2024年江苏省无锡市梁溪区积余实验学校中考数学模拟试卷（3月份）

一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用2B铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1．（3分）﹣4的相反数是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．4　　D．﹣4

2．（3分）函数$y=\frac{x}{x-2}$中，自变量x的取值范围是（　　）

A．$x\neq 2$　　B．$x\geq 2$　　C．$x\leq 2$　　D．$x>2$

3．（3分）下列运算中，正确的是（　　）

A．$x^2+x^3=x^6$　　B．$x^3\cdot x^6=x^{18}$

C．$(x^2)^3=x^5$　　D．$x^2\div x=x$（$x\neq 0$）

4．（3分）下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（　　）

A．　　B．

C．　　D．

5．（3分）若$x=-1$是关于x的方程$2x+m=1$的解，则m的值是（　　）

A．3　　B．1　　C．﹣3　　D．﹣2

6．（3分）新冠疫情防控形势下，学校要求学生每日测量体温．某同学连续一周的体温情况如表所示，该同学这一周体温数据的众数和中位数分别是（　　）

日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
体温（℃）	36.5	36.3	36.5	36.4	36.3	36.3	36.2

A．36.3，36.2　　B．36.3，36.3　　C．36.5，36.4　　D．36.3，36.4

7．（3分）下列判断错误的是（　　）

A．两组对边分别相等的四边形是平行四边形

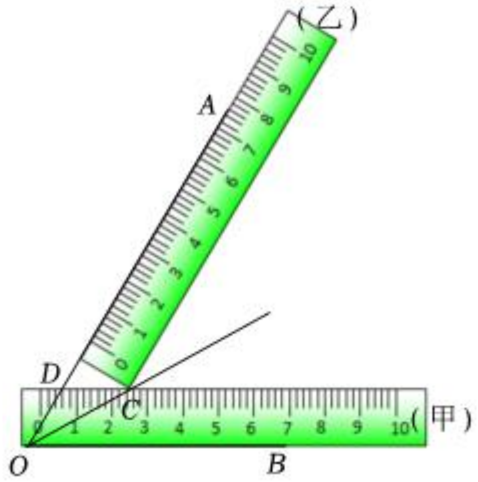
B．四个内角都相等的四边形是矩形

C．对角线相等的四边形是矩形

D．四条边都相等的四边形是菱形

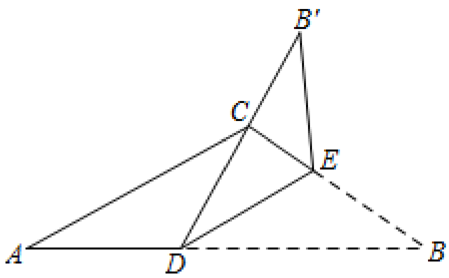
8．（3分）已知∠AOB，用两把完全相同的直尺按如图方式摆放，一把直尺（甲）的一边与射线OB重合，

另一边交射线 OA 于点 D，另一把直尺（乙）的靠在直尺（甲）的 C 处，且另一边与射线 OA 重合，作射线 OC．若 $\angle BOC=25°$，则 $\angle ADC$ 的大小为（　　）



A．35°　　B．45°　　C．50°　　D．55°

9．（3 分）如图，在△ABC 中，点 D 是线段 AB 上的一点，过点 D 作 $DE\parallel AC$ 交 BC 于点 E，将△BDE 沿 DE 翻折，得到△$B'DE$，若点 C 恰好在线段 $B'D$ 上，若 $\angle BCD=90°$，DC：$CB'=3$：2，$AB=16\sqrt{2}$，则 CE 的长度为（　　）



A．$4\sqrt{2}$　　B．$\frac{7}{2}\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\frac{5}{2}\sqrt{2}$

10．（3 分）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与 x 轴的交点为 A（1，0）和 B（3，0），点 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）是抛物线上不同于 A，B 的两个点，记△P_1AB 的面积为 S_1，△P_2AB 的面积为 S_2，有下列结论：

①当 $x_1>x_2+2$ 时，$S_1>S_2$；

②当 $x_1<2-x_2$ 时，$S_1<S_2$；

③当 $|x_1-2|>|x_2-2|>1$ 时，$S_1>S_2$；

④当 $|x_1-2|>|x_2+2|>1$ 时，$S_1<S_2$．

其中正确结论的序号是（　　）

A．②③　　B．①③　　C．①②③④　　D．③

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题

卡上相应的位置）

11．（3 分）分解因式：$2m^2-8=$__________________．

12．（3 分）航天科技集团所研制的天问一号探测器由长征五号运载火箭发射，并成功着陆于火星，距离地球约 192000000 千米．将数据 192000000 用科学记数法表示为 ______________．

13．（3 分）五边形的内角和是__________°．

14．（3 分）写一个函数表达式，使其图象经过第二象限，且函数值随自变量的增大而减小：____________________．

15．（3 分）已知一个圆锥的底面圆半径是 2，母线长是 6．则圆锥侧面展开图的扇形圆心角度数是 ___________．

16．（3 分）在《九章算术》的“方程”一章里，一次方程组是由算筹布置而成，如图 1，图中各行从左到右列出的算筹数分别表示未知数 x，y 的系数与相应的常数，图 1 的算筹图用我们现在的所熟悉的方程组形式表达就是$\begin{cases}3x+2y=19\\x+4y=23\end{cases}$，则图 2 所示的算筹图所表示的方程组的解为 ______________________．

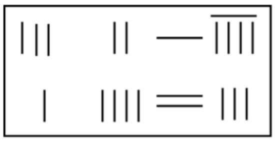


图1）

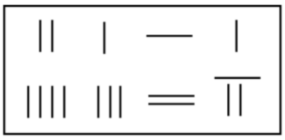
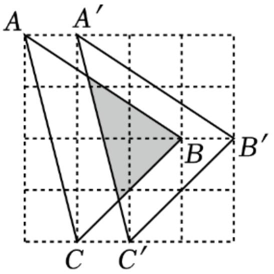
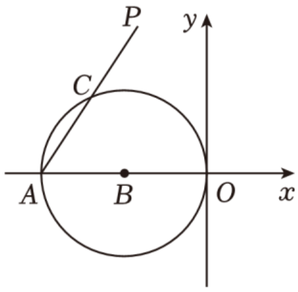


