$ ，再解即可得到 x 的值，然后利用勾股定理计算出 DE 的长，然后在根据正切定义可得 $\tan \angle DBE$ 的值．

【解答】解：设菱形 $ABCD$ 边长为 x ，

$$\because BE = 2,$$

$$\therefore AE = x - 2,$$

$$\because \cos A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{x-2}{x} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore x = 5,$$

$$\therefore AE = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle DBE = \frac{DE}{BE} = \frac{4}{2} = 2.$$

故选：B．

7. （3 分）在平面直角坐标系中，将二次函数 $y = x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度所得抛物线对应的函数表达式为（ ）

A. $y = (x - 2)^2 + 1$

B. $y = (x + 2)^2 + 1$

C. $y = (x + 2)^2 - 1$

D. $y = (x - 2)^2 - 1$

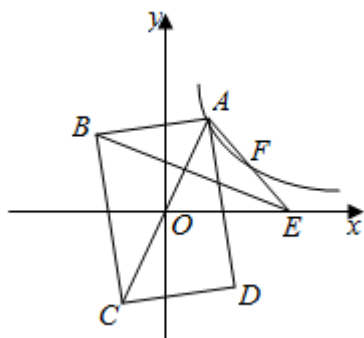
【答案】B

【分析】直接利用二次函数的平移规律，左加右减，上加下减，进而得出答案.

【解答】解：将二次函数 $y = x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度，得到： $y = (x + 2)^2$ ，
再向上平移 1 个单位长度得到： $y = (x + 2)^2 + 1$.

故选：B.

8. (3 分) 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点与坐标原点重合，点 E 是 x 轴上一点，连接 AE . 若 AD 平分 $\angle OAE$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的图象经过 AE 上的两点 A, F ，且 $AF = EF$ ， $\triangle ABE$ 的面积为 18，则 k 的值为 ()



A. 6

B. 12

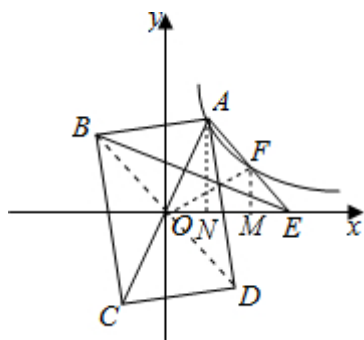
C. 18

D. 24

【答案】B

【分析】如图，连接 BD, OF ，过点 A 作 $AN \perp OE$ 于 N ，过点 F 作 $FM \perp OE$ 于 M . 证明 $BD \parallel AE$ ，推出 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOE} = 18$ ，推出 $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOE} = 9$ ，可得 $S_{\triangle FME} = \frac{1}{3} S_{\triangle EOF} = 3$ ，由此即可解决问题.

【解答】解：如图，连接 BD, OF ，过点 A 作 $AN \perp OE$ 于 N ，过点 F 作 $FM \perp OE$ 于 M .



$\because AN \parallel FM, AF = FE,$

$\therefore MN = ME,$

$$\therefore FM = \frac{1}{2}AN,$$

$\because A, F$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore S_{\triangle AON} = S_{\triangle FOM} = \frac{k}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot ON \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot FM,$$

$$\therefore ON = \frac{1}{2}OM,$$

$$\therefore ON = MN = EM,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{3}OE,$$

$$\therefore S_{\triangle FME} = \frac{1}{3}S_{\triangle FOE},$$

$\because AD$ 平分 $\angle OAE$,

$$\therefore \angle OAD = \angle EAD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle DAE,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOE},$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = 18,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2}S_{\triangle AOE} = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle FME} = \frac{1}{3}S_{\triangle EOF} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle FOM} = S_{\triangle FOE} - S_{\triangle FME} = 9 - 3 = 6 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 12.$$

故选: B .

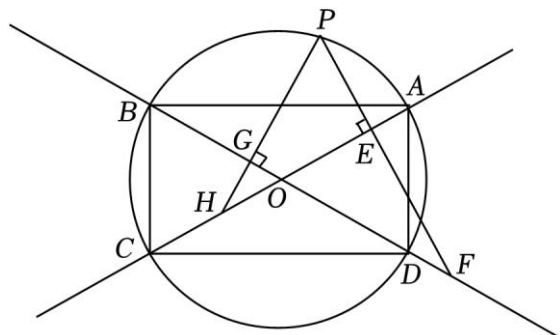
9. (3分) 如图, 在 $\odot O$ 中, AC, BD 是直径, $\angle BOC = 60^\circ$, 点 P 是劣弧 AB 上任意一点 (不与 A, B 重合), 过点 P 作 AC 垂线, 交 AC, BD 所在直线于点 E, F , 过点 P 作 BD 垂线, 交 BD, AC 所在直线于点 G, H , 下列选项中, 正确的有几个 ()

① $\frac{PE}{PG} = \frac{PH}{PF}$;

② $\angle GPE = 60^\circ$;

③ $PG+PE$ 最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}AO$;

④ 当 $\triangle PEH \cong \triangle CBA$ 时, $S_{\triangle PGF} : S_{\text{矩形} ABCD} = 1 : 8$.



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【分析】利用 $\triangle PEH \sim \triangle PGF$, 得 $\frac{PE}{PG} = \frac{PH}{PF}$, 可知①正确; 由四边形内角和为 360° , 可知②正确; 分别连接 PA, PO, PB , 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M , 由面积法知 $PG+PE = \frac{2S_{\triangle OAB}}{OA} + \frac{AB}{OA} \cdot PM$, 当 PM 最大时, $PG+PE$ 的值最大, 此时点 P 为劣弧 AB 的中点, 点 M 在线段 OP 上, 可说明③错误; 当 $\triangle PEH \cong \triangle CBA$ 时, 得 $PE=BC$, 则 $PE=OB$, 此时点 E, F 均与点 O 重合, 由勾股定理得 $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}OA$, $\triangle PGF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}OA \times \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{8}OA^2$, 再表示矩形 $ABCD$ 的面积, 可判断④正确.

