

2022-2023 学年江苏省镇江市八年级（下）期末数学试卷

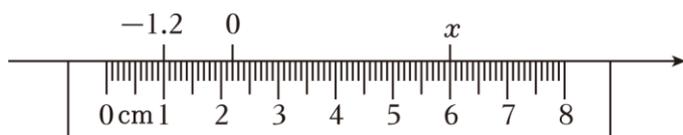
一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请将正确选项前的字母填涂在答题卡相应的位置上。）

- 1.（4 分）小明在电脑上 1 分钟录入汉字 50 个，小明的爸爸 1 分钟录入汉字 30 个．如果小明和爸爸各录入 x 个汉字，那么爸爸比小明多用（ ）分钟．



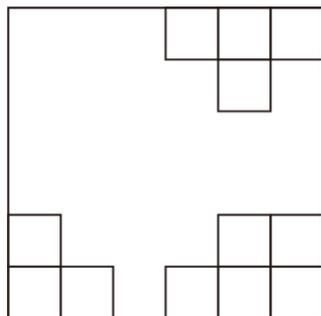
- A. $\frac{x}{50} - \frac{x}{30}$ B. $\frac{x}{30} - \frac{x}{50}$ C. $\frac{30}{x} - \frac{50}{x}$ D. $\frac{50}{x} - \frac{30}{x}$

- 2.（4 分）将一把刻度尺按如图所示的方式放在数轴上（数轴的单位长度是 1cm），刻度尺上的“1cm”和“6cm”分别对应数轴上“-1.2cm”和“ x cm”，则 x 的值为（ ）



- A. 3.8 B. 2.8 C. 4.8 D. 6

- 3.（4 分）在俄罗斯方块游戏中，已拼成的图案如图所示，现又出现一小方块拼图向下运动，你必须进行以下哪项操作，才能使所有的方块自动消失（ ）



- A. 向右平移 1 格 B. 向右平移 2 格
C. 向左平移 1 格 D. 向左平移 2 格

- 4.（4 分）有 4 张大小相同的正方形纸片，按图中的虚线剪开（同一图形中，作相同标记的两条线段相等），利用剪下来的两部分图形能拼成三角形和平行四边形的有（ ）

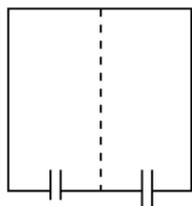


图 (1)

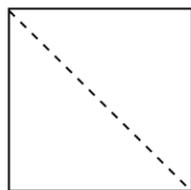


图 (2)

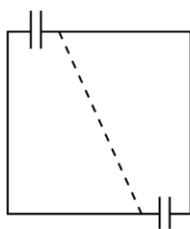


图 (3)

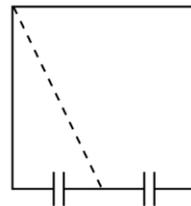
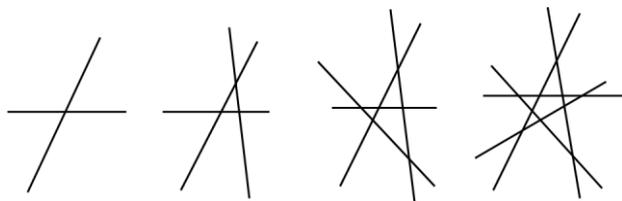


图 (4)

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. (4 分) 小明在桌上摆放小棒, 他发现: 两根小棒最多有 1 个交点, 三根小棒最多有 3 个交点 \dots , 若 n 根小棒最多有 300 个交点, 则 n 的值为 ()



- A. 24 个 B. 25 个 C. 26 个 D. 27 个

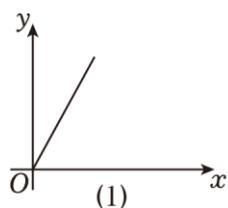
6. (4 分) 周末, 小丽同学做了以下几件事情:

第一件: 小丽去文具店购买黑色水笔, 支付费用与购买黑色水笔支数的关系:

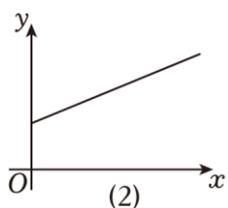
第二件: 小丽去奶奶家吃饭, 饭后, 和奶奶聊一会天, 然后再按原速度原路返回, 小丽离家的距离与时间的关系:

第三件: 小丽和奶奶聊天时, 了解到: 奶奶用的手机是含有月租费的计费方式, 奶奶每月支付的话费与通话时间的关系.

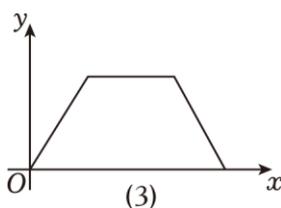
用如图的函数图象刻画上述事情, 排序正确的是 ()



(1)



(2)



(3)

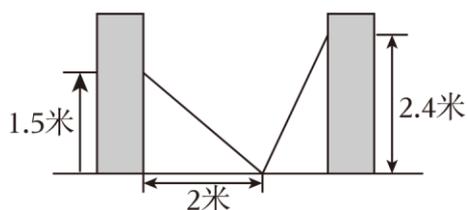
- A. (1) (2) (3) B. (2) (1) (3) C. (1) (3) (2) D. (2) (3) (1)

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题卡相应的位置上.)

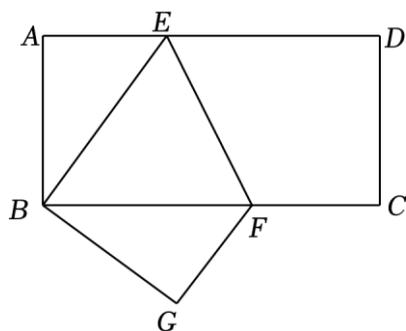
7. (4 分) 因式分解: $4x^2 - 1 =$ _____.

8. (4 分) $\sqrt{12} + \sqrt{3} =$ _____.

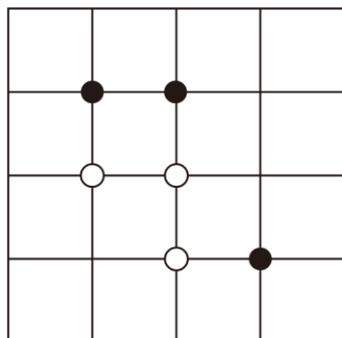
9. (4 分) 如图, 小巷左右两侧是竖直的墙壁, 一架梯子斜靠在左墙时, 梯子底端到左墙角的距离为 2 米, 顶端距离地面 1.5 米. 若梯子底端位置保持不动, 将梯子斜靠在右墙时, 顶端距离地面 2.4 米, 则小巷的宽度为 _____ 米.



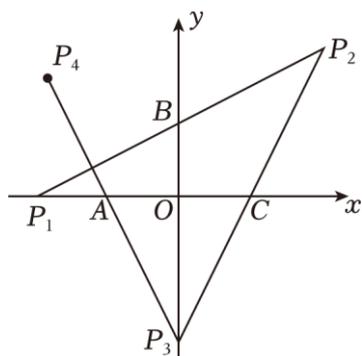
10. (4分) 已知矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=8\text{cm}$, $AD=16\text{cm}$, 将此长方形纸片折叠, 使点 B 与点 D 重合, 折痕为 EF , 则折痕 EF 的长为 _____ cm .



11. (4分) 如图, 小丽和小明下棋, 小丽执白色棋子, 小明执黑色棋子, 若棋盘中心的白色棋子位置用 $(1, -2)$ 表示, 小明将第 4 枚黑色棋子放入棋盘后, 所有棋子构成轴对称图形, 则小明放的黑色棋子的位置可能是 _____.



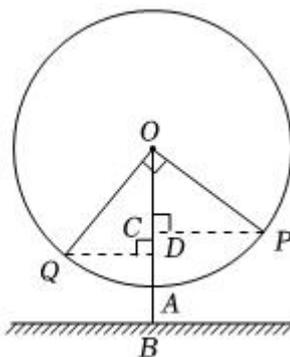
12. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, A 、 B 、 C 的坐标分别为 $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$. 一个电动玩具从原点 O 出发, 第一次跳跃到点 P_1 , 使得点 P_1 与点 O 关于点 A 成中心对称; 第二次跳跃到点 P_2 , 使得点 P_2 与点 P_1 关于点 B 成中心对称; 第三次跳跃到点 P_3 , 使得点 P_3 与点 P_2 关于点 C 成中心对称; 第四次跳跃到点 P_4 , 使得点 P_4 与点 P_3 关于点 A 成中心对称, \dots . 电动玩具照此规律跳下去, 则点 P_{2023} 的坐标是 _____.



