师书邦（江苏题库）www.shishubang.com 教师备课和学生学习的资源平台！

**2023~2024** 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研（三）

数学（参考答案） 2024. 5

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | B | A | B | C | D | A | D |

二、选择题：本题共 **3** 小题，每小题 **6** 分，共 **18** 分.

| 题号 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|
| 答案 | BCD | ABD | AC |

三、填空题：本题共 **3** 小题，每小题 **5** 分，共 **15** 分.

12. $y \quad 1_{或}3x \quad 4y \quad 5 \quad 0$　　13. $\sqrt{9}$　　14. 4，1

四、解答题：本题共 **5** 小题，共 **77** 分.

15. （13 分）

【法一】

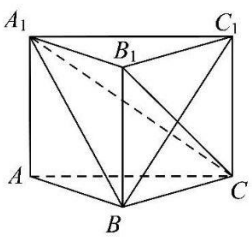
（1）证明：在直棱柱 $ABC \quad A_1B\ C$ 中，
$1 \quad 1$

$B_1B \quad$ 面 $ABC$，则面 $BB\ CC \quad$ 面 $ABC$，　　……**2** 分
$1 \quad 1$

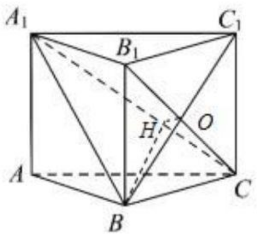
面 $BB_1CC_1 \quad$ 面 $ABC \quad BC$，$AB \quad$ 面 $ABC$，$AB \quad BC$，

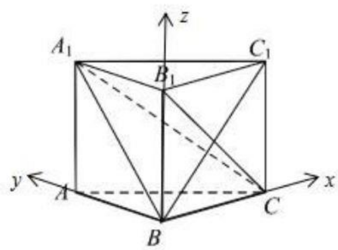
所以 $AB \quad$ 面 $BCC_1B_1$.　　……**4** 分

因为 $AB \parallel A_1B$，所以 $A\ D \quad$ 面 $D\cup\cup_1D$.



因为 *OH* 为 *BH* 在面 $A_1B_1C$ 的射影，由三垂线定理得：$A_1C$ $BH$.



则 $\vec{n_2}\cdot\vec{BC}=x_2-z_2=0$，$\vec{n_2}\cdot\vec{B_1A_1}=2y_2=0$，取 $x_2=1$，得 $\vec{n_2}=(1,0,1)$． ......10 分

设二面角 $B_1-A_1C-B$ 的大小为 $\theta$，则：

$$|\cos\theta|=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$ ......12 分

因为 $\theta$ 为锐角，所以二面角 $B_1-A_1C-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$． ......13 分

16.（15 分）

（1）解：

| 性别 | 阅读 | | 合计 |
|---|---|---|---|
| | 一般 | 爱好 | |
| 男生 | 10 | 15 | 25 |
| 女生 | 13 | 12 | 25 |
| 合计 | 23 | 27 | 50 |

......2 分

提出假设 $H_0$：是否喜爱阅读与性别没有关系. ......3 分

根据列联表的数据，可以求得：

$$\chi^2=\frac{50(10\times12-13\times15)^2}{25\times25\times23\times27}\approx0.725<2.706,$$ ......5 分

所以没有 90%的把握认为喜爱阅读与性别有关. ......7 分

（2）随机变 $X$ 服从超几何分布 $H(3,2,6)$，$X$ 可能取 0，1，2. ......8 分

$$P(X=0)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},\ P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5},\ P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}.$$ ......11 分

则 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$. ......14 分

答：抽取男生人数的数学期望为 1. ......15 分



17.（15 分）

解：（1）因为函数的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

要证 $f(x)>1$，只需证：当 $x>0$ 时，$e^x>x+1$. ……1 分

令 $p(x)=e^x-x-1$，则 $p'(x)=e^x-1>0$，

则 $p(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增， ……3 分

所以 $p(x)>p(0)=0$，即 $e^x>x+1$. ……5 分

（2）$f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}-a$， ……6 分

令 $g(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}-a(x+1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-x+1)+1}{x^2}-\dfrac{(x^2-x+1)+1}{x^2}-\dfrac{x-1}{x}>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(x)>g(1)=1-a$， ……8 分

①当 $a\le 1$ 时，$g(x)>g(1)=1-a\ge 0$，$f'(x)>0$.