图2）

17．（3 分）如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小正方形的边长为 1，△ABC 的顶点均在格点上，则△ABC 的面积为 _______，阴影部分的面积为 ____________________．



18．（3 分）如图，点 A 的坐标是（－2，0），点 C 是以 OA 为直径的⊙B 上的一动点，点 A 关于点 C 的对称点为点 P（x，y），则 $3x+4y$ 的最小值为 __________．



三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过

程或演算步骤）

19.（8 分）计算：

（1）$\sin30° + |-1| - (\sqrt{3} - \pi)^0$；

（2）$\frac{2x-3}{x-2} - \frac{x-1}{x-2}$.

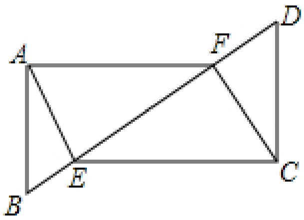
20.（8 分）（1）解方程：$x^2 - 2x - 3 = 0$；

（2）解不等式组：$\begin{cases} 2x-4<0, \\ -5-x\leqslant\frac{1}{2}x \end{cases}$.

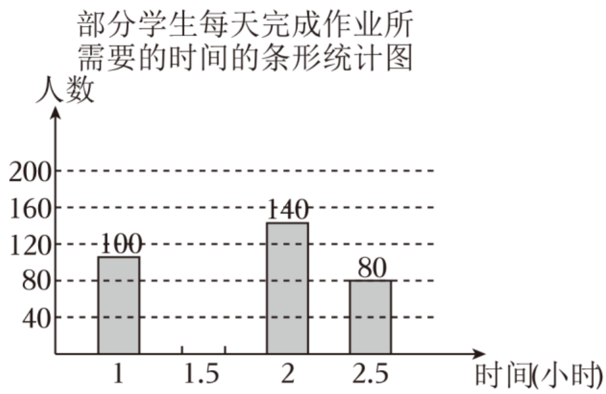
21.（10 分）已知，如图所示，$AB // CD$，$AB = CD$，点 E、F 在 BD 上．$\angle BAE = \angle DCF$，连接 AF、EC，求证：

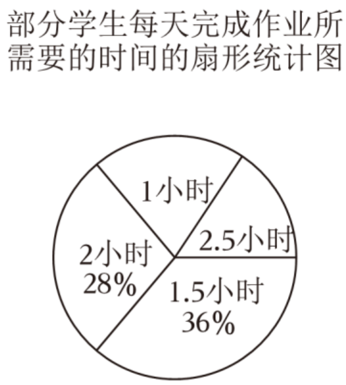
（1）$AE = FC$；

（2）四边形 $AECF$ 是平行四边形.



22.（10 分）近期教育部表示“双减”依然是今年工作中的“重中之重”，作为“双减”政策落地后第二个学期，不少学校的作业总量已经大幅减少．依据政策要求，初中书面作业平均完成时间不超过 90 分钟，学生每天完成作业的时长不能超过 2 小时．某中学自纠自查，对本校学生的作业情况进行了抽样调查，统计结果如图所示：





（1）这次抽样共调查了 ＿＿＿＿＿名学生，并补全条形统计图；

（2）计算扇形统计图中表示作业时长为 2.5 小时对应的扇形圆心角度数为 ＿＿＿＿＿＿；

（3）若该中学共有学生 3000 人，请据此估计该校学生的作业时间不少于 2 小时的学生人数；

（4）通过本次调查，你认为该学校作业布置是否满足教育部的“双减”政策要求？请说明理由．

23．（10 分）从 2021 年起，江苏省高考采用“3+1+2”模式：“3”是指语文、数学、外语 3 科为必选科目，“1”是指在物理、历史 2 科中任选 1 科，“2”是指在化学、生物、思想政治、地理 4 科中任选 2 科．

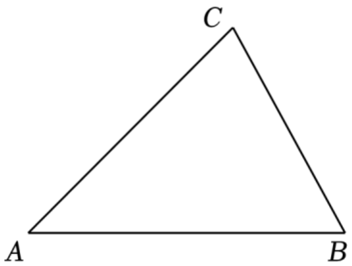
（1）若小丽在“1”中选择了历史，在“2”中已选择了地理，则她选择生物的概率是 ____________________；

（2）若小明在“1”中选择了物理，用画树状图的方法求他在“2”中选化学、生物的概率．

24．（10 分）用没有刻度的直尺和圆规作图（不写作法，保留作图痕迹）．

（1）已知△ABC，以∠B 为一个内角的菱形 $BEFG$，使顶点 F 在 AC 边上；

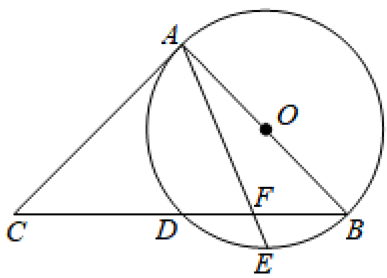
（2）若∠A＝45°，$\tan B=\frac{4}{3}$，$AC=4\sqrt{2}$，则（1）中作出的菱形 $BEFG$ 的面积为 ____________________．



25．（10 分）如图，AB 是⊙O 的直径，BC 交⊙O 于点 D，E 是弧 BD 的中点，AE 与 BC 交于点 F，∠C＝2∠EAB．

（1）求证：AC 是⊙O 的切线；

（2）若 $\cos C=\frac{2}{3}$，CA＝6，求 AF 的长．



26．（10 分）商场销售 A，B 两种商品，其进价，售价如表所示．

商品	进价（元/件）	售价（元/件）
A	15	20

B	35	45

（1）若商场投入3000元购进两种商品共100件，求商场分别购进*A*，*B*两种商品的数量；

（2）为了加快销售进度，该商场对商品进行促销，若一次性购物总额不超过500元，则九折优惠；若一次性购物总额超过500元则八折优惠，某单位到该商场购买了这两种商品共付款432元，求该商场获得的最小利润和最大利润.