三、解答题（共 8 题，共 72 分.请将答案及演算步骤或推理过程写在答题卡相应位置上）

13. (6 分) 解方程: $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$.

14. (10 分) 我国某巨型摩天轮的最低点距离地面 $10m$ ，圆盘半径为 $50m$ 。摩天轮的圆周上均匀地安装了若干个座舱（本题中将座舱视为圆周上的点），游客在距离地面最近的位置进舱。小明、小丽先后从摩天轮的底部入舱出发开始观光，当小明观光到点 P 时，小丽到点 Q ，此时 $\angle POQ=90^\circ$ ，且小丽距离地面 $20m$ 。



(1) $\triangle OCP$ 与 $\triangle QDO$ 全等吗？为什么？

(2) 求此时两人所在座舱距离地面的高度差。

15. (6 分) 中华优秀传统文化是中华民族的根和魂，是中华文明的智慧结晶和精华所在。为弘扬优秀传统文化，某校传统文化社团为了解七年级 900 名同学对于“二十四节气”的熟知程度，开展了一次知识竞赛。

【确定调查方式】

(1) 该社团抽取了 30 名学生的竞赛成绩作为样本，下面的抽样调查方式合理的是 ()；

- A. 抽取七(1)班 30 名学生的竞赛成绩作为样本
- B. 抽取 30 名男生的竞赛成绩作为样本
- C. 从中随机抽取 30 名学生的竞赛成绩作为样本
- D. 抽取学号为 1~30 名学生的竞赛成绩作为样本

【整理分析数据】

该社团采用合理的调查方式获得 30 名学生的竞赛成绩，数据如下：

87, 91, 83, 94, 84, 94, 78, 85, 89, 92,
 94, 76, 86, 98, 96, 88, 76, 90, 90, 92,
 75, 78, 88, 95, 100, 90, 82, 80, 90, 80.

(2) 规定：95~100 为 A 等，90~94 为 B 等，85~89 为 C 等，80~84 为 D 等，75~79 为 E 等.

①整理数据，补全下面的统计表：

30 名学生的竞赛成绩统计表

竞赛成绩/分	A 等	B 等	C 等	D 等	E 等
划记		正正	正一	正	正
人数/人		10	6	5	5

②根据统计表画合适的统计图，要求体现各等级的学生人数占总人数的比例情况，可选用 _____ 统计图.

【作出推断决策】

(3) 请估计七年级 900 名同学中竞赛成绩 A 等、B 等共有多少人？

16. (12 分) 每年 5 月 20 日是中国学生营养日. 某营养餐公司为学生提供的 350 克早餐食品中，蛋白质总含量为 10%，早餐包括一份牛奶，一份谷物食品和一个鸡蛋（一个鸡蛋的质量约为 50g，蛋白质含量占 12%；谷物食品和牛奶的部分营养成分如表所示）.

每 100 克 (g) 谷物食品	
能量	2215 千焦 (kJ)
蛋白质	13.0 克 (g)
脂肪	32.4 克 (g)
碳水化合物	50.8 克 (g)
钠	280 毫克 (mg)
每 100 克 (g) 牛奶能量	
能量	261 千焦 (kJ)
蛋白质	3.0 克 (g)
脂肪	3.6 克 (g)

碳水化合物	4.5 克 (g)
钙	100 毫克 (mg)

(1) 设该份早餐中谷物食品为 x 克，牛奶为 y 克，请写出谷物食品中所含的蛋白质为 _____ 克，牛奶中所含的蛋白质为 _____ 克。（用含有 x 、 y 的代数式表示）

(2) 求出 x 、 y 的值；

(3) 该公司为学校提供的营养午餐有 A 、 B 两种套餐（每天只提供一种）。

套餐	主食 (克)	肉类 (克)	蔬果 (克)	其他 (克)
A	150	70	200	30
B	130	75	220	25

为了膳食平衡，建议学生适当的多摄入蔬果量。如果在一周里，学生午餐蔬果摄入总量不少于 1060 克，那么该校在一周里可以选择 A 、 B 套餐各几天？写出所有的方案。（说明：一周按 5 天计算）

17. (10 分) 随着网络的普及和城市交通的多样化，人们出行方式、时间有了更多的选择，我市有 A 类快车、 B 类快车等网约车，收费标准如下。

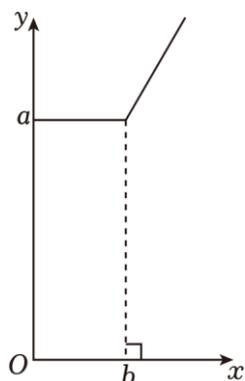
A 类快车：起步价 8.5 元，超过 3.5 千米的部分 2 元/千米，时长费：0.4 元/分钟（ A 类快车行驶的平均速度为 40 千米/时）

B 类快车：起步价 8 元，超过 3 千米的部分 1.8 元/千米（函数图象如图所示）。（1）图中 $a=_____$ ， $b=_____$ ；

(2) 若乘坐 A 类快车的里程数是 10 千米，则 A 类快车的费用是 _____ 元；当里程数超过 3.5 千米时，求 A 快车的费用 y_A （元）与行驶路程 x （千米）之间的函数表达式；

(3) 求 y_B 与 x 之间的函数表达式；

(4) 若从甲地到乙地有 5 千米，你将选择哪种网约车？为什么？



18. (8 分) 阅读下列材料，并解决问题：

【观察发现】

$$\because (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2 + 2\sqrt{5 \times 2} = 7 + 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{2};$$

$$\because (\sqrt{6} + \sqrt{8})^2 = 6 + 8 + 2\sqrt{6 \times 8} = 14 + 2\sqrt{48} = 14 + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{14 + 2\sqrt{48}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{8})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{8} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2};$$

$$\because (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 + 2 - 2\sqrt{5 \times 2} = 7 - 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

【建立模型】形如 $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}$ 的化简（其中 p, q 为正整数），只要找到两个正整数 m, n ($m > n$)，使 $m+n=p, mn=q$ ，那么 $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$.

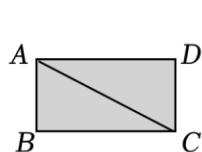
【问题解决】

(1) 化简：① $\sqrt{11+2\sqrt{30}} =$ _____；② $\sqrt{71-16\sqrt{7}} =$ _____；

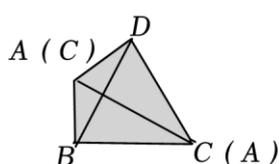
(2) 已知正方形的边长为 a ，现有一个长为 $\frac{11\sqrt{30}}{30}+2$ 、宽为 $2\sqrt{30}$ 的矩形，当它们的面积相等，求正方形的边长 a 。

19. (8分) **【问题情境】**

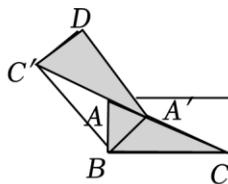
在数学活动课上，同学们以小组为单位开展“矩形纸片的剪拼”活动，如图（1），将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 剪开，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 。同学们测量得 $AB=2\text{cm}$ ， $BC=4\text{cm}$ 。



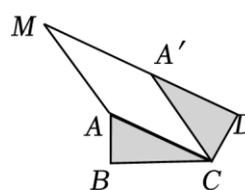
图（1）



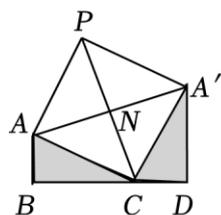
图（2）



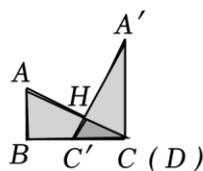
图（3）



图（4）



图（5）



图（6）

【操作发现】

(1) ①快乐小组将这两张三角形纸片按图（2）摆放，连接 BD ，发现 AC 与 BD 的关系为 _____；

②快乐小组将图（2）中 $\triangle A' C' D$ 纸片沿射线 CA 的方向平移，连接 BC' ， BA' ，在平移的过程中，如图（3），当 BC' 与 $A' D$ 平行时，发现四边形 $A' BC' D$ 的形状是_____；