【解答】解: $\because PG \perp BD, PE \perp AC$,

$\therefore \angle PEH = \angle PGF = 90^\circ$,

$\therefore \angle HPE = \angle FPG$,

$\therefore \triangle PEH \sim \triangle PGF$,

$\therefore \frac{PE}{PG} = \frac{PH}{PF}$,

故①正确;

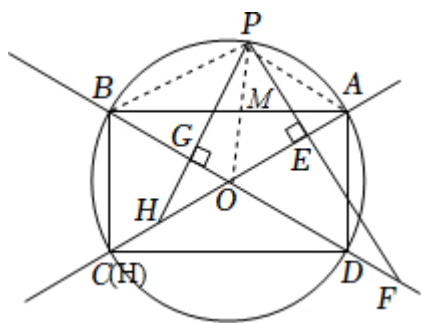
$\therefore \angle BOC = 60^\circ$,

$\therefore \angle GOE = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$,

在四边形 $PGOE$ 中, $\angle GPE = 360^\circ - (\angle PGO + \angle PEO + \angle GOE) = 60^\circ$,

故②正确;

分别连接 PA, PO, PB , 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M ,



$$\because S_{\triangle POB} + S_{\triangle POA} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle PAB},$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot PG + \frac{1}{2}OA \cdot PE = S_{\triangle OAB} + \frac{1}{2}AB \cdot PM,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore PG + PE = \frac{2S_{\triangle OAB}}{OA} + \frac{AB}{OA} \cdot PM,$$

$\therefore$ 当 PM 最大时, $PG + PE$ 的值最大, 此时点 P 为劣弧 AB 的中点, 点 M 在线段 OP 上,

$$\therefore PO \perp AB, PA = PB,$$

$$\therefore \angle BOP = 60^\circ,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}OA, AB = 2BM = 2\sqrt{OB^2 - \frac{1}{4}OA^2} = \sqrt{3}OA,$$

$$\therefore PM = \sqrt{3}OA,$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot OM = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}OA \times \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{4}OA^2,$$

$$\therefore PG + PE \text{ 的最大值为 } \frac{2S_{\triangle OAB}}{OA} + \frac{AB}{OA} \times \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2}OA + \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \sqrt{3}OA,$$

故③错误;

当 $\triangle PEH \cong \triangle CBA$ 时, 则 $PE = BC$,

$$\because OB = OC, \angle BOC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形,

$$\therefore OB = BC,$$

即 $PE = OB$,

此时点 E, F 均与点 O 重合,

$$\therefore AC = BC, OA = OB = OC = OD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\because \angle GPO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle POG = 30^\circ,$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}OA,$$

$$\text{由勾股定理得 } OG = \frac{\sqrt{3}}{2}OA,$$

$$\therefore \triangle PGF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}OA \times \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{8}OA^2,$$

$$\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot BC = \sqrt{3}OA \cdot OA = \sqrt{3}OA^2,$$

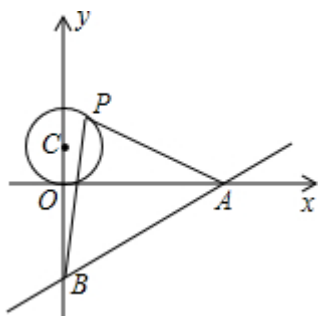
$$\therefore S_{\triangle PGF} : S_{\text{矩形 } ABCD} = 1 : 8.$$

故④正确，

$\therefore$ 正确的是①②④，

故选：C.

10. (3分) 如图，已知直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点， P 是以 $C(0, 1)$ 为圆心，1 为半径的圆上一动点，连接 PA 、 PB 。则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()



- A. $10\sqrt{3}+1$ B. $10\sqrt{3}$ C. 10.5 D. 11.5

【答案】 C

【分析】 求出 A 、 B 的坐标，根据勾股定理求出 AB ，求出点 C 到 AB 的距离，即可求出圆 C 上点到 AB 的最大距离，根据面积公式求出即可。

【解答】 解： $\because$ 直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，

$\therefore A$ 点的坐标为 $(4, 0)$ ， B 点的坐标为 $(0, -3)$ ， $3x - 4y - 12 = 0$ ，

即 $OA = 4$ ， $OB = 3$ ，由勾股定理得： $AB = 5$ ，

过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ，连接 AC ，

则由三角形面积公式得： $\frac{1}{2} \times AB \times CM = \frac{1}{2} \times OA \times OC + \frac{1}{2} \times OA \times OB$ ，

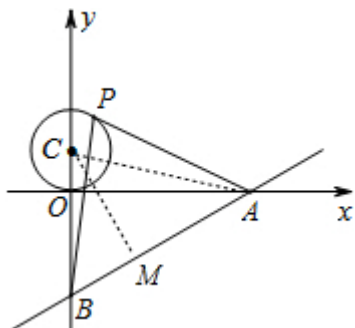
$$\therefore 5 \times CM = 4 \times 1 + 3 \times 4,$$

$$\therefore CM = \frac{16}{5},$$

$\therefore$ 圆 C 上点到直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 的最大距离是 $1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}$,

$\therefore \triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{21}{5} = \frac{21}{2}$.

故选: C .



二. 填空题（本题共 8 小题，11-12 题每题 3 分，13-18 题每题 4 分，共 30 分）

11. (3 分) 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 3x = 0$ 的两个根，则 $x_1 + x_2 = \underline{-3}$.

【答案】 -3.

【分析】 由 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 3x = 0$ 的两个根，利用根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2$ 的值.

【解答】 解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 + 3x = 0$ 的两个根, $a = 1, b = 3$,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3.$$

故答案为: -3.

12. (3 分) 分解因式: $a^2 - 49 = \underline{(a+7)(a-7)}$.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 直接利用平方差公式分解因式得出答案.

【解答】 解: $a^2 - 49 = (a+7)(a-7)$.

故答案为: $(a+7)(a-7)$.

13. (4 分) 若 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别为 4cm 、 7cm ，圆心距 $AB = 2\text{cm}$ ，则两圆的位置关系是 内含.

【答案】 内含.

【分析】 圆和圆的位置与两圆的圆心距 (d)、半径 (R, r) 数量之间的关系: ①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$,

②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$, ③两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$ ($R \geq r$), ④两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r$ ($R > r$), ⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ ($R > r$), 由此即可判断.