则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上无极值点，矛盾. ……11 分

②当 $a>1$ 时，$g(1)=1-a<0$. 由（1）知，$e^x>x+1>x$，

$g(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}-a>\dfrac{(x-1)e^x}{x}-a>\dfrac{(x-1)x}{x}-a=x-1-a$，则 $g(1+a)>0$，

则 $\exists x_0\in(1,1+a)$ 使 $g(x_0)=0$. ……14 分

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

因此，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恰有一个极值点，

所以 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,1)$. ……15 分

18. （17 分）

（1）解：$F(0,\dfrac{p}{2})$，设 $A(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p})$，则 $\overrightarrow{FA}=(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}-\dfrac{p}{2})=(\sqrt{3},\dfrac{1}{2})$， ……1 分

所以抛物线$C$的方程为$x^2=4y$①　　……4分

（2）设直线$MN$：$y=kx+m$②，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立①②，得$x^2-4kx-4m=0$.

所以$\Delta=16(k^2+m)>0$③，$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4m$④.

$k_1=\frac{y_1-2}{x_1}=\frac{kx_1+m-2}{x_1}=k+\frac{m-2}{x_1}$，$k_2=\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{kx_2+m-2}{x_2}=k+\frac{m-2}{x_2}$，

则$k_1+k_2=2k+(m-2)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=2k+(m-2)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2k+\frac{k(m-2)}{m}$，　……5分

$k_1k_2=\frac{(kx_1+m-2)(kx_2+m-2)}{x_1x_2}$

$=\frac{k^2x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2}{x_1x_2}=\frac{-8k^2+(m-2)^2}{-4m}$.　……6分

因为$3(k_1+k_2)-2k_1k_2-4=0$，即：$3\cdot\frac{k(m-2)}{m}-2\cdot\frac{-8k^2+(m-2)^2}{-4m}-4=0$，

即：$(2k+m-2)(4k+m-2)=0$，

则$m=-2k+2$或$m=-4k+2$，能满足③式.　……8分

则$MN$：$y=kx-2k+2=k(x-2)+2$，或$MN$：$y=kx-4k+2=k(x-4)+2$，

所以定点$Q$的坐标为$(2,2)$或$(4,2)$，　……10分

（3）如$MN$过$(4,2)$点，当$k=k_1=k_2$时，$3(k+k)-2k\cdot k-4=0$，但此时$M$，$N$重合，则$|MN|$无最小值，所以$MN$只能过$(2,2)$点，此时$|MN|$有最小值.　……11分

由（2），在④中，令$m=-2k+2$得：$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=8k-8$，

$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2-4(8k-8)}=4\sqrt{k^4+2k^3+3k^2-2k+2}$.　……13分

令$f(k)=k^4+2k^3+3k^2-2k+2$，

则$f'(k)=4k^3+6k^2-6k+2=2(2k-1)(k^2+k+1)>0$，$k>\frac{1}{2}$.　……15分

当$k<\frac{1}{2}$时，$f'(k)<0$，$f(k)$在$(-\infty,\frac{1}{2})$上为减函数，

当$k>\frac{1}{2}$时，$f'(k)>0$，$f(k)$在$(\frac{1}{2},+\infty)$上为增函数，　……16分

所以当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$|MN|$ 有最小值，$|MN|_{\min}=4\sqrt{1-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}+1+2}=5$. ……17 分