（2）超越小组将图（1）中的 $\triangle ACD$ 以点 C 为旋转中心，按顺时针方向旋转 $\angle\alpha$ ，

①当 $\angle\alpha = \angle ACB$ ，得到如图（4）所示的 $\triangle A' CD$ ，过点 A 作 $A' C$ 的平行线，与 DA' 的延长线交于点 M ，直接写出四边形 $ACA' M$ 的形状是_____；

②当点 B 、 C 、 D 在同一条直线上时，得到如图（5）所示的 $\triangle A' CD$ ，连接 AA' ，取 AA' 的中点 N ，连接 CN 并延长至点 P ，使 $PN = CN$ ，连接 AP 、 $A' P$ ，得到四边形 $ACA' P$ ，请判断四边形 $ACA' P$ 的形状，并证明你的结论；

【实践探究】

（3）如图（6），创新小组在图（5）的基础上，进行如下操作：将 $\triangle A' CD$ 沿着射线 CB 的方向向左平移，使点 D 与点 C 重合， $A' C'$ 与 AD 相交于点 H ，直接写出 $S_{\triangle C' DH} =$ _____。

20.（12分）定义：如图1，在平面直角坐标系中，点 P 是平面内任意一点（坐标轴上的点除外），过点 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，若由点 P 、原点 O 、两个垂足 A 、 B 为顶点的矩形 $OAPB$ 的周长与面积的数值相等时，则称点 P 是平面直角坐标系中的“美好点”。

【尝试初探】

（1）点 $C(2, 3)$ _____“美好点”（填“是”或“不是”）；若点 $D(4, b)$ 是第一象限内的一个“美好点”，则 $b =$ _____；

【深入探究】

（2）①若“美好点” $E(m, 6)$ ($m > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$ ，且 k 为常数) 上，则 $k =$ _____；

②在①的条件下， $F(2, n)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，求 $S_{\triangle EOF}$ 的值；

【拓展延伸】

（3）我们可以从函数的角度研究“美好点”，已知点 $P(x, y)$ 是第一象限内的“美好点”。

①求 y 关于 x 的函数表达式；

②在图2的平面直角坐标系中画出函数图象的草图，观察图象可知该图象可由函数 ($x > 0$) 的图象平移得到；

③结合图象研究性质，下列结论正确的选项是_____；（多项选择，全部选对的得2分，部分选对的得1分，有选错的不得分）

A. 图象与经过点 $(2, 2)$ 且平行于坐标轴的直线没有交点；

B. y 随着 x 的增大而减小；

C. y 随着 x 的增大而增大；

D. 图象经过点 $(10, \frac{3}{2})$ ；

④对于图象上任意一点 (x, y) ，代数式 $(2-x) \cdot (y-2)$ 是否为定值？如果是，请求出这个定值，如果不是，请说明理由。

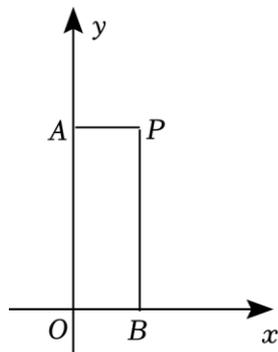
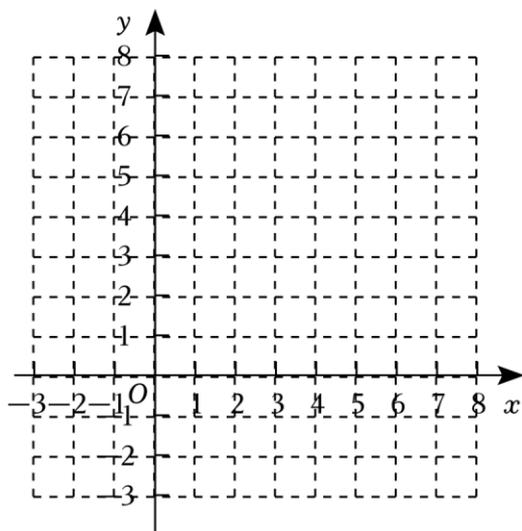


图1



2022-2023 学年江苏省镇江市八年级（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请将正确选项前的字母填涂在答题卡相应的位置上。）

1.（4 分）小明在电脑上 1 分钟录入汉字 50 个，小明的爸爸 1 分钟录入汉字 30 个．如果小明和爸爸各录入 x 个汉字，那么爸爸比小明多用（ ）分钟．



- A. $\frac{x}{50} - \frac{x}{30}$ B. $\frac{x}{30} - \frac{x}{50}$ C. $\frac{30}{x} - \frac{50}{x}$ D. $\frac{50}{x} - \frac{30}{x}$

【答案】B

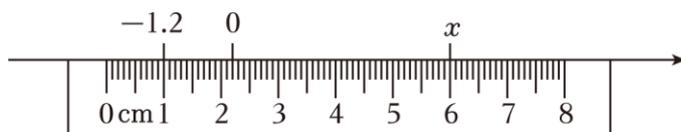
【分析】根据时间=总量÷速度，列式表示即可．

【解答】解：根据题意可得：

爸爸比小明多用的时间为： $(\frac{x}{30} - \frac{x}{50})$ 分钟，

故选：B．

2.（4 分）将一把刻度尺按如图所示的方式放在数轴上（数轴的单位长度是 1cm），刻度尺上的“1cm”和“6cm”分别对应数轴上“-1.2cm”和“ x cm”，则 x 的值为（ ）



- A. 3.8 B. 2.8 C. 4.8 D. 6

【答案】A

【分析】根据数轴得出 1 对应的是 1.2，数轴的原点在 2.2 处，刻度尺 6 对应数轴是 3.8 即可．

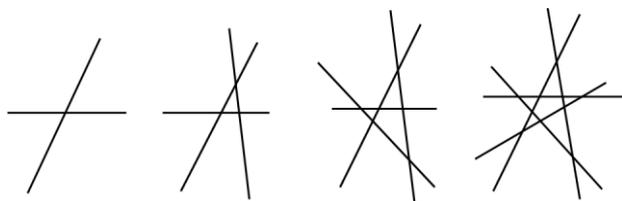
【解答】解：根据数轴可知：刻度尺 1 对应数轴是 -1.2，则数轴原点对应刻度尺是 2.2，

刻度尺 6 所对应数轴上的数为：

解得： $x=5 - 1.2=3.8$ ，

故选：A．

5. (4分) 小明在桌上摆放小棒，他发现：两根小棒最多有 1 个交点，三根小棒最多有 3 个交点…，若 n 根小棒最多有 300 个交点，则 n 的值为 ()



- A. 24 个 B. 25 个 C. 26 个 D. 27 个

【答案】 B

【分析】 从简单情形考虑：分别求出 2 条、3 条、4 条、5 条直线相交时最多的交点个数，找出规律即可解答.

【解答】 解：2 条直线相交最多有 1 个交点；

3 条直线相交最多有 $1+2$ 个交点；

4 条直线相交最多有 $1+2+3$ 个交点；

5 条直线相交最多有 $1+2+3+4$ 个交点；

……

$\therefore n$ 条直线相交最多有 $1+2+3+4+5+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ 个交点；

$$\therefore \frac{1}{2}n(n-1) = 300,$$

解得 $n=25$ (负值已舍去),

则 n 值为 25.

故选：B.

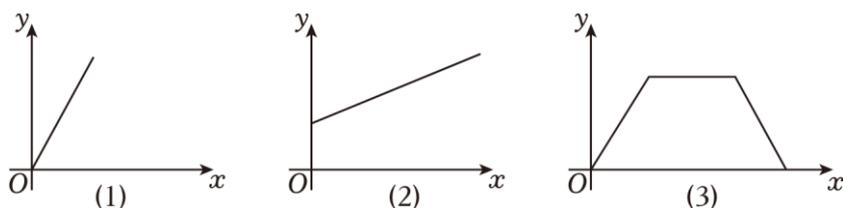
6. (4分) 周末，小丽同学做了以下几件事情：

第一件：小丽去文具店购买黑色水笔，支付费用与购买黑色水笔支数的关系：

第二件：小丽去奶奶家吃饭，饭后，和奶奶聊一会天，然后再按原速度原路返回，小丽离家的距离与时间的关系：

第三件：小丽和奶奶聊天时，了解到：奶奶用的手机是含有月租费的计费方式，奶奶每月支付的话费与通话时间的关系.