27.（10分）如图，将▱*ABCD*绕点*A*旋转得到▱*AB′C′D′*.

（1）如图1，$\angle ABC=90°$，当点*B′*落在边*CD*上，延长*CD*与*C′D′*交于点*E*．如果点*E*为边*C′D′*的中点，求$\frac{AB}{BC}$的值；

（2）如图2，$\angle ABC\neq90°$，当点*B′*落在边*BC*上，且*B′C′*与边*CD*相交于点*E*时，如果点*E*、*B′*分别为边*CD*、*BC*的中点，求$\frac{AB}{BC}$的值.

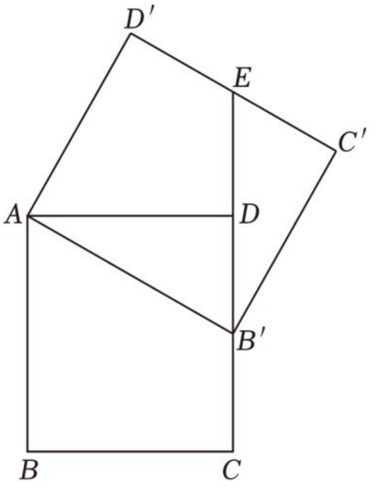


图1

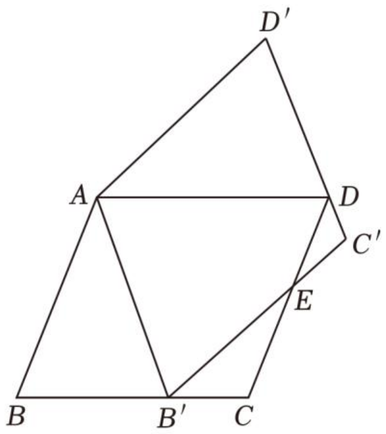


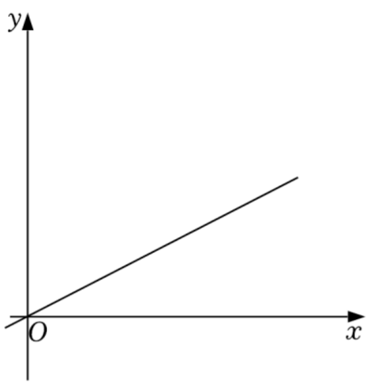
图2

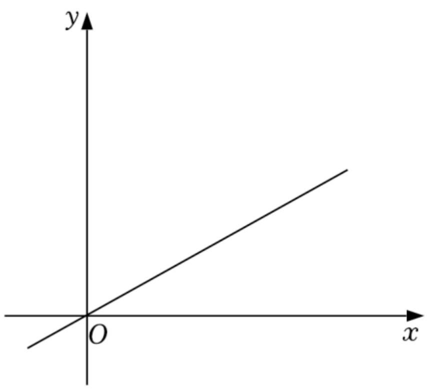
28.（10分）在平面直角坐标系*xOy*中，二次函数$y=-ax^2+3ax+4a$的图象与*x*轴交于*A*、*B*两点（点*A*在点*B*的左侧），与*y*轴正半轴交于点*C*，直线$y=\frac{1}{2}x$交于第一象限内的*D*点，且△*ABC*的面积为10.

（1）求二次函数的表达式；

（2）点*E*为*x*轴上一点，过点*E*作*y*轴的平行线交线段*OD*于点*F*，交抛物线于点*G*，当$GF=\sqrt{5}OF$时，求点*G*的坐标；

（3）已知点*P*（*n*，0）是*x*轴上的点，若点*P*关于直线*OD*的对称点*Q*恰好落在二次函数的图象上，求*n*的值.





（备用图）

2024年江苏省无锡市梁溪区积余实验学校中考数学模拟试卷（3月份）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用2B铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1．（3分）﹣4的相反数是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．4　　D．﹣4

【答案】C

【分析】根据相反数的定义作答即可．

【解答】解：﹣4的相反数是4．

故选：C．

2．（3分）函数$y=\frac{x}{x-2}$中，自变量x的取值范围是（　　）

A．$x\neq2$　　B．$x\geqslant2$　　C．$x\leqslant2$　　D．$x>2$

【答案】A

【分析】根据分母不能为0可得$x-2\neq0$，然后进行计算即可解答．

【解答】解：由题意得：

$x-2\neq0$，

解得：$x\neq2$，

故选：A．

3．（3分）下列运算中，正确的是（　　）

A．$x^2+x^3=x^6$　　B．$x^3\cdot x^6=x^{18}$

C．$(x^2)^3=x^5$　　D．$x^2\div x=x$（$x\neq0$）

【答案】D

【分析】分别根据合并同类项法则，同底数幂的乘法法则，幂的乘方运算法则以及同底数幂的除法法则逐一判断即可．

【解答】解：A．x^2与x^3不是同类项，所以不能合并，故本选项不合题意；

B．$x^3\cdot x^6=x^9$，故本选项不合题意；

C．$(x^2)^3=x^6$，故本选项不合题意；

D．$x^2\div x=x$（$x\neq0$），故本选项符合题意．

故选：D.

4.（3 分）下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（　　）

A. 　　B. 

C. 　　D. 

【答案】D

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义解答即可.

【解答】解：A．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D．该图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意.

故选：D.

5.（3 分）若 $x=-1$ 是关于 x 的方程 $2x+m=1$ 的解，则 m 的值是（　　）

A．3　　B．1　　C．-3　　D．-2

【答案】A

【分析】把 $x=-1$ 代入方程 $2x+m=1$ 得出 $-2+m=1$，再求出方程的解即可.

【解答】解；把 $x=-1$ 代入方程 $2x+m=1$ 得：$-2+m=1$，

解得：$m=3$，

故选：A.