【解答】 解: 设 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别分 $r = 4\text{cm}$ 、 $R = 7\text{cm}$ ，圆心距 $d = AB = 2\text{cm}$,

$$\therefore d < R - r,$$

$\therefore$ 两圆的位置关系是内含.

故答案为：内含．

- 14.（4分）小丽的笔试成绩为98.5分，面试成绩为97分，若笔试成绩、面试成绩按6：4计算平均成绩，则小丽的平均成绩是 97.9 分．

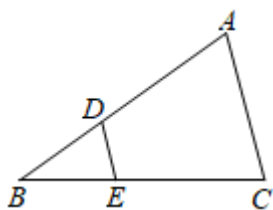
【答案】97.9.

【分析】根据加权平均数的公式计算可得．

【解答】解：小丽的平均成绩是 $\frac{98.5 \times 6 + 97 \times 4}{6+4} = 97.9$ （分），

故答案为：97.9.

- 15.（4分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BA 、 BC 上，且 $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$ ， $\triangle DBE$ 与四边形 $ADEC$ 的面积比 $\frac{4}{21}$ ．



【答案】 $\frac{4}{21}$.

【分析】先由 $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$ ，设 $AD=3m$ ， $DB=2m$ ， $CE=3k$ ， $EB=2k$ ，证明 $\frac{BD}{AB} = \frac{EB}{BC} = \frac{2}{5}$ ，又 $\angle B = \angle B$ ，

可证明 $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ．进而可得相似比为 $\frac{2}{5}$ ，面积比 $\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ ，从而可得 $S_{\triangle DBE} : S_{\text{四边形} ADEC} = 4 : 21$ ．

【解答】解：∵ $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$ ，则设 $AD=3m$ ， $DB=2m$ ， $CE=3k$ ， $EB=2k$ ，

∴ $\frac{BD}{AB} = \frac{2m}{2m+3m} = \frac{2}{5}$ ， $\frac{EB}{BC} = \frac{2k}{2k+3k} = \frac{2}{5}$ ，

∴ $\frac{BD}{AB} = \frac{EB}{BC} = \frac{2}{5}$ ，

又 $\angle B = \angle B$ ，

∴ $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ．

相似比为 $\frac{2}{5}$ ，面积比 $\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ ，

设 $S_{\triangle DBE} = 4a$ ，则 $S_{\triangle ABC} = 25a$ ，

∴ $S_{\text{四边形} ADEC} = 25a - 4a = 21a$ ，

$$\therefore S_{\triangle DBE} : S_{\text{四边形} ADEC} = \frac{4}{21}.$$

故答案为：\$\frac{4}{21}\$.

16. (4分) 如图，在矩形 \$ABCD\$ 中，\$DE\$ 平分 \$\angle ADC\$，交 \$AB\$ 于点 \$E\$，\$EF \perp CE\$，交 \$AD\$ 于点 \$F\$，以 \$CE\$，\$EF\$ 为边，作矩形 \$CEFG\$，\$FG\$ 与 \$DC\$ 相交于点 \$H\$。则下列结论：

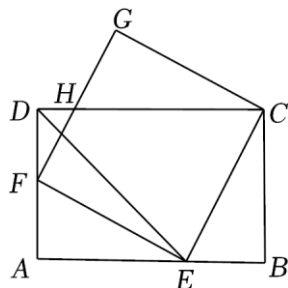
① \$AE=BC\$；

② 若 \$AE=4\$，\$CH=5\$，则 \$CE=2\sqrt{5}\$；

③ \$EF=AE+DH\$；

④ 当 \$F\$ 是 \$AD\$ 的中点时，\$S_{\text{四边形} ABCD} : S_{\text{四边形} CEF G} = 6 : 5\$.

其中正确的结论是 ①②④。（填写所有正确结论的序号）



【答案】①②④.

【分析】①根据矩形的性质证明 \$\triangle ADE\$ 是等腰直角三角形，进而可以判断；

②首先证明 \$\triangle GCH \sim \triangle BCE\$，证明 \$\triangle AEF \cong \triangle BCE\$ (AAS)，可得 \$EF=EC\$，可得四边形 \$CEFG\$ 是正方形，所以 \$CG=CE\$，进而可以判断；

③根据勾股定理可得 \$DH=DC-CH=6-5=1\$，根据 \$EF=2\sqrt{5}\$，\$AE=4\$，即可判断；

④设 \$AF=DF=a\$，则 \$AD=BC=AE=2a\$，可得 \$AB=AE+BE=3a\$，所以 \$S_{\text{四边形} ABCD}=2a \cdot 3a=6a^2\$，根据勾股定理可得 \$EF=\sqrt{5}a\$，所以得 \$S_{\text{四边形} EFGC}=EF^2=5a^2\$，进而可以判断.

【解答】解：①在矩形 \$ABCD\$ 中，\$\angle A=90^\circ\$，\$AD=BC\$，

\$\because DE\$ 平分 \$\angle ADC\$，

\$\therefore \angle ADE=45^\circ\$，

\$\therefore \triangle ADE\$ 是等腰直角三角形，

\$\therefore AD=AE\$，

\$\therefore AE=BC\$；故①正确；

② \$\because \angle GCH + \angle HCE = 90^\circ\$，\$\angle ECB + \angle HCE = 90^\circ\$，

\$\therefore \angle GCH = \angle ECB\$，

$$\because \angle G = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle GCH \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CH}{CE} = \frac{CG}{CB},$$

$$\because \angle AEF + \angle CEB = 90^\circ, \quad \angle BCE + \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BCE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B = 90^\circ \\ \angle AEF = \angle BCE \\ AE = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EF = EC,$$

$\because$ 四边形 $CEFG$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是正方形,

$$\therefore CG = CE,$$

$$\therefore \frac{CH}{CE} = \frac{CG}{CB},$$

$$\therefore CE^2 = CH \cdot CB = 5 \times 4 = 20,$$

$$\therefore CE = 2\sqrt{5}; \text{ 故②正确;}$$

$$\text{③若 } BC = AE = 4, \quad CE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BE = \sqrt{CE^2 - BC^2} = \sqrt{20 - 16} = 2,$$

$$\therefore CD = AB = AE + BE = 4 + 2 = 6,$$

$$\therefore DH = DC - CH = 6 - 5 = 1,$$

$$\because EF = 2\sqrt{5}, \quad AE = 4,$$

$$\therefore EF \neq AE + DH; \text{ 故③错误;}$$

④当 F 是 AD 的中点时,

设 $AF = DF = a$, 则 $AD = BC = AE = 2a$,

$$\because BE = AF = a,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 3a,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD} = 2a \cdot 3a = 6a^2,$$

$$\because EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} EFGC} = EF^2 = 5a^2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABCD} : S_{\text{四边形} CEF G} = 6a^2 : 5a^2 = 6 : 5. \text{ 故④正确.}$$

综上所述：①②④.