用如图的函数图象刻画上述事情，排序正确的是 ()



- A. (1) (2) (3) B. (2) (1) (3) C. (1) (3) (2) D. (2) (3) (1)

【答案】 C

【分析】小丽去文具店购买黑色水笔，支付费用与购买黑色水笔支数成正比例关系；小丽去奶奶家吃饭，小丽离家的距离从 0 开始变大，到达奶奶家吃饭的时候与家的距离不变，返回时与家的距离变小直至变为 0；奶奶用的手机是含有月租费的计费方式，奶奶每月支付的话费与通话时间成一次函数的关系，据此即可得到答案.

【解答】解：∵小丽去文具店购买黑色水笔，支付费用与购买黑色水笔支数成正比例关系，
∴该变化对应图象 (1)，
∵小丽去奶奶家吃饭，饭后，和奶奶聊一会天，然后再按原速度原路返回，
∴该变化对应图象 (3)，
∵奶奶用的手机是含有月租费的计费方式，奶奶每月支付的话费与通话时间成一次函数关系，
∴该变化对应图象 (2)，

故选：C.

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题卡相应的位置上.）

7. (4 分) 因式分解： $4x^2 - 1 = \underline{(2x+1)(2x-1)}$.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 由于多项式二项，没有公因式，考虑运用平方差公式分解.

【解答】解： $4x^2 - 1$
 $= (2x)^2 - 1$
 $= (2x+1)(2x-1)$

8. (4 分) $\sqrt{12} + \sqrt{3} = \underline{3\sqrt{3}}$.

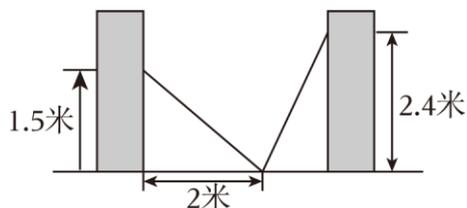
【答案】 见试题解答内容

【分析】 根据二次根式的加减运算法则计算即可.

【解答】解：原式 $= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$ ，
 $= (2+1)\sqrt{3}$ ，
 $= 3\sqrt{3}$ ，

故答案为： $3\sqrt{3}$.

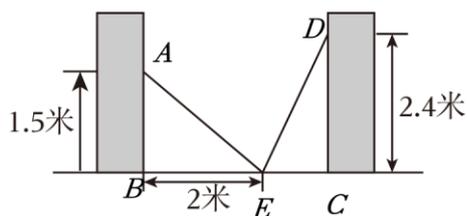
9. (4分) 如图，小巷左右两侧是竖直的墙壁，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙角的距离为2米，顶端距离地面1.5米. 若梯子底端位置保持不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面2.4米，则小巷的宽度为 2.7 米.



【答案】 2.7.

【分析】 在 $Rt\triangle ABE$ 中，根据勾股定理求出 AE 的长，再在 $Rt\triangle CDE$ 中，求出 CE 的长，最后由 $BC = BE + CE$ 进行计算即可得到答案.

【解答】 解：如图，



根据题意得： $AE = DE$,

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AB = 1.5$ 米， $BE = 2$ 米，

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{(1.5)^2 + 2^2} = 2.5 \text{ (米)},$$

在 $Rt\triangle CDE$ 中， $DE = 2.5$ 米， $CD = 2.4$ 米，

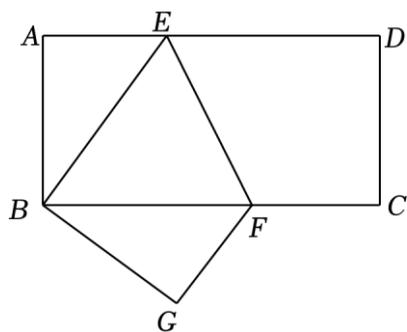
$$\therefore CE = \sqrt{DE^2 - CD^2} = \sqrt{(2.5)^2 - (2.4)^2} = 0.7 \text{ (米)},$$

$$\therefore BC = BE + CE = 2 + 0.7 = 2.7 \text{ (米)},$$

\therefore 小巷的宽度为 2.7 米，

故答案为：2.7.

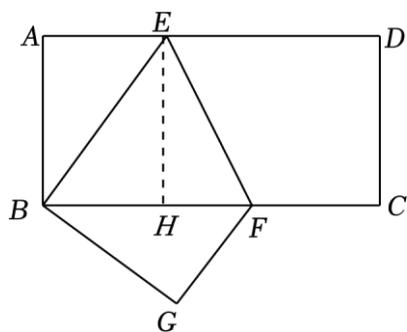
10. (4分) 已知矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 8\text{cm}$ ， $AD = 16\text{cm}$ ，将此长方形纸片折叠，使点 B 与点 D 重合，折痕为 EF ，则折痕 EF 的长为 $4\sqrt{5}$ cm .



【答案】 $4\sqrt{5}$.

【分析】作 $EH \perp CD$ 交 CD 于 H ，由折叠的性质可得： $BE=DE$ ， $GF=CF$ ， $BG=CD=8\text{cm}$ ， $\angle G=\angle C=90^\circ$ ，由勾股定理分别求出 BH 、 BF 的长，从而得到 HF 的长，最后由勾股定理进行计算即可得到答案.

【解答】解：作 $EH \perp CD$ 交 CD 于 H ，



\because 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A = \angle ADG = \angle BHE = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $ABHE$ 是矩形，

$\therefore AB = EH = 8\text{cm}$ ， $AE = BH$ ，

由折叠的性质可得： $BE = DE$ ， $GF = CF$ ， $BG = CD = 8\text{cm}$ ， $\angle G = \angle C = 90^\circ$ ，

设 $AE = x\text{cm}$ ，则 $BE = DE = (16 - x)\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AB^2 + AE^2 = BE^2$ ，

即 $8^2 + x^2 = (16 - x)^2$ ，

解得： $x = 6$ ，

$\therefore AE = BH = 6\text{cm}$ ，

设 $BF = y\text{cm}$ ，则 $GF = CF = (16 - y)\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BGF$ 中， $BG^2 + FG^2 = BF^2$ ，

即 $8^2 + (16 - y)^2 = y^2$ ，

解得： $y = 10$ ，

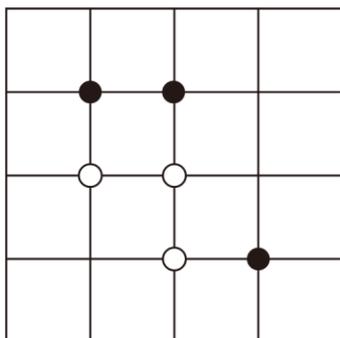
$$\therefore BF = 10\text{cm},$$

$$\therefore HF = BF - BH = 4\text{cm},$$

$$\therefore EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ (cm)},$$

故答案为： $4\sqrt{5}$.

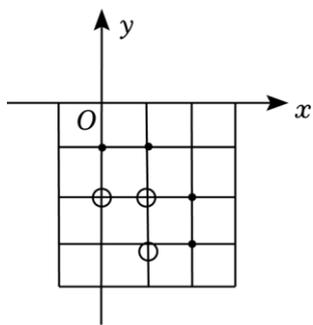
11. (4分) 如图，小丽和小明下棋，小丽执白色棋子，小明执黑色棋子，若棋盘中心的白色棋子位置用 $(1, -2)$ 表示，小明将第 4 枚黑色棋子放入棋盘后，所有棋子构成轴对称图形，则小明放的黑色棋子的位置可能是 $(2, -2)$.



【答案】 $(2, -2)$.

【分析】 根据题意建立平面直角坐标系，再根据轴对称图形的定义确定第 4 枚黑色棋子的位置，即可解答.

【解答】 解：根据题意建立坐标系如图，



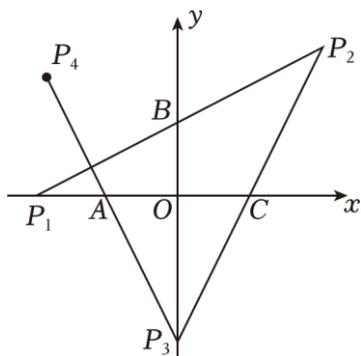
\therefore 小明将第 4 枚黑色棋子放入棋盘后，所有棋子构成轴对称图形，

\therefore 第 4 枚黑色棋子的位置如图所示，其坐标为 $(2, -2)$ ，

故答案为： $(2, -2)$.