6.（3 分）新冠疫情防控形势下，学校要求学生每日测量体温．某同学连续一周的体温情况如表所示，该同学这一周体温数据的众数和中位数分别是（　　）

日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
体温（℃）	36.5	36.3	36.5	36.4	36.3	36.3	36.2

A．36.3，36.2　　B．36.3，36.3　　C．36.5，36.4　　D．36.3，36.4

【答案】B

【分析】根据中位数、众数的意义求解即可.

【解答】解：该名同学这一周体温出现次数最多的是 36.3℃，共出现 3 次，因此众数是 36.3℃，

把已知数据按照由小到大的顺序重新排序后为 36.2，36.3，36.3，36.3，36.4，36.5，36.5，

将这七天的体温从小到大排列处在中间位置的一个数是 36.3℃，因此中位数是 36.3℃，

故选：*B*．

7．（3 分）下列判断错误的是（　　）

A．两组对边分别相等的四边形是平行四边形

B．四个内角都相等的四边形是矩形

C．对角线相等的四边形是矩形

D．四条边都相等的四边形是菱形

【答案】*C*

【分析】根据平行四边形，矩形，菱形，正方形的判定定理逐项判断即可．

【解答】解：*A*．两组对边分别相等的四边形是平行四边形，故 *A* 正确，不符合题意；

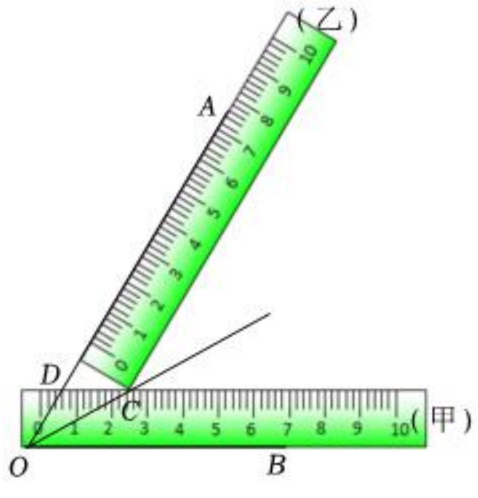
B．四个内角都相等的四边形是矩形，故 *B* 正确，不符合题意；

C．两条对角线互相垂直且相等的四边形不一定是矩形，故 *C* 错误，符合题意；

D．四条边都相等的四边形是菱形，故 *D* 正确，不符合题意；

故选：*C*．

8．（3 分）已知∠*AOB*，用两把完全相同的直尺按如图方式摆放，一把直尺（甲）的一边与射线 *OB* 重合，另一边交射线 *OA* 于点 *D*，另一把直尺（乙）的靠在直尺（甲）的 *C* 处，且另一边与射线 *OA* 重合，作射线 *OC*．若∠*BOC*＝25°，则∠*ADC* 的大小为（　　）

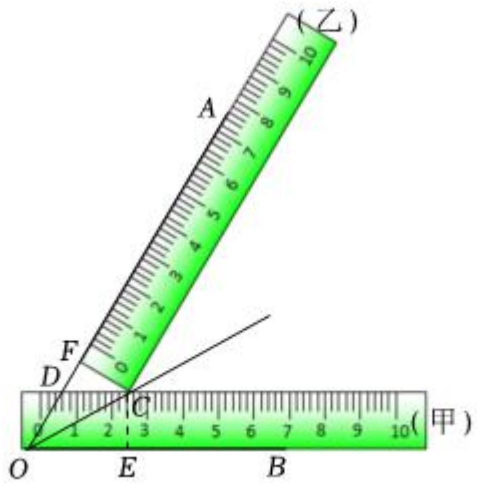


A．35°　　　B．45°　　　C．50°　　　D．55°

【答案】*C*

【分析】过点 *C* 作 *CE*⊥*OB* 于点 *E*，根据图中是两把完全相同的直尺得 *CE*＝*CF*，∠*CEO*＝∠*CFO*＝90°，则 *OC* 为∠*AOB* 的平分线，进而得∠*AOC*＝∠*BOC*＝25°，再根据 *CD*∥*OB* 得∠*DCO*＝∠*BOC*＝25°，然后根据三角形的外角定理可得∠*ADC* 的度数．

【解答】解：过点 C 作 $CE\perp OB$ 于点 E，如下图所示：



∵图中是两把完全相同的直尺，

∴$CE=CF$，$\angle CEO=\angle CFO=90°$，

∴OC 为 $\angle AOB$ 的平分线，

∴$\angle AOC=\angle BOC=25°$，

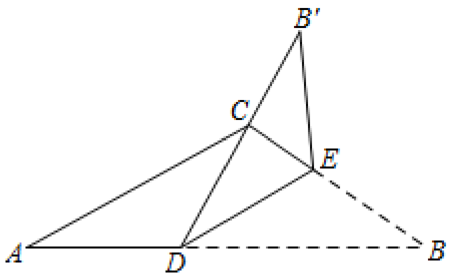
∵$CD\parallel OB$，

∴$\angle DCO=\angle BOC=25°$，

∴$\angle ADC=\angle AOC+\angle DCO=25°+25°=50°$．

故选：C．

9．（3 分）如图，在△ABC 中，点 D 是线段 AB 上的一点，过点 D 作 $DE\parallel AC$ 交 BC 于点 E，将△BDE 沿 DE 翻折，得到△$B'DE$，若点 C 恰好在线段 $B'D$ 上，若 $\angle BCD=90°$，DC：$CB'=3$：2，$AB=16\sqrt{2}$，则 CE 的长度为（　　）



A．$4\sqrt{2}$　　B．$\frac{7}{2}\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\frac{5}{2}\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】设 $DC=3x$，$CB=2x$，则 $DB'=5x$，由折叠的性质得出 $DB=DB'$，$\angle BDE=\angle B'DE$，$BE=B'E$，由勾股定理求出 $BC=8\sqrt{2}$，设 $CE=a$，则 $BE=8\sqrt{2}-a=B'E$，由勾股定理得出方程求出 a 的值，则可得出答案．