故答案为：①②④.

17. (4分) 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 6 和 8，则其周长为 20.

【答案】见试题解答内容

【分析】作出图形，根据菱形的对角线互相垂直平分求出 AO 、 BO 的长度，再根据勾股定理列式求出 AB 的长，然后根据菱形的周长公式进行计算即可得解.

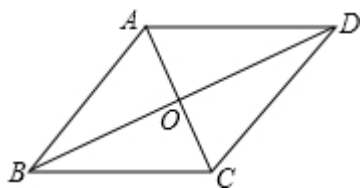
【解答】解：如图， $\because AC=6$ ， $BD=8$ ，

$$\therefore AO = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad BO = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \quad \text{且 } AC \perp BD,$$

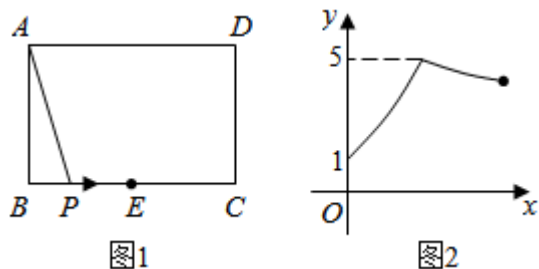
$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \text{菱形的周长为 } 5 \times 4 = 20.$$

故答案为：20.



18. (4分) 如图 1，矩形 $ABCD$ 中，点 E 为 BC 的中点，点 P 沿 BC 从点 B 运动到点 C ，设 B ， P 两点间的距离为 x ， $PA - PE = y$ ，图 2 是点 P 运动时 y 随 x 变化的关系图象，则 $BC =$ 6.



【答案】6.

【分析】当 $x=0$ ，即 P 在 B 点时， $BA - BE = 1$ ；利用两点之间线段最短，得到 $PA - PE \leq AE$ ，得 y 的最大值为 $AE = 5$ ；在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理求出 BE 的长，再根据 $BC = 2BE$ ，求出 BC 的长.

【解答】解：由函数图象知：当 $x=0$ ，即 P 在 B 点时， $BA - BE = 1$.

利用两点之间线段最短，得到 $PA - PE \leq AE$.

$\therefore y$ 的最大值为 AE ,

$$\therefore AE=5.$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得： $BA^2+BE^2=AE^2=25$ ，

设 BE 的长度为 t ，

则 $AB=t+1$ ，

$$\therefore (t+1)^2+t^2=25,$$

$$\text{即：} t^2+t-12=0,$$

$$\therefore (t+4)(t-3)=0,$$

解得 $t=-4$ 或 $t=3$ ，

由于 $t>0$ ，

$$\therefore t=3,$$

$$\therefore AB=t+2=3+2=5, AD=BC=3\times 2=6.$$

故答案为：6.

三. 解答题（共 90 分）

19.（18 分）计算：

$$(1) -1^{2010} - |-7| + \sqrt{9} \times (3.14 - \pi)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1};$$

$$(2) \text{解方程：} \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x-2};$$

$$(3) \text{解不等式组：} \begin{cases} 3x-1 \geq x+1 \\ x+4 < 4x-2 \end{cases}.$$

【答案】（1）0；

$$(2) x = -1;$$

$$(3) x > 2.$$

【分析】（1）利用有理数的乘法法则，绝对值的性质，零指数幂，负整数指数幂进行计算即可；

（2）利用解分式方程的步骤解方程即可；

（3）分别解各不等式后即可求得不等式组的解集.

【解答】解：（1）原式 $= -1 - 7 + 3 \times 1 + 5$

$$= -8 + 3 + 5$$

$$= 0;$$

$$(2) \text{原方程两边同乘 } (x-1)(x-2), \text{ 去分母得：} 2(x-2) = 3(x-1),$$

$$\text{去括号得：} 2x - 4 = 3x - 3,$$

$$\text{移项，合并同类项得：} -x = 1,$$

系数化为 1 得： $x = -1$ ，

检验：将 $x = -1$ 代入 $(x-1)(x-2)$ 得 $-2 \times (-3) = 6 \neq 0$ ，

故原分式方程的解为： $x = -1$ ；

（3）解第一个不等式得： $x \geq 1$ ，

解第二个不等式得： $x > 2$ ，

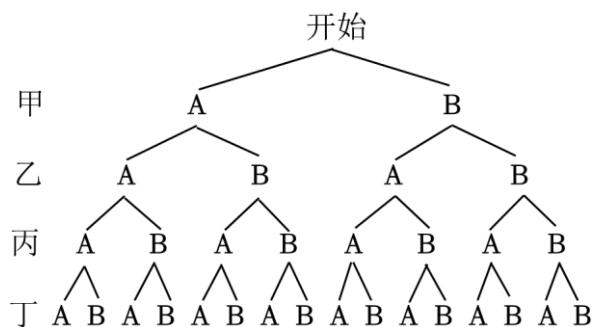
故原不等式组的解集为： $x > 2$ 。

- 20.（10 分）甲、乙、丙、丁四人各自随机选择到 A, B 两个献血站进行爱心献血．求这四人在同一个献血站献血的概率．

【答案】 $\frac{1}{8}$ ．

【分析】利用画树状图法列举出所有等可能的结果，从中找出这四人在同一个献血站献血的可能结果，再利用概率公式求出即可．

【解答】解：画树状图如下：



共有 16 种等可能情况，其中这四人在同一个献血站献血的有 2 种结果，

$$\therefore P(\text{这三人在同一个献血站献血}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