12. (4分) 如图，在平面直角坐标系中， A 、 B 、 C 的坐标分别为 $(-3, 0)$ ， $(0, 3)$ ， $(3, 0)$. 一个电动玩具从原点 O 出发，第一次跳跃到点 P_1 ，使得点 P_1 与点 O 关于点 A 成中心对称；第二次跳跃到点 P_2 ，使得点 P_2 与点 P_1 关于点 B 成中心对称；第三次跳跃到点 P_3 ，使得点 P_3 与点 P_2 关于点 C 成中心对称；第四次跳跃到点 P_4 ，使得点 P_4 与点 P_3 关于点 A 成中心对称， \dots . 电动玩具照此规律跳下去，则点 P_{2023}

的坐标是 (-6, 0) .



【答案】 (-6, 0).

【分析】 根据中心对称的性质可得 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 的坐标，即可找出 6 个点一循环，从而求出 P_{2023} 的坐标.

【解答】 解：∵A、B、C 的坐标分别为 (-3, 0)，(0, 3)，(3, 0)，点 P_1 与点 O 关于点 A 成中心对称，

∴ P_1 的坐标为 (-6, 0)，

∵点 P_2 与点 P_1 关于点 B 成中心对称，

∴ P_2 的坐标为 (6, 6)，

∵点 P_3 与点 P_2 关于点 C 成中心对称，

∴ P_3 的坐标为 (0, -6)，

∵点 P_4 与点 P_3 关于点 A 成中心对称，

∴ P_4 的坐标为 (-6, 6)，

∵点 P_5 与点 P_4 关于点 B 成中心对称，

∴ P_5 的坐标为 (6, 0)，

∵点 P_6 与点 P_5 关于点 C 成中心对称，

∴ P_6 的坐标为 (0, 0)，

∴6 个点一循环，

∵ $2023 \div 6 = 337 \cdots 1$ ，

∴点 P_{2023} 的坐标是：(-6, 0)，

故答案为：(-6, 0).

三、解答题（共 8 题，共 72 分.请将答案及演算步骤或推理过程写在答题卡相应位置上）

13. (6 分) 解方程： $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解。

【解答】 解：方程两边同乘以 $(x-2)$ 得： $1=x-1-3(x-2)$ ，

整理得出： $2x=4$ ，

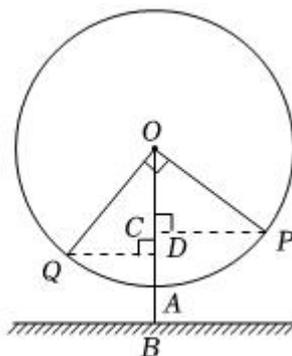
解得： $x=2$ ，

检验：当 $x=2$ 时， $x-2=0$ ，

$\therefore x=2$ 是增根，

则此方程无解。

14. (10分) 我国某巨型摩天轮的最低点距离地面 $10m$ ，圆盘半径为 $50m$ 。摩天轮的圆周上均匀地安装了若干个座舱（本题中将座舱视为圆周上的点），游客在距离地面最近的位置进舱。小明、小丽先后从摩天轮的底部入舱出发开始观光，当小明观光到点 P 时，小丽到点 Q ，此时 $\angle POQ=90^\circ$ ，且小丽距离地面 $20m$ 。



(1) $\triangle OCP$ 与 $\triangle QDO$ 全等吗？为什么？

(2) 求此时两人所在座舱距离地面的高度差。

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 分别证明 $\angle QDO = \angle OCP = 90^\circ$ ， $\angle Q = \angle COP$ ，即可利用 AAS 证明 $\triangle OCP \cong \triangle QDO$ ；

(2) 由全等三角形的性质可得 $QD = OC$ ，再根据线段之间的关系求出 $OD = 40m$ ，进而利用勾股定理求出 $OC = QD = 30m$ ，则 $CD = OD - OC = 10m$ ，由此可得两人所在座舱距离地面的高度差为 $10m$ 。

【解答】 解：(1) $\triangle OCP \cong \triangle QDO$ ，理由如下：

$\because QD \perp BD, PC \perp BD,$

$\therefore \angle QDO = \angle OCP = 90^\circ,$

$\because \angle POQ = 90^\circ,$

$\therefore \angle DOQ + \angle Q = 90^\circ = \angle DOQ + \angle COP,$

$$\therefore \angle Q = \angle COP,$$

$$\text{又} \because OQ = PO,$$

$$\therefore \triangle OCP \cong \triangle QDO \text{ (AAS)};$$

$$(2) \because \triangle OCP \cong \triangle QDO,$$

$$\therefore QD = OC,$$

\because 小丽到点 Q ，且小丽距离地面 $20m$ ，

$$\therefore BD = 20m,$$

$$\text{又} \because AB = 10m, OA = 50m,$$

$$\therefore OD = 40m,$$

$$\therefore QD = \sqrt{OQ^2 - OD^2} = 30m,$$

$$\therefore OC = QD = 30m,$$

$$\therefore CD = OD - OC = 10m,$$

\therefore 两人所在座舱距离地面的高度差为 $10m$.

15. (6分) 中华优秀传统文化是中华民族的根本和魂，是中华文明的智慧结晶和精华所在。为弘扬优秀传统文化，某校传统文化社团为了解七年级 900 名同学对于“二十四节气”的熟知程度，开展了一次知识竞赛。

【确定调查方式】

(1) 该社团抽取了 30 名学生的竞赛成绩作为样本，下面的抽样调查方式合理的是 ()；

- A. 抽取七(1)班 30 名学生的竞赛成绩作为样本
- B. 抽取 30 名男生的竞赛成绩作为样本
- C. 从中随机抽取 30 名学生的竞赛成绩作为样本
- D. 抽取学号为 1~30 名学生的竞赛成绩作为样本

【整理分析数据】

该社团采用合理的调查方式获得 30 名学生的竞赛成绩，数据如下：

87, 91, 83, 94, 84, 94, 78, 85, 89, 92,

94, 76, 86, 98, 96, 88, 76, 90, 90, 92,

75, 78, 88, 95, 100, 90, 82, 80, 90, 80.

(2) 规定：95~100 为 A 等，90~94 为 B 等，85~89 为 C 等，80~84 为 D 等，75~79 为 E 等。

①整理数据，补全下面的统计表：

30 名学生的竞赛成绩统计表

竞赛成绩/分	A 等	B 等	C 等	D 等	E 等
划记		正正	正一	正	正
人数/人		10	6	5	5

②根据统计表画合适的统计图，要求体现各等级的学生人数占总人数的比例情况，可选用 扇形 统计图。

【作出推断决策】

(3) 请估计七年级 900 名同学中竞赛成绩 A 等、B 等共有多少人？

【答案】 (1) C；

(2) ① $\overline{\text{TF}}$ ，4；②扇形；

(3) 七年级 900 名同学中竞赛成绩 A 等、B 等共有的人数为 420 人。

【分析】 (1) 根据题意可以选出最合理的抽查方式；

(2) ①用 30 减去其他等级的人数即可得到 A 等所对应的人数；

②根据扇形统计图的特征即可得到答案；

(3) 由竞赛成绩 A 等、B 等所对应的人数所占样本的比例乘 900 即可得到答案。

【解答】 解：(1) 根据题意可得：从中随机抽取 30 名学生的竞赛成绩作为样本比较合理，故选：C；

(2) ①根据题意可得：

A 等对应的人数为：30 - 10 - 6 - 5 - 5 = 4 (人)，划记为： $\overline{\text{TF}}$ ，

故答案为： $\overline{\text{TF}}$ ，4；

②根据统计表画合适的统计图，要求体现各等级的学生人数占总人数的比例情况，可选用扇形统计图，

故答案为：扇形；

(3) 七年级 900 名同学中竞赛成绩 A 等、B 等共有的人数为：

$$900 \times \frac{4+10}{30} = 420 \text{ (人)},$$

答：七年级 900 名同学中竞赛成绩 A 等、B 等共有的人数为 420 人。

16. (12 分) 每年 5 月 20 日是中国学生营养日。某营养餐公司为学生提供的 350 克早餐食品中，蛋白质总含量为 10%，早餐包括一份牛奶，一份谷物食品和一个鸡蛋（一个鸡蛋的质量约为 50g，蛋白质含量占 12%；谷物食品和牛奶的部分营养成分如表所示）。