【解答】解：设 $DC=3x$，$CB'=2x$，则 $DB'=5x$，

∵将△BDE 沿 DE 翻折，得到△$B'DE$，

∴$DB'=DB$，$\angle BDE=\angle B'DE$，$BE=B'E$，

∵$DE // AC$，

∴$\angle A=\angle BDE$，$\angle ACD=\angle CDE$，

∴$\angle A=\angle ACD$，

∴$CD=AD=3x$，

∴$AB=AD+DB=8x=16\sqrt{2}$，

∴$x=2\sqrt{2}$，

∴$CD=6\sqrt{2}$，$BD=10\sqrt{2}$，$B'C=4\sqrt{2}$，

∴$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=8\sqrt{2}$，

设 $CE=a$，则 $BE=8\sqrt{2}-a=B'E$，

∵$CE^2+B'C^2=B'E^2$，

∴$a^2+32=(8\sqrt{2}-a)^2$，

解得 $a=3\sqrt{2}$，

∴$CE=3\sqrt{2}$，

故选：C.

10.（3 分）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 x 轴的交点为 A（1，0）和 B（3，0），点 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）是抛物线上不同于 A，B 的两个点，记△P_1AB 的面积为 S_1，△P_2AB 的面积为 S_2，有下列结论：

①当 $x_1>x_2+2$ 时，$S_1>S_2$；

②当 $x_1<2-x_2$ 时，$S_1<S_2$；

③当 $|x_1-2|>|x_2-2|>1$ 时，$S_1>S_2$；

④当 $|x_1-2|>|x_2+2|>1$ 时，$S_1<S_2$.

其中正确结论的序号是（　　）

A．②③　　　　B．①③　　　　C．①②③④　　　　D．③

【答案】D

【分析】不妨假设 $a>0$，利用图象法一一判断即可．

【解答】解：不妨假设 $a>0$．

①如图 1 中，P_1，P_2 满足 $x_1>x_2+2$，

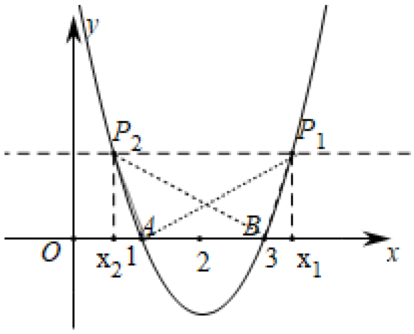


图1

∵$P_1P_2 \parallel AB$，

∴$S_1=S_2$，故①错误.

②当 $x_1=-2$，$x_2=-1$，满足 $x_1<2-x_2$，

则 $S_1>S_2$，故②错误.

③∵$|x_1-2|>|x_2-2|>1$，

∴P_1，P_2 在 x 轴的上方，且 P_1 离 x 轴的距离比 P_2 离 x 轴的距离大，

∴$S_1>S_2$，故③正确.

④如图 2 中，P_1，P_2 满足$|x_1-2|>|x_2+2|>1$，但是 $S_1=S_2$，故④错误.

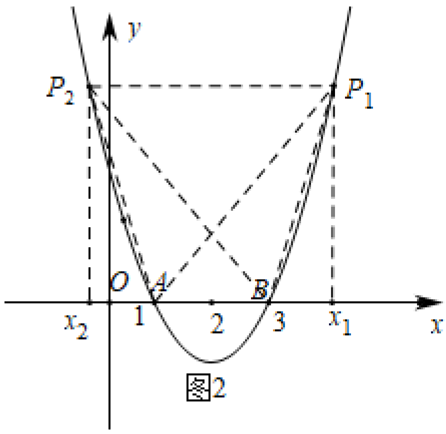


图2

故选：D.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置）

11．（3 分）分解因式：$2m^2-8=$__2（m+2）（$m-2$）__．

【答案】见试题解答内容

【分析】先提取公因式 2，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解因式．

【解答】解：$2m^2-8$，

$=2（m^2-4）$，

$=2（m+2）（m-2）$.

故答案为：$2（m+2）（m-2）$.

12.（3 分）航天科技集团所研制的天问一号探测器由长征五号运载火箭发射，并成功着陆于火星，距离地球约 192000000 千米．将数据 192000000 用科学记数法表示为 $\underline{\quad 1.92\times10^8\quad}$.

【答案】1.92×10^8.

【分析】利用科学记数法的定义即可求解．科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．

【解答】解：192000000 用科学记数法表示为 1.92×10^8.

故答案为：1.92×10^8.

13.（3 分）五边形的内角和是$\underline{\quad 540\quad}$°．

【答案】见试题解答内容

【分析】根据多边形的内角和是$（n-2）\cdot180°$，代入计算即可．

【解答】解：根据题意得：$（5-2）\cdot180°$

$=540°$，

故答案为：540．

14.（3 分）写一个函数表达式，使其图象经过第二象限，且函数值随自变量的增大而减小：$\underline{\quad y=-x+1}$ _（答案不唯一）____.

【答案】$y=-x+1$（答案不唯一）.

【分析】根据一次函数的性质，函数值随自变量的增大而减小，则 $k<0$，据此求解即可．

【解答】解：由题意得，满足题意的函数解析式可以为 $y=-x+1$，

故答案为：$y=-x+1$（答案不唯一）.

15.（3分）已知一个圆锥的底面圆半径是2，母线长是6．则圆锥侧面展开图的扇形圆心角度数是 $\underline{\quad 120°\quad}$.