- 21.（12 分）八年级某班同学为了了解 2018 年某居委会家庭月均用水情况，随机调查了该居委会部分家庭月均用水量，并列出下面的频数分布表：

请解答以下问题：

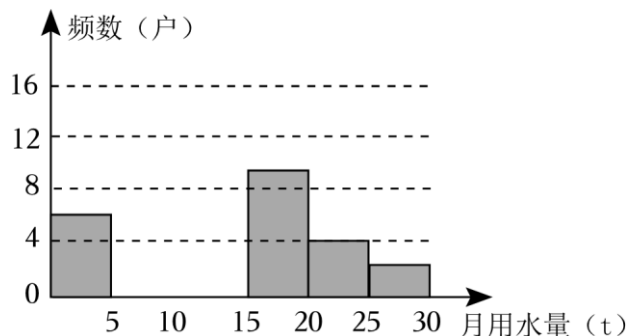
（1）这次随机调查了该居委会 50 户，把频数分布直方图补充完整；

（2）求该居委会用水量不超过 15t 的家庭占被调查家庭总数的百分比；

月均用水量 x (t)	频数 (户)
$0 < x \leq 5$	6
$5 < x \leq 10$	12
$10 < x \leq 15$	16

$15 < x \leq 20$	10
$20 < x \leq 25$	4
$25 < x \leq 30$	2

(3) 若该居委会共有 1000 户家庭，根据调查数据估计，该小区月均用水量超过 20t 的家庭大约有多少户？



【答案】见试题解答内容

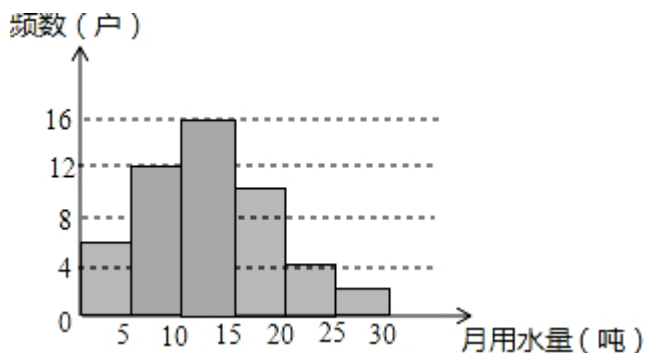
【分析】(1) 根据频数分布表，将各组频数相加可得调查总户数，再补全频数分布直方图即可；

(2) 用不超过 15t 的家庭总数除以被调查家庭总数即可；

(3) 根据样本数据中超过 20t 的家庭数，即可得出 1000 户家庭超过 20t 的家庭数。

【解答】解：(1) $6+12+16+10+4+2=50$ (户)。

即这次随机调查了该居委会 50 户，频数分布直方图补充如下：



故答案为 50；

$$(2) \frac{6+12+16}{50} \times 100\% = 68\%.$$

即该居委会用水量不超过 15t 的家庭占被调查家庭总数的百分比为 68%；

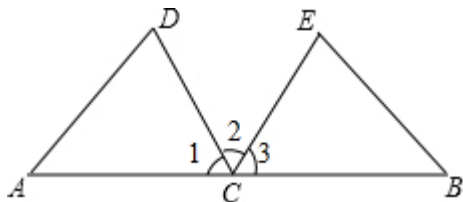
$$(3) 1000 \times \frac{4+2}{50} = 120 \text{ (户)}.$$

即该小区月均用水量超过 20t 的家庭大约有 120 户。

22. (10 分) 如图, C 是线段 AB 的中点, CD 平分 $\angle ACE$, CE 平分 $\angle BCD$, $CD=CE$.

(1) 求证: $\triangle ACD \cong \triangle BCE$;

(2) 若 $\angle D=50^\circ$, 求 $\angle B$ 的度数.



【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 先利用角平分线性质的、以及等量代换, 可证出 $\angle 1 = \angle 3$, 结合 $CD=CE$, C 是 AB 中点, 即 $AC=BC$, 利用 SAS 可证全等; (2) 利用角平分线性质的, 可知 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, 从而求出 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, 再利用全等三角形的性质可得出 $\angle E = \angle D$, 在 $\triangle BCE$ 中, 利用三角形内角和是 180° , 可求出 $\angle B$.

【解答】(1) 证明: $\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$$\therefore AC=BC,$$

又 $\because CD$ 平分 $\angle ACE$, CE 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$\because$ 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CD=CE \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AC=BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)}.$$

(2) 解: $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ,$$

$$\because \triangle ACD \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore \angle E = \angle D = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle E - \angle 3 = 70^\circ$$

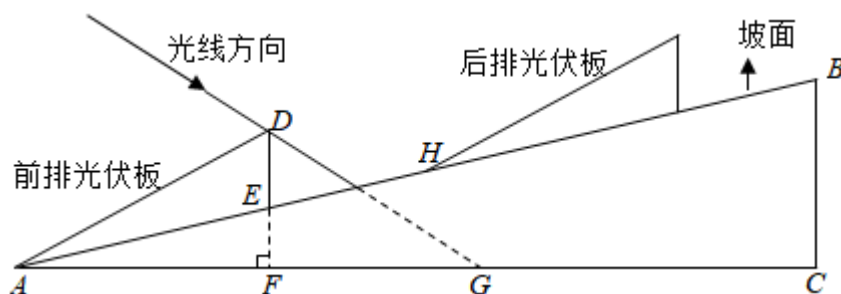
23. (10 分) 如图, 斜坡 AB 的坡角 $\angle BAC=13^\circ$, 计划在该坡面上安装两排平行的光伏板. 前排光伏板的一端位于点 A , 过其另一端 D 安装支架 DE , DE 所在的直线垂直于水平线 AC , 垂足为点 F , E 为 DF 与 AB 的交点. 已知 $AD=100\text{cm}$, 前排光伏板的坡角 $\angle DAC=28^\circ$.