每 100 克 (g) 谷物食品

能量	2215 千焦 (kJ)
蛋白质	13.0 克 (g)
脂肪	32.4 克 (g)
碳水化合物	50.8 克 (g)
钠	280 毫克 (mg)
每 100 克 (g) 牛奶能量	
能量	261 千焦 (kJ)
蛋白质	3.0 克 (g)
脂肪	3.6 克 (g)
碳水化合物	4.5 克 (g)
钙	100 毫克 (mg)

(1) 设该份早餐中谷物食品为 x 克，牛奶为 y 克，请写出谷物食品中所含的蛋白质为 13% x 克，牛奶中所含的蛋白质为 3% y 克。（用含有 x 、 y 的代数式表示）

(2) 求出 x 、 y 的值；

(3) 该公司为学校提供的营养午餐有 A、B 两种套餐（每天只提供一种）。

套餐	主食 (克)	肉类 (克)	蔬果 (克)	其他 (克)
A	150	70	200	30
B	130	75	220	25

为了膳食平衡，建议学生适当的多摄入蔬果量。如果在一周里，学生午餐蔬果摄入总量不少于 1060 克，那么该校在一周里可以选择 A、B 套餐各几天？写出所有的方案。（说明：一周按 5 天计算）

【答案】 (1) 13% x ，3% y ；

(2) x 的值为 200， y 的值为 100；

(3) 方案一：A 套餐 1 天，B 套餐 4 天；方案二：A 套餐 2 天，B 套餐 3 天。

【分析】 (1) 根据统计表列出算式即可求解；

(2) 根据等量关系：蛋白质总含量为 10%，350 克早餐食品，列出方程组，求解即可；

(3) 设该学校一周里共有 a 天选择 A 套餐，则有 $(5 - a)$ 天选择 B 套餐，根据“在一周里，学生午餐蔬果摄入总量不少于 1060 克”，列出不等式，求解即可。

【解答】 解：(1) 根据题意得：

谷物食品中所含的蛋白质为 $13\%x$ 克，牛奶中所含的蛋白质为 $3\%y$ 克，

故答案为： $13\%x$ ， $3\%y$ ；

(2) 根据题意得：

$$\begin{cases} x+y+50=350 \\ 13\%x+3\%y+50 \times 12\%=10\% \times 350 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} x=200 \\ y=100 \end{cases}$ ，

$\therefore x$ 的值为 200， y 的值为 100；

(3) 设该学校一周里共有 a 天选择 A 套餐，则有 $(5 - a)$ 天选择 B 套餐，

根据题意得： $200a+220(5 - a) \geq 1060$ ，

解得： $a \leq 2$ ，

$\therefore a$ 为正整数，

\therefore 共有两种方案：方案一：A 套餐 1 天，B 套餐 4 天；方案二：A 套餐 2 天，B 套餐 3 天。

17. (10 分) 随着网络的普及和城市交通的多样化，人们出行方式、时间有了更多的选择，我市有 A 类快车、B 类快车等网约车，收费标准如下。

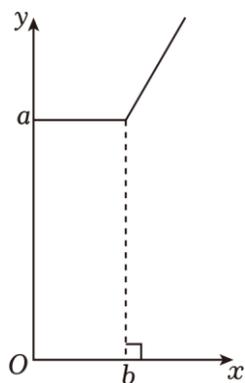
A 类快车：起步价 8.5 元，超过 3.5 千米的部分 2 元/千米，时长费：0.4 元/分钟（A 类快车行驶的平均速度为 40 千米/时）

B 类快车：起步价 8 元，超过 3 千米的部分 1.8 元/千米（函数图象如图所示）。(1) 图中 $a = \underline{8}$ ， $b = \underline{3}$ ；

(2) 若乘坐 A 类快车的里程数是 10 千米，则 A 类快车的费用是 27.5 元；当里程数超过 3.5 千米时，求 A 快车的费用 y_A （元）与行驶路程 x （千米）之间的函数表达式；

(3) 求 y_B 与 x 之间的函数表达式；

(4) 若从甲地到乙地有 5 千米，你将选择哪种网约车？为什么？



【答案】 (1) 8, 3;

(2) 27.5; $y_A=2.6x+1.5$ ($x>3.5$);

(3) $y_B = \begin{cases} 8 & (x \leq 3) \\ 1.8x+2.6 & (x > 3) \end{cases}$;

(4) 选择 B 类快车.

【分析】(1) 根据 B 类快车：起步价 8 元，超过 3 千米的部分 1.8 元/千米即可得到答案；

(2) 先求出乘坐 A 类快车的里程数是 10 千米所花费的时间，再根据有理数的乘法进行计算即可；直接根据 A 类快车的收费标准进行计算即可得到答案；

(3) 分 $x \leq 3$ 和 $x > 3$ ，直接根据 B 类快车的收费标准进行计算即可得到答案；

(4) 当 $x=5$ 时，分别求出 y_A 、 y_B 的值，进行比较即可.

【解答】解：(1) 根据题意可得：

$$a=8, b=3,$$

故答案为：8, 3;

(2) 根据题意可得：

乘坐 A 类快车的里程数是 10 千米，花费的时间为： $10 \div 40 = 0.25$ （小时），

$$\therefore \text{乘坐 A 类快车的里程数是 10 千米，则 A 类快车的费用是：} 8.5 + 2 \times (10 - 3.5) + 0.4 \times 0.25 \times 60 = 8.5 + 13 + 6 = 27.5 \text{（元），}$$

故答案为：27.5，

A 快车的费用 y_A （元）与行驶路程 x （千米）之间的函数表达式为：

$$y_A = 8.5 + 2(x - 3.5) + \frac{x}{40} \times 60 \times 0.4 = 2.6x + 1.5;$$

$$\therefore y_A = 2.6x + 1.5 \quad (x > 3.5);$$

(3) 当 $x \leq 3$ 时， $y_B = 8$ ，

当 $x > 3$ 时， $y_B = 8 + 1.8(x - 3) = 1.8x + 2.6$ ，

$$\therefore y_B \text{ 与 } x \text{ 之间的函数表达式为：} y_B = \begin{cases} 8 & (x \leq 3) \\ 1.8x + 2.6 & (x > 3) \end{cases};$$

(4) \because 从甲地到乙地有 5 千米，

$$\therefore \text{当 } x=5 \text{ 时，} y_A = 2.6 \times 5 + 1.5 = 14.5, y_B = 1.8 \times 5 + 2.6 = 11.6,$$

$$\therefore y_A > y_B,$$

\therefore 选择 B 类快车.

18. (8 分) 阅读下列材料，并解决问题：

【观察发现】

$$\because (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2 + 2\sqrt{5 \times 2} = 7 + 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{2};$$

$$\because (\sqrt{6} + \sqrt{8})^2 = 6 + 8 + 2\sqrt{6 \times 8} = 14 + 2\sqrt{48} = 14 + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{14 + 2\sqrt{48}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{8})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{8} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2};$$

$$\because (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 + 2 - 2\sqrt{5 \times 2} = 7 - 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

【建立模型】形如 $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}$ 的化简（其中 p, q 为正整数），只要找到两个正整数 m, n ($m > n$)，使 $m+n=p, mn=q$ ，那么 $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$.

【问题解决】

(1) 化简：① $\sqrt{11+2\sqrt{30}} = \underline{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ ；② $\sqrt{71-16\sqrt{7}} = \underline{8-\sqrt{7}}$ ；

(2) 已知正方形的边长为 a ，现有一个长为 $\frac{11\sqrt{30}}{30}+2$ 、宽为 $2\sqrt{30}$ 的矩形，当它们的面积相等，求正方形的边长 a 。

【答案】(1) ① $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ ；② $8-\sqrt{7}$ ；(2) $\sqrt{10}+2\sqrt{3}$ 。

【分析】(1) 根据题目中给的模型进行解题即可；

(2) 根据正方形的面积和长方形的面积相等，可列出关于 a 的一元二次方程，再解出带有根号的式子，最后根据题目给的模型化简根式即可。

【解答】解：(1) ① $\because (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2 = 5+6+2\sqrt{5 \times 6} = 11+2\sqrt{30}$,

$$\therefore \sqrt{11+2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{6};$$

$$\textcircled{2} \because (8-\sqrt{7})^2 = 64+7-2 \times 8 \times \sqrt{7} = 71-16\sqrt{7},$$

$$\therefore \sqrt{71-16\sqrt{7}} = \sqrt{(8-\sqrt{7})^2} = 8-\sqrt{7}.$$

故答案为：① $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ ；② $8-\sqrt{7}$ ；

(2) 由题意得 $a^2 = (\frac{11\sqrt{30}}{30}+2) \times 2\sqrt{30} = 22+4\sqrt{30}$,

$$\therefore a = \sqrt{22+4\sqrt{30}} = \sqrt{22+2\sqrt{120}} = \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{12})^2} = \sqrt{10}+2\sqrt{3}.$$

答：正方形的边长 a 是 $\sqrt{10}+2\sqrt{3}$ 。

19. (8分) 【问题情境】

在数学活动课上, 同学们以小组为单位开展“矩形纸片的剪拼”活动, 如图 (1), 将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 剪开, 得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$. 同学们测量得 $AB=2\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$.