【答案】120°．

【分析】利用圆锥侧面展开扇形圆心角与母线和底面圆半径的关系计算．

【解答】解：设圆心角为 n，

底面半径是 2，母线长是 6，

则底面周长 $=4\pi=\dfrac{n\pi\times6}{180}$，

解得：$n=120$，

故答案为：120°．

16．（3 分）在《九章算术》的“方程”一章里，一次方程组是由算筹布置而成，如图 1，图中各行从左到右列出的算筹数分别表示未知数 x，y 的系数与相应的常数，图 1 的算筹图用我们现在的所熟悉的方程组形式表达就是$\begin{cases}3x+2y=19\\x+4y=23\end{cases}$，则图 2 所示的算筹图所表示的方程组的解为 __$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$__．

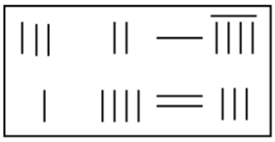


图1）

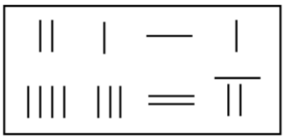


图2）

【答案】$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$．

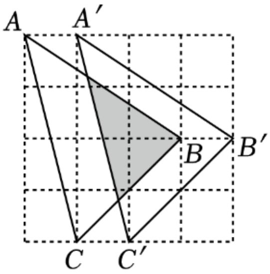
【分析】此题要理解图 1 中算筹所示的表示方法，依此即可推出图 2 所示的方程组．

【解答】解：根据图 1 所示的算筹的表示方法，可推出图 2 所示的算筹的表示的方程组：$\begin{cases}2x+y=11\\4x+3y=27\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$．

故答案为：$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$．

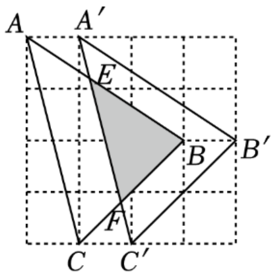
17．（3 分）如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小正方形的边长为 1，△*ABC* 的顶点均在格点上，则△*ABC* 的面积为 __5__，阴影部分的面积为 __$\frac{9}{5}$__．



【答案】5，$\frac{9}{5}$．

【分析】根据割补法把要求图形的面积转化为直角三角形或平行四边形的面积进行求解即可．

【解答】解：△*ABC* 的面积为：$3\times4-\frac{1}{2}\times1\times4-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times2\times2=5$；



由平移的性质可知，△BEF∽△BAC，

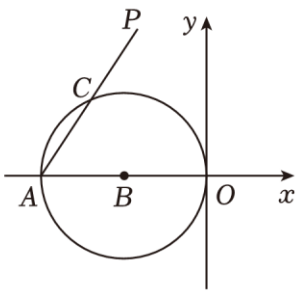
∴$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{1.5}{2.5}\right)^2$，

∴$S_{\triangle BEF}=\frac{9}{5}$.

即阴影部分的面积为$\frac{9}{5}$.

故答案为：5，$\frac{9}{5}$.

18.（3 分）如图，点 A 的坐标是（−2，0），点 C 是以 OA 为直径的⊙B 上的一动点，点 A 关于点 C 的对称点为点 P（x，y），则 $3x+4y$ 的最小值为 ＿－10＿.



【答案】－10.

【分析】根据题意可知点 P 运动的根据是以 O 为圆心，以 AO 为半径的圆，设 $3x+4y=k$，则点 P 在直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$上，可得当直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$与⊙$O$ 相切且在⊙O 的下方时，$\frac{k}{4}$的值最小，此时 $3x+4y$ 的值最小，设此时直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$与 x 轴交于点 E，与 y 轴交于点 F，⊙O 与直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$的切点为 G，则点 E（$\frac{k}{3}$，0），F（0，$\frac{k}{4}$），$OG=2$，然后根据 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}OE\cdot OF=\frac{1}{2}OD\cdot EF$，求出 k 即可.

【解答】解：连接 BC，OP，

∵点 A 关于点 C 的对称点为点 P（x，y），点 C 是以 OA 为直径的⊙B 上的一动点，∴$OP=2BC$，

∴点 P 运动的根据是以 O 为圆心，以 AO 为半径的圆，

设 $3x+4y=k$，则点 P 在直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$上，

∴当直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$与⊙$O$ 相切且在⊙O 的下方时，$\frac{k}{4}$的值最小，此时 $3x+4y$ 的值最小，

设此时直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$与 x 轴交于点 E，与 y 轴交于点 F，⊙O 与直线 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$的切点为 G，则点 E（$\frac{k}{3}$，0），F（0，$\frac{k}{4}$），

∴$OE=-\frac{k}{3}OF=-\frac{k}{4}$，

∴$EF=-\frac{5}{12}k$，

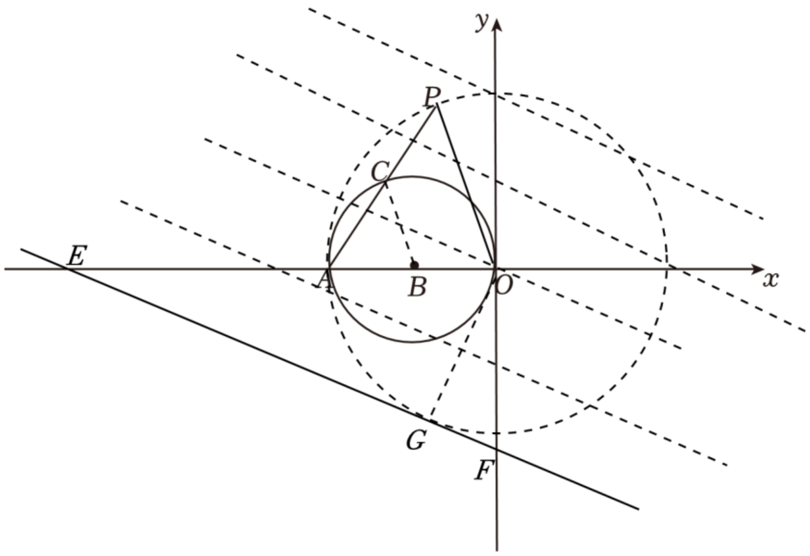
∵$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}OE\cdot OF=\frac{1}{2}OD\cdot EF$，