(1) 求 AE 的长（结果取整数）；

(2) 冬至日正午，经过点 D 的太阳光线与 AC 所成的角 $\angle DGA=32^\circ$ ，后排光伏板的前端 H 在 AB 上。此时，若要后排光伏板的采光不受前排光伏板的影响，则 EH 的最小值为多少（结果取整数）？

参考数据： $\sqrt{2}\approx 1.41$ ， $\sqrt{3}\approx 1.73$ ， $\sqrt{6}\approx 2.45$ 。

锐角 A	13°	28°	32°
三角函数			
$\sin A$	0.22	0.47	0.53
$\cos A$	0.97	0.88	0.85
$\tan A$	0.23	0.53	0.62



【答案】(1) $AE\approx 91\text{cm}$ ；

(2) 约为 32cm 。

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，由锐角三角函数定义求出 AF 的长，再在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中，由锐角三角函数定义求出 AE 的长即可；

(2) 设 DG 交 AB 于 M ，过点 A 作 $AN\perp DG$ 于 N ，由锐角三角函数定义求出 DF 、 FG 的长，得出 AG 的长，再由锐角三角函数定义求出 AN 的长，然后证 $\triangle AMN$ 为等腰直角三角形，得 $AM=\sqrt{2}AN\approx 123.1$ (cm)，由 $EM=AM-AE$ ，即可得出答案。

【解答】解：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $\cos\angle DAF=\frac{AF}{AD}$ ，

$$\therefore AF=AD\cdot\cos\angle DAF=100\times\cos 28^\circ=100\times 0.88=88\text{ (cm)},$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\cos\angle EAF=\frac{AF}{AE}$ ，

$$\therefore AE=\frac{AF}{\cos\angle EAF}=\frac{88}{\cos 13^\circ}=\frac{88}{0.97}\approx 91\text{ (cm)};$$

(2) 设 DG 交 AB 于 M ，过点 A 作 $AN\perp DG$ 于 N ，如图所示：

$$\therefore \angle AMN=\angle MAG+\angle DGA=13^\circ+32^\circ=45^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $DF=AD\cdot\sin\angle DAC=100\times\sin 28^\circ=100\times 0.47=47\text{ (cm)}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中， $\tan \angle DGA = \frac{DF}{FG}$ ，

$$\therefore \tan 32^\circ = \frac{47}{FG},$$

$$\therefore FG = \frac{47}{\tan 32^\circ} = \frac{47}{0.62} \approx 75.8 \text{ (cm)},$$

$$\therefore AG = AF + FG = 88 + 75.8 = 163.8 \text{ (cm)},$$

在 $\text{Rt}\triangle AGN$ 中， $AN = AG \cdot \sin \angle DGA = 163.8 \times \sin 32^\circ = 163.8 \times 0.53 \approx 86.8 \text{ (cm)}$ ，

$$\because \angle AMN = 45^\circ,$$

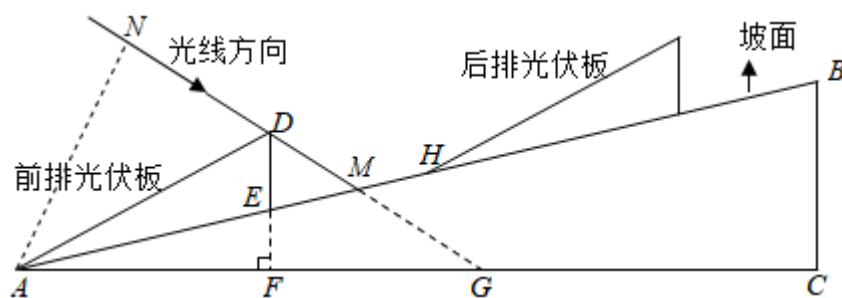
$\therefore \triangle AMN$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AM = \sqrt{2}AN \approx 1.41 \times 86.8 \approx 122.4 \text{ (cm)},$$

$$\therefore EM = AM - AE \approx 122.4 - 91 \approx 31.4 \text{ (cm)},$$

当 M 、 H 重合时， EH 的值最小，

$\therefore EH$ 的最小值约为 32cm 。

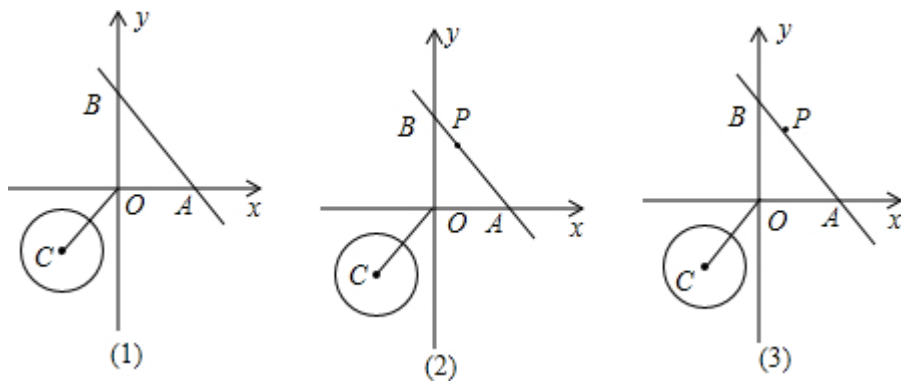


24. (15 分) 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点， $\odot C$ 的圆心坐标为 $(-2, -2)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 。函数 $y = -x + 2$ 的图象与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，

(1) 图 1 中，连接 CO 并延长和 AB 交于点 G ，求证： $CG \perp AB$ ；

(2) 图 2 中，当点 P 从 B 出发，以 1 个单位/秒的速度在线段 AB 上运动，连接 PO ，当直线 PO 与 $\odot C$ 相切时，求点 P 运行的时间 t 是多少？

(3) 图 3 中，当直线 PO 与 $\odot C$ 相交时，设交点为 E 、 F ，如果 $CM \perp EF$ 于点 M ，令 $PO = x$ ， $MO = y$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式，写出 x 的取值范围。



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）先求得直线 OC 的解析式，依据一次项系数乘积为 -1 的两条直线相互垂直，可证明 $CG \perp AB$ ；