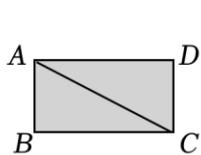


图 (1)

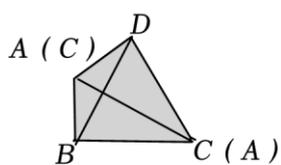


图 (2)

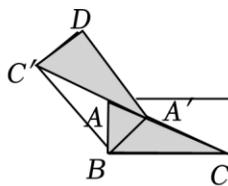


图 (3)

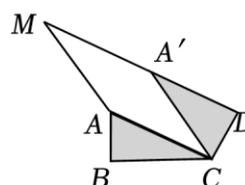


图 (4)

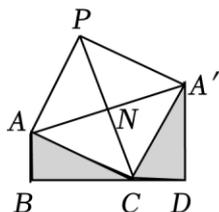


图 (5)

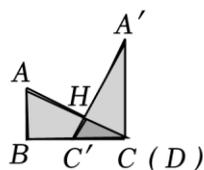


图 (6)

【操作发现】

- (1) ①快乐小组将这两张三角形纸片按图 (2) 摆放, 连接 BD , 发现 AC 与 BD 的关系为 垂直;
 ②快乐小组将图 (2) 中 $\triangle A' C' D$ 纸片沿射线 CA 的方向平移, 连接 BC' , BA' , 在平移的过程中, 如图 (3), 当 BC' 与 $A' D$ 平行时, 发现四边形 $A' BC' D$ 的形状是 矩形;

(2) 超越小组将图 (1) 中的 $\triangle ACD$ 以点 C 为旋转中心, 按顺时针方向旋转 $\angle\alpha$,

- ①当 $\angle\alpha = \angle ACB$, 得到如图 (4) 所示的 $\triangle A' CD$, 过点 A 作 $A' C$ 的平行线, 与 DA' 的延长线交于点 M , 直接写出四边形 $ACA' M$ 的形状是 菱形;
 ②当点 B, C, D 在同一条直线上时, 得到如图 (5) 所示的 $\triangle A' CD$, 连接 AA' , 取 AA' 的中点 N , 连接 CN 并延长至点 P , 使 $PN=CN$, 连接 $AP, A' P$, 得到四边形 $ACA' P$, 请判断四边形 $ACA' P$ 的形状, 并证明你的结论;

【实践探究】

- (3) 如图 (6), 创新小组在图 (5) 的基础上, 进行如下操作: 将 $\triangle A' CD$ 沿着射线 CB 的方向向左平移, 使点 D 与点 C 重合, $A' C'$ 与 AD 相交于点 H , 直接写出 $S_{\triangle C' DH} = \underline{\frac{4}{5}}$.

【答案】 (1) ①垂直

矩形;

(2) ①菱形;

②正方形, 理由见解析过程;

(3) $\frac{4}{5}$.

【分析】 (1) ①根据题意可得 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，从而得到将 $\triangle ABC$ 沿 AC 折叠，与 $\triangle ADC$ 完全重合，即可得到 AC 与 BD 的关系；②根据矩形的判定进行证明即可得到答案；

(2) ①根据菱形的判定进行证明即可得到答案；②根据正方形的判定进行证明即可得到答案；

(3) 由勾股定理得出 $A'C'$ 的长，由 $S_{\triangle A'C'D} = \frac{1}{2}A'C' \cdot DH = \frac{1}{2}C'D \cdot A'D$ 求出 DH 的长，再由勾股定理求出 $C'H$ 的长，最后由面积公式进行计算即可。

【解答】 解：(1) ①根据题意可得： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，

\therefore 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 折叠，与 $\triangle ADC$ 完全重合，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\therefore AC$ 与 BD 的关系为：垂直，

故答案为：垂直；

②由题意得： $BC = A'D$ ， $\angle C = \angle DA'C'$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore BC' \parallel A'D$ ，

$\therefore \angle DA'C' = \angle BC'A'$ ，

$\therefore \angle BC'A' = \angle C$ ，

$\therefore BC = BC'$ ，

$\therefore A'D = BC'$ ，

\therefore 四边形 $A'BC'D$ 是平行四边形，

$\therefore \angle D = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $A'BC'D$ 是矩形，

故答案为：矩形；

(2) ①由题意得： $\angle ACB = \angle CA'D$ ， $AC = A'C$ ，

$\therefore \angle \alpha = \angle ACB = \angle CA'D$ ，

$\therefore AC \parallel A'M$ ，

$\therefore AM \parallel A'C$ ，

\therefore 四边形 $ACA'M$ 是平行四边形，

$\therefore AC = A'C$ ，

\therefore 四边形 $ACA'M$ 是菱形，

故答案为：菱形；

②四边形 $ACA'P$ 是正方形，理由如下：

根据题意得： $AN=A'N$ ， $CN=PN$ ， $AC=A'C$ ， $\angle ACB=\angle CA'D$ ，

\therefore 四边形 $ACA'P$ 是平行四边形，

$\because AC=A'C$ ，

\therefore 四边形 $ACA'P$ 是菱形，

$\because \angle CA'D + \angle A'CD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB + \angle A'CD = 90^\circ$ ，

$\because \angle ACB + \angle A'CD + \angle ACA' = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ACA' = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $ACA'P$ 是正方形；

(3) 由 (2) 可得： $AC \perp A'C'$ ，

根据题意得： $C'D=2\text{cm}$ ， $A'D=4\text{cm}$ ，

$\therefore A'C' = \sqrt{C'D^2 + A'D^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}\text{cm}$ ，

$\because S_{\triangle A'C'D} = \frac{1}{2} A'C' \cdot DH = \frac{1}{2} C'D \cdot A'D$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \cdot DH = \frac{1}{2} \times 2 \times 4$ ，

$\therefore DH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，

$\therefore C'H = \sqrt{C'D^2 - DH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$\therefore S_{\triangle C'DH} = \frac{1}{2} \cdot C'H \cdot DH = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$ ，

故答案为： $\frac{4}{5}$ 。

20. (12分) 定义：如图1，在平面直角坐标系中，点 P 是平面内任意一点（坐标轴上的点除外），过点 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，若由点 P 、原点 O 、两个垂足 A 、 B 为顶点的矩形 $OAPB$ 的周长与面积的数值相等时，则称点 P 是平面直角坐标系中的“美好点”。

【尝试初探】

(1) 点 $C(2, 3)$ 不是 “美好点”（填“是”或“不是”）；若点 $D(4, b)$ 是第一象限内的一个“美好点”，则 $b = \underline{4}$ ；

【深入探究】

(2) ①若“美好点” $E(m, 6)$ ($m > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$ ，且 k 为常数) 上，则 $k = \underline{18}$ ；

②在①的条件下， $F(2, n)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，求 $S_{\triangle EOF}$ 的值；

【拓展延伸】

(3) 我们可以从函数的角度研究“美好点”，已知点 $P(x, y)$ 是第一象限内的“美好点”。

①求 y 关于 x 的函数表达式；

②在图 2 的平面直角坐标系中画出函数图象的草图，观察图象可知该图象可由函数 $y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的图象平移得到；