∴$\frac{1}{2}\times(-\frac{k}{3})\times(-\frac{k}{4})=\frac{1}{2}\times2\times(-\frac{5k}{12})$，

解得 $k=-10$，

∴$3x+4y$ 的最小值为－10，

故答案为：－10．



三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19．（8 分）计算：

（1）$\sin30^\circ+|-1|-(\sqrt{3}-\pi)^0$；

（2）$\frac{2x-3}{x-2}-\frac{x-1}{x-2}$．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）根据特殊角三角函数、化简绝对值及 0 指数幂直接计算即可得到答案；

（2）根据同分母分式相加的法则计算，再约分即可．

【解答】解：（1）$\sin 30°+|-1|-(\sqrt{3}-\pi)^0$

$=\frac{1}{2}+1-1$

$=\frac{1}{2}$；

（2）$\frac{2x-3}{x-2}-\frac{x-1}{x-2}$

$=\frac{2x-3-(x-1)}{x-2}$

$=\frac{2x-3-x+1}{x-2}$

$=\frac{x-2}{x-2}$

$=1$．

20．（8 分）（1）解方程：$x^2-2x-3=0$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}2x-4<0, \\ -5-x\leqslant\frac{1}{2}x\end{cases}$．

【答案】（1）$x_1=3$，$x_2=-1$；

（2）$-\frac{10}{3}\leqslant x<2$．

【分析】（1）先利用因式分解法把方程转化为 $x-3=0$ 或 $x+1=0$，然后解两个一次方程即可；

（2）分别解两个不等式得到 $x<2$ 和 $x\geqslant-\frac{10}{3}$，然后利用大小小大中间找确定不等式组的解集．

【解答】解：（1）$x^2-2x-3=0$，

$(x-3)(x+1)=0$，

$x-3=0$ 或 $x+1=0$，

所以 $x_1=3$，$x_2=-1$；

（2）$\begin{cases}2x-4<0 ① \\ -5-x\leqslant\frac{1}{2}x ②\end{cases}$，

解不等式①得 $x<2$，

解不等式②得 $x\geqslant-\frac{10}{3}$，

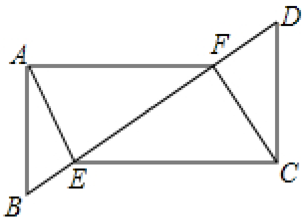
所以不等式组的解集为 $-\frac{10}{3}\leqslant x<2$．

21．（10 分）已知，如图所示，$AB\parallel CD$，$AB=CD$，点 E、F 在 BD 上．$\angle BAE=\angle DCF$，连接 AF、EC，

求证：

（1）$AE=FC$；

（2）四边形 $AECF$ 是平行四边形．



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）要证 $AE=CF$，需证△ABE≌△CDF．由 $AB\parallel CD$，可知∠$B=$∠D，由 $AB=CD$，可知∠$BAE=$∠DCF，即可证得．

（2）由△ABE≌△CDF 得 $AE=CF$，∠$AEB=$∠CFD，故 $180°-$∠$AEB=180°-$∠CFD，即∠$AEF=$∠CFE，$AE\parallel CF$，$AE=CF$，故四边形 $AECF$ 是平行四边形．

【解答】证明：（1）∵$AB\parallel CD$，

∴∠$B=$∠D．

在△ABE 和△CDF 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D \\ AB=CD \\ \angle BAE=\angle DCF\end{cases},$$

∴△ABE≌△CDF（ASA）．

∴$AE=CF$．

（2）由（1）△ABE≌△CDF 得 $AE=CF$，∠$AEB=$∠CFD，

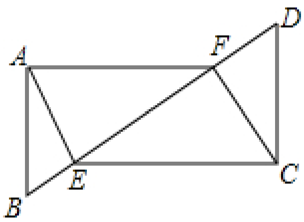
∴$180°-$∠$AEB=180°-$∠CFD，

即∠$AEF=$∠CFE．

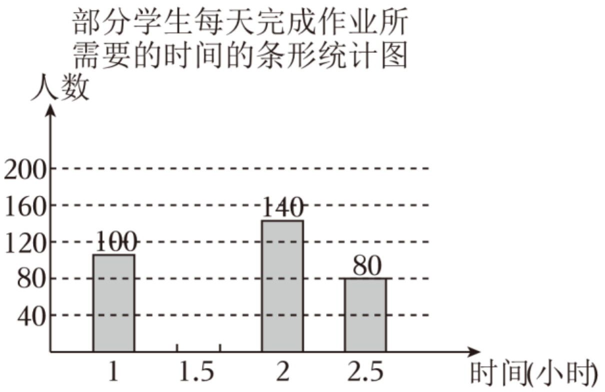
∴$AE\parallel CF$．

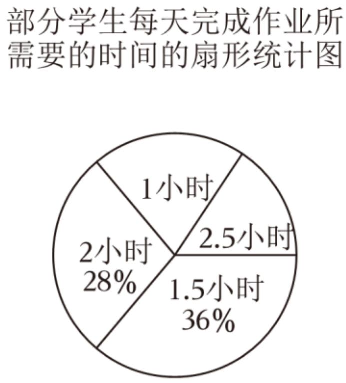
∵$AE=CF$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形．



22．（10 分）近期教育部表示“双减”依然是今年工作中的“重中之重”，作为“双减”政策落地后第二个学期，不少学校的作业总量已经大幅减少．依据政策要求，初中书面作业平均完成时间不超过 90 分钟，学生每天完成作业的时长不能超过 2 小时．某中学自纠自查，对本校学生的作业情况进行了抽样调查，统计结果如图所示：