（2）由 $y=x$ 与 $y=-x+2$ 可求得点 G 的坐标，然后再求得点 B 的坐标为，接下来依据两点间的距离公式求得 $OC=2\sqrt{2}$ ， $OG=\sqrt{2}$ ， $BG=\sqrt{2}$ 。接下来证明 $\triangle OCE \sim \triangle OPG$ ，由相似三角形的性质可求得 $PG=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，从而可求得 BP 的长，故此可求得 t 的值

（3）如图所示：先证明 $\triangle MOC \sim \triangle GOP$ ，由相似三角形的性质可得到 y 与 x 的函数关系式，当点 P 与点 G 重合时， OP 有最小值，当 OP 与圆 C 相切时 OP 有最大值，从而可确定出自变量 x 的取值范围。

【解答】解：（1） $\because$ 设直线 OC 的解析式为 $y=kx$ ，将点 C 的坐标代入得： $-2k=-2$ ，解得： $k=1$ ，

$\therefore$ 直线 OC 的解析式为 $y=x$ 。

$\because$ 函数 $y=-x+2$ 的一次项系数与函数 $y=x$ 的一次项系数的乘积为 $-1 \times 1 = -1$ ，

$\therefore$ 直线 $y=x$ 与直线 $y=-x+2$ 相互垂直。

$\therefore CG \perp AB$ 。

（2） $\because$ 将 $y=x$ 与 $y=-x+2$ 联立解得： $x=1$ ， $y=1$ ，

$\therefore$ 点 G 坐标为 $(1, 1)$ 。

$\because$ 将 $x=0$ 代入 $y=-x+2$ 得 $y=2$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 2)$ 。

由两点间的距离公式可知 $OC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ， $OG=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ， $BG=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$ 。

①如图 1 所示：

当点 P 与点 G 重合时， x 有最小值，最小值 $= OG = \sqrt{2}$.

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是 $\sqrt{2} \leq x < \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

25. (15 分) 如图 1, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 90^\circ$, AB, FE, DC 为铅直方向的边, AF, ED, BC 为水平方向的边, 点 E 在 AB, CD 之间, 且在 AF, BC 之间, 我们称这样的图形为“ L 图形”, 记作“ L 图形 $ABCDEF$ ”. 若直线将 L 图形分成面积相等的两个图形, 则称这样的直线为该 L 图形的面积平分线.

【活动】

小华同学给出了图 1 的面积平分线的一个作图方案: 如图 2, 将这个 L 图形分成矩形 $AGEF$ 、矩形 $GBCD$, 这两个矩形的对称中心 O_1, O_2 所在直线是该 L 图形的面积平分线.

请用无刻度的直尺在图 1 中作出其他的面积平分线. (作出一种即可, 不写作法, 保留作图痕迹)

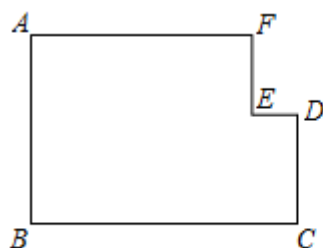


图1

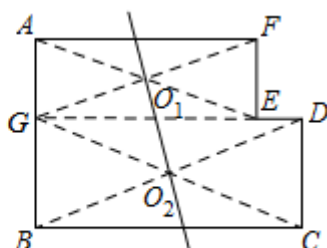


图2

【思考】

如图 3, 直线 O_1O_2 是小华作的面积平分线, 它与边 BC, AF 分别交于点 M, N , 过 MN 的中点 O 的直线分别交边 BC, AF 于点 P, Q , 直线 PQ 是 (填“是”或“不是”) L 图形 $ABCDEF$ 的面积平分线.

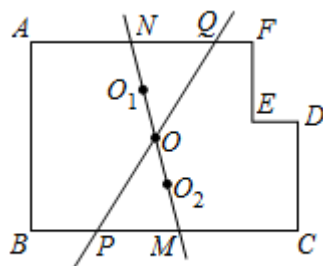


图3

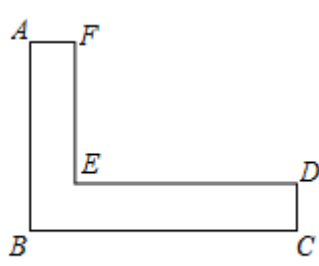


图4

【应用】

在 L 图形 $ABCDEF$ 形中, 已知 $AB=4, BC=6$.

(1) 如图 4, $CD=AF=1$.

①该 L 图形的面积平分线与两条水平的边分别相交于点 P, Q , 求 PQ 长的最大值;

②该 L 图形的面积平分线与边 AB, CD 分别相交于点 G, H , 当 GH 的长取最小值时, BG 的长为 $-\frac{3}{4}$.

(2) 设 $\frac{CD}{AF} = t$ ($t > 0$), 在所有的与铅直方向的两条边相交的面积平分线中, 如果只有与边 AB, CD 相交的面积平分线, 直接写出 t 的取值范围 $t > \frac{2}{3}$.

【答案】【活动】所画图形如图 1, 见解答;

【思考】是;

【应用】(1) ① PQ 长的最大值为 $\sqrt{10}$;

② $\frac{3}{4}$;

(2) $t > \frac{2}{3}$.

【分析】【活动】如图 1, 根据题意把原本图形分成左右两个矩形, 这两个矩形的对称中心 O_1, O_2 所在直线是该 L 图形的面积平分线;

【思考】如图 2, 证明 $\triangle OQN \cong \triangle OPM$ (AAS), 根据割补法可得直线 PQ 是 L 图形 $ABCDEF$ 的面积平分线;

【应用】

(1) ①如图 3, 先计算 L 图形 $ABCDEF$ 的面积, 根据面积平分线可知梯形 $CDQP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$, 根据面积公式列式可得 CH 的长, 根据勾股定理可得 PQ 的最大值;

②当 $GH \perp AB$ 时, GH 最小, 设 $BG = x$, 根据面积相等列方程, 解出即可;

(2) 如图 5, 由已知得: $CD = tAF$, 直线 DE 将图形分成上下两个矩形, 当上矩形面积小于下矩形面积时, 在所有的与铅直方向的两条边相交的面积平分线中, 只有与边 AB, CD 相交的面积平分线, 列不等式可得 t 的取值.