③结合图象研究性质，下列结论正确的选项是 A, B；（多项选择，全部选对的得 2 分，部分选对的得 1 分，有选错的不得分）

A. 图象与经过点 $(2, 2)$ 且平行于坐标轴的直线没有交点；

B. y 随着 x 的增大而减小；

C. y 随着 x 的增大而增大；

D. 图象经过点 $(10, \frac{3}{2})$ ；

④对于图象上任意一点 (x, y) ，代数式 $(2-x) \cdot (y-2)$ 是否为定值？如果是，请求出这个定值，如果不是，请说明理由。

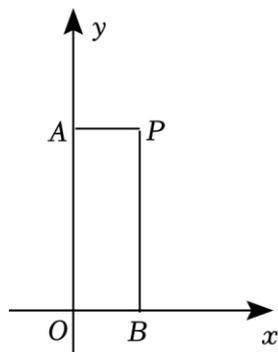
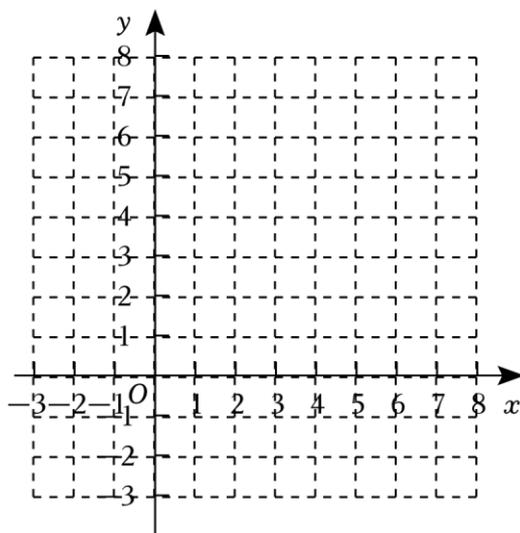


图1



【答案】 (1) 不是，4；

(2) ①18；② $\frac{15}{2}$ ；

(3) ① $y = \frac{4}{x-2} + 2$ ($x > 2$)；

②图见解析， $y = \frac{4}{x}$ ；

③AB；

④是为定值，定值为 - 4.

【分析】(1) 直接根据“美好点”的定义可以判断点 C 是不是“美好点”，根据“美好点”的定义得到 $2 \times (4+b) = 4b$ ，进行计算即可得到 b 的值；

(2) ①根据“美好点”的定义求出 m 的值，得到 E 的坐标，将点 E 代入反比例函数解析式，进行计算即可得到答案；

②先由①得出点 F 的坐标，再用待定系数法求出直线 EF 的解析式，令直线 EF 与 x 轴交于点 G ，当 $y = 0$ 时，求出点 G 的坐标，最后根据 $S_{\triangle EOF} = S_{\triangle FOG} - S_{\triangle EOG}$ 进行计算即可；

(3) ①根据“美好点”的定义可得 $2(x+y) = xy$ ，化简整理即可得到答案；

②描点连线即可得到图象，由图象观察可知，该图象可由 $y = \frac{4}{x}$ 平移得到；

③先画出草图，再根据图象逐一判断即可得到答案；

④将 $y = \frac{4}{x-2} + 2$ 代入 $(2-x) \cdot (y-2)$ 进行计算即可得到答案.

【解答】解：(1) $\because (2+3) \times 2 = 10 \neq 2 \times 3 = 6$,

\therefore 点 $C(2, 3)$ 不是“美好点”，

\because 点 $D(4, b)$ 是第一象限内的一个“美好点”，

$$\therefore 2 \times (4+b) = 4b,$$

解得： $b=4$ ，

故答案为：不是，4；

(2) ① $\because E(m, 6) (m > 0)$ 是“美好点”，

$$\therefore 2 \times (m+6) = 6m,$$

解得： $m=3$ ，

$$\therefore E(3, 6),$$

将 $E(3, 6)$ 代入双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ，

得 $k=18$ ，

故答案为：18；

② $\because F(2, n)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，

$$\therefore n = \frac{18}{2} = 9,$$

$$\therefore F(2, 9),$$

设直线 EF 的解析式为： $y = ax + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2a+b=9 \\ 3a+b=6 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} a=-3 \\ b=15 \end{cases}$,

\therefore 直线 EF 的解析式为: $y = -3x + 15$,

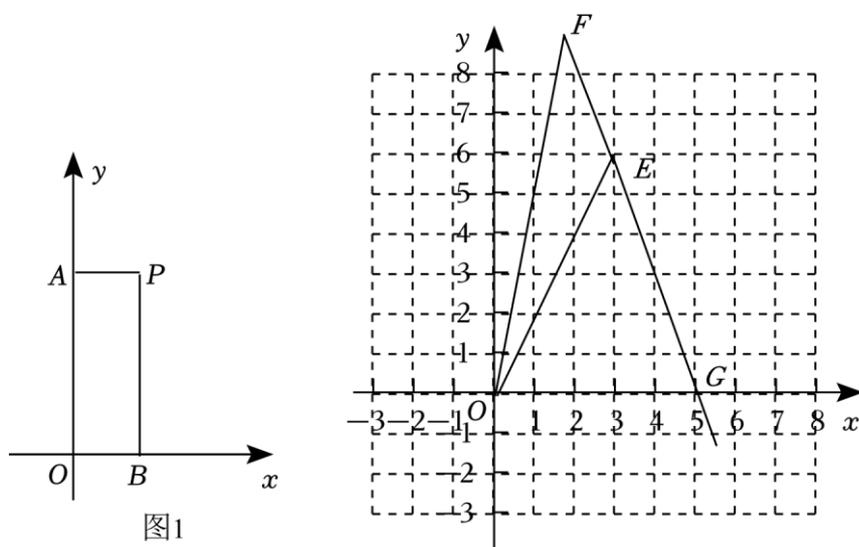
令直线 EF 与 x 轴交于点 G ,

当 $y=0$ 时, $-3x+15=0$,

解得: $x=5$,

$\therefore G(5, 0)$,

画出图如图所示:



$$\therefore S_{\triangle EOF} = S_{\triangle FOG} - S_{\triangle EOG} = \frac{1}{2} \times 5 \times 9 - \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = \frac{15}{2};$$

(3) ① \therefore 点 $P(x, y)$ 是第一象限内的“美好点”,

$$\therefore 2(x+y) = xy,$$

$$\text{化简得: } y = \frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 2,$$

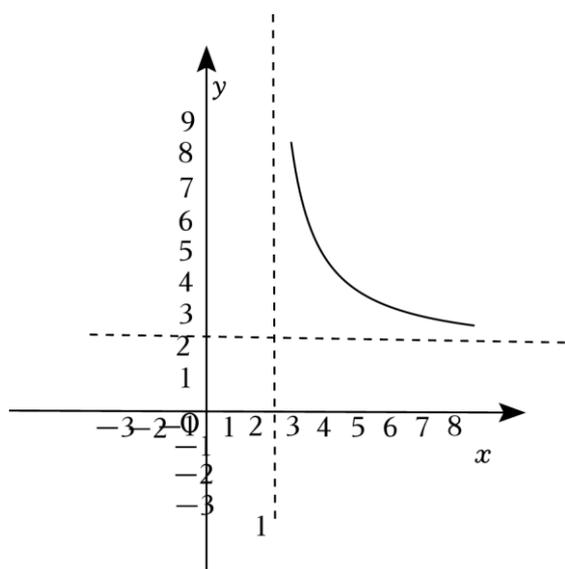
\therefore 第一象限内的点的横坐标为正,

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2x}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

解得: $x > 2$,

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数表达式为: } y = \frac{4}{x-2} + 2 \quad (x > 2);$$

②画出草图如图所示：



该图象可由 $y = \frac{4}{x}$ 向右平移 2 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到，

故答案为： $y = \frac{4}{x}$ ；

③由图象可得：

- A. 图象与经过点 (2, 2) 且平行于坐标轴的直线没有交点，故 A 正确，符合题意；
- B. 由图象可知 y 随着 x 的增大而减小，故 B 正确，符合题意；
- C. y 随着 x 的增大而增大，该选项说法错误，不符合题意；
- D. 当 $x=10$ 时， $y = \frac{5}{2}$ ，所以图象经过点 $(10, \frac{5}{2})$ ，故该选项说法错误，不符合题意

故选：AB；

④ “对于图象上任意一点 (x, y)，代数式 $(2-x) \cdot (y-2)$ 为定值.”

$$\because y = \frac{4}{x-2} + 2,$$

$$\therefore (2-x)(y-2) = (2-x) \left(\frac{4}{x-2} + 2 - 2 \right) = -4,$$

\therefore 对于图象上任意一点 (x, y)，代数式 $(2-x) \cdot (y-2)$ 是为定值，定值为 -4.