19.（17 分）

（1）解：第 1 行最后两数 $C_0^0\ C_1^1\ 1$，第 2 行的最后两数 $C_2^1\ C_3^2\ C_3^3\ 2$. ……1 分

第 $m$（$m\ 3$）行的第 $m$ 个数为 $C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-2}$，第 $m\ 1$ 个数为 $C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}$，

猜测：$C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-2}\ C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}$. ……2 分

【法一】即证：$C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}\ C_{2m-2}^{m-3}$， ……3 分

因为 $C_{2m-2}^{m-2}\ C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-2}\ C_{2m-2}^{m-3}\ C_{2m-2}^{m-2}$， ……5 分

只要证明 $C_{2m-2}^{m-2}\ C_{2m-2}^{m-2}$，该式显然成立，

所以 $C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}\ C_{2m-2}^{m-3}$；

所以每行最后两个数相等. ……6 分

【法二】因为 $C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}\ \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!}\ \frac{(2m-1)!}{(m-2)!(m-1)!}$

$\frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!}\ m(m-1)\ m(m-1)$

$\frac{2m(2m-1)!}{m!(m-1)!}\ \frac{(2m)!}{m!(m-1)!}$； ……4 分

又因为 $C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-2}\ \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}\ \frac{(2m-2)!}{(m-3)!(m-1)!}$

$\frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}\ (m-1)m\ (m-1)(m-2)$

$\frac{(4m-2)(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}$

$\frac{2(2m-1)!}{(m-1)!(m-1)!}\ \frac{(2m)!}{m!(m-1)!}$.

即：$C_{2m-2}^{m-1}\ C_{2m-2}^{m-2}\ C_{2m-1}^{m-1}\ C_{2m-1}^{m-2}\ 6$.

所以每一行的最后两个数相等. ……6 分

师书邦（江苏题库）www.shishubang.com 教师备课和学生学习的资源平台！

（2）第 1 行所有数之和为 $C_0^0 \quad C_1^1 \quad 2$，第 2 行的最后一个数为 $C_3^2 \quad C_3^3 \quad 3 \quad 1 \quad 2$，

此时结论成立. ……7 分

因为 $C_n^{k\ 1} \quad C_n^k \quad C_{n\ 1}^k$，

第 $m$（$m \quad 2$）行的 $m \quad 1$ 个数之和为：

$C_{m\ 1}^0 \quad C_m^1 \quad (C_{m\ 1}^2 \quad C_{m\ 1}^0) \quad (C_{m\ 2}^3 \quad C_{m\ 2}^1) \quad (C_{2m\ 1}^m \quad C_{2m\ 1}^{m\ 2})$

$(C_{m\ 1}^0 \quad C_m^1 \quad C_{m\ 1}^2 \quad C_{2m\ 1}^m) \quad (C_{m\ 1}^0 \quad C_{m\ 2}^1 \quad C_{2m\ 1}^{m\ 2})$

$(C_m^0 \quad C_m^1 \quad C_{m\ 1}^2 \quad C_{2m\ 1}^m) \quad (C_{m\ 2}^0 \quad C_{m\ 2}^1 \quad C_{2m\ 1}^{m\ 2})$

$(C_{m\ 1}^1 \quad C_{m\ 1}^2 \quad C_{2m\ 1}^m) \quad (C_{m\ 3}^1 \quad C_{m\ 3}^2 \quad C_{2m\ 1}^{m\ 2})$

$C_{2m}^m \quad C_{2m}^{m\ 2}$. ……10 分

而第 $m \quad 1$ 行倒数第二个数为 $C_{2m}^m \quad C_{2m}^{m\ 2}$，

由（1）得每行最后两个相等，所以结论得证. ……11 分

（3）当 $n \quad 1, k \quad 3$ 时，$S_1 \quad a_1 \quad C_1^1 \quad 1, 3S_1 \quad 4^1 \quad 1$，当 $k \geqslant 4$ 时，此时显然不成立.

猜测：存在正整数 *k*，使得 $kS_n \quad 4_n \quad 1$ 恒成立，*k* 的最大值为 3. ……12 分