【解答】解: 【活动】如图 1, 直线 O_1O_2 是该 L 图形的面积平分线;

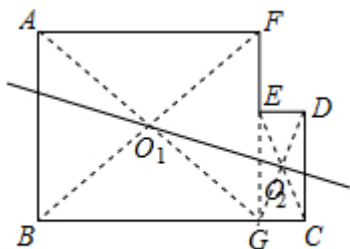


图1

【思考】如图 2, $\because \angle A = \angle B = 90^\circ$,

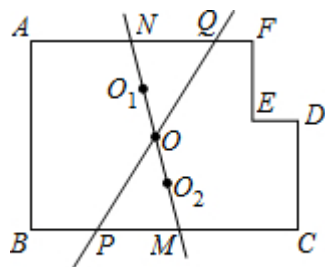


图2

$$\therefore AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle NQO = \angle MPO,$$

$\because$ 点 O 是 MN 的中点,

$$\therefore ON = OM,$$

在 $\triangle OQN$ 和 $\triangle OPM$ 中,

$$\begin{cases} \angle NQO = \angle MPO \\ \angle NOQ = \angle MOP, \\ ON = OM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OQN \cong \triangle OPM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore S_{\triangle OQN} = S_{\triangle OPM},$$

$$\because S_{\text{梯形} ABMN} = S_{\text{梯形} MNFEDC},$$

$$\therefore S_{\text{梯形} ABMN} - S_{\triangle OPM} = S_{\text{梯形} MNFEDC} - S_{\triangle OQN},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABPON} = S_{\triangle CDEFQOM},$$

$$\therefore S_{\triangle ABPON} + S_{\triangle OQN} = S_{\triangle CDEFQOM} + S_{\triangle OPM},$$

$$\text{即 } S_{\text{梯形} ABPQ} = S_{\text{梯形} CDEFQP},$$

$\therefore$ 直线 PQ 是 L 图形 $ABCDEF$ 的面积平分线.

故答案为: 是;

【应用】

(1) ①如图 3, 当 P 与 B 重合时, PQ 最大, 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于 H ,

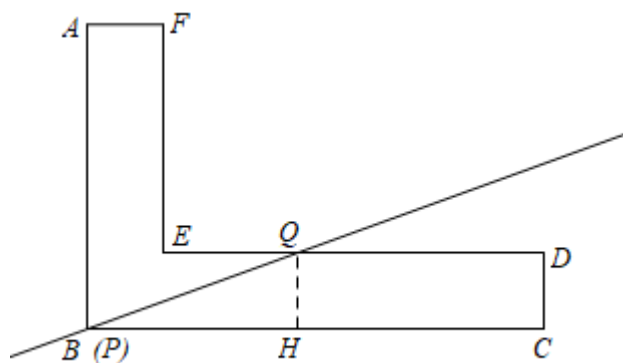


图3

L 图形 $ABCDEF$ 的面积 $= 4 \times 6 - (4 - 1) \times (6 - 1) = 9$,

$\because PQ$ 是 L 图形 $ABCDEF$ 的面积平分线,

$$\therefore \text{梯形 } CDQP \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times (DQ + BC) \times CD = \frac{9}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times (DQ + 6) \times 1 = \frac{9}{2},$$

$$\therefore DQ = CH = 3,$$

$$\therefore PH = 6 - 3 = 3,$$

$$\therefore QH = CD = 1,$$

$$\text{由勾股定理得: } PQ = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10};$$

即 PQ 长的最大值是 $\sqrt{10}$;

②如图 4, 当 $GH \perp AB$ 时 GH 最短, 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M ,

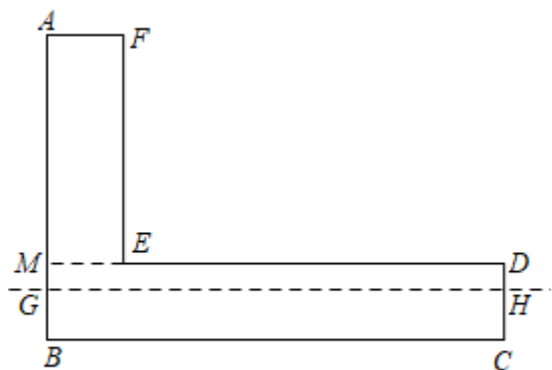


图4

设 $BG = x$, 则 $MG = 1 - x$,

根据上下两部分面积相等可知, $6x = (4 - 1) \times 1 + (1 - x) \times 6$,

$$\text{解得 } x = \frac{3}{4}, \text{ 即 } BG = \frac{3}{4};$$

故答案为: $\frac{3}{4}$;

$$(2) \because \frac{CD}{AF} = t \ (t > 0),$$

$$\therefore CD = tAF,$$

在所有的与铅直方向的两条边相交的面积平分线中，只有与边 AB ， CD 相交的面积平分线，

如图 5，直线 DE 将图形分成上下两个矩形，当上矩形面积小于下矩形面积时，在所有的与铅直方向的两条边相交的面积平分线中，只有与边 AB ， CD 相交的面积平分线，

延长 DE 交 AB 于 G ，延长 FE 交 BC 于 H ，

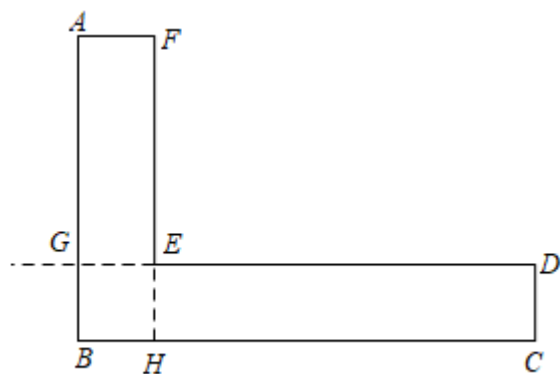


图5

只需要满足 $S_{\text{矩形} AGEF} < S_{\text{矩形} EHCD}$ ，

即 $S_{\text{矩形} ABHF} < S_{\text{矩形} CDGB}$ ，

$$\therefore 6CD > 4AF,$$

$$\therefore \frac{CD}{AF} > \frac{4}{6},$$

$$\therefore t > \frac{2}{3}.$$

故答案为： $t > \frac{2}{3}$.