（1）这次抽样共调查了 <u>500</u> 名学生，并补全条形统计图；

（2）计算扇形统计图中表示作业时长为 2.5 小时对应的扇形圆心角度数为 <u>57.6°</u>；

（3）若该中学共有学生 3000 人，请据此估计该校学生的作业时间不少于 2 小时的学生人数；

（4）通过本次调查，你认为该学校作业布置是否满足教育部的“双减”政策要求？请说明理由．

【答案】（1）500；

（2）57.6°，补全的条形统计图见解析；

（3）估计该校学生的作业时间不少于 2 小时的学生人数有 1320 人；

（4）不满足．理由见解析．

【分析】（1）总学生数：140÷28%＝500（人），作业时长为 1.5 小时的学生个数：500－（100+140+80）＝180（人），即可补全条形统计图；

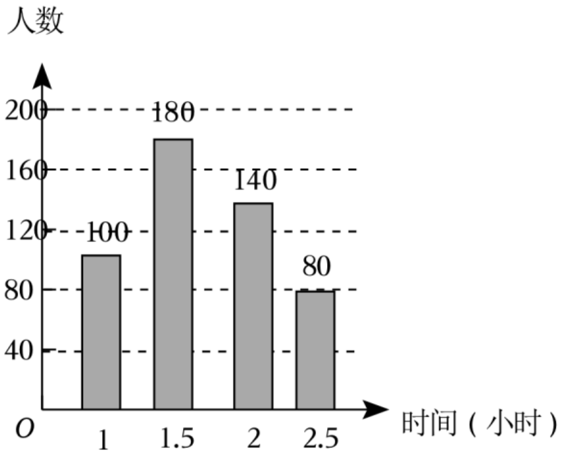
（2）作业时长为 2.5 小时对应的扇形圆心角度数＝$\frac{80}{500}\times360°$，计算即可；

（3）该校学生的作业时间不少于 2 小时的学生人数：$3000\times\frac{140+80}{500}$，计算即可；

（4）样本中还有 80 名学生每天完成作业的时间超过 2 小时，所以不满足．（言之有理即可）

【解答】解：（1）140÷28%＝500（人），

∴作业时长为 1.5 小时的学生个数：500－（100+140+80）＝180（人），补全的条形统计图如下：



故答案为：500．

（2）$\frac{80}{500}\times360^{\circ}=57.6^{\circ}$，

故答案为：57.6°；

（3）根据题意得：

$3000\times\frac{140+80}{500}=1320$（人），

答：估计该校学生的作业时间不少于2小时的学生人数有1320人；

（4）不满足．

理由是：∵样本中还有80名学生每天完成作业的时间超过2小时，

∴不满足．（言之有理即可）

23．（10分）从2021年起，江苏省高考采用“3+1+2”模式：“3”是指语文、数学、外语3科为必选科目，“1”是指在物理、历史2科中任选1科，“2”是指在化学、生物、思想政治、地理4科中任选2科．

（1）若小丽在“1”中选择了历史，在“2”中已选择了地理，则她选择生物的概率是 $\underline{\frac{1}{3}}$；

（2）若小明在“1”中选择了物理，用画树状图的方法求他在“2”中选化学、生物的概率．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）在“2”中已选择了地理，从剩下的化学、生物，思想政治三科中选一科，可得选择生物的概率；

（2）用树状图表示所有可能出现的结果数，进而求出相应的概率．

【解答】解：（1）在“2”中已选择了地理，从剩下的化学、生物，思想政治三科中选一科，因此选择生物的概率为$\frac{1}{3}$；

故答案为：$\frac{1}{3}$；

（2）用树状图表示所有可能出现的结果如下：

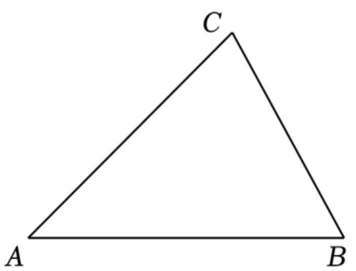
共有 12 种可能出现的结果，其中选中“化学”“生物”的有 2 种，

∴$P_{\text{（化学生物）}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

24．（10 分）用没有刻度的直尺和圆规作图（不写作法，保留作图痕迹）.

（1）已知△*ABC*，以∠*B* 为一个内角的菱形 *BEFG*，使顶点 *F* 在 *AC* 边上；

（2）若∠*A*＝45°，$\tan B=\frac{4}{3}$，$AC=4\sqrt{2}$，则（1）中作出的菱形 *BEFG* 的面积为 __$\frac{245}{36}$__.



【答案】（1）作法及证明见解答；

（2）$\frac{245}{36}$.

【分析】（1）由∠*B* 为菱形 *BEFG* 的一个内角，且顶点 *F* 在 *AC* 边上可知，*BF* 是∠*ABC* 的平分线，且 *EG* 垂直平分 *BF*，于是得到该作图问题的作法；

（2）作 $CL\perp AB$ 于点 *L*，由∠*A*＝45°，$\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$，得∠*LCA*＝∠*A*＝45°，$\frac{CL}{AC}=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{CL}{BL}=\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$，求得 $AL=CL=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=4$，$BL=\frac{3}{4}CL=3$，则 *AB*＝7，*BC*＝5，而 *FE*∥*AB*，则△*FEC*∽△*ABC*，所以$\frac{CH}{CL}=\frac{FE}{AB}=\frac{EC}{BC}$，则$\frac{FE}{7}=\frac{5-FE}{5}$，求得 $FE=\frac{35}{12}$，所以 $CH=\frac{CL\cdot FE}{AB}=\frac{5}{3}$，则 *HL*＝

$CL-CH=\frac{7}{3}$，求得 $S_{菱形BEFG}=EF\cdot HL=\frac{245}{36}$，于是得到问题的答案．

【解答】解：（1）作法：1．作∠*ABC* 的平分线 *BP*，交 *AC* 于点 *F*；

2．作线段 *BF* 的垂直平分线 *MN* 交 *BC* 于点 *E*，交 *AB* 于点 *G*；

3．连接 *EF*、*EG*，

四边形 *BEFG* 就是所求的图形．

证明：设 *EG* 交 *BF* 于点 *O*，

∵线段 *BF* 的垂直平分线 *MN* 交 *BC* 于点 *E*，交 *AB* 于点 *G*，

∴*BE*＝*FE*，*BG*＝*FG*，∠*BOE*＝∠*BOG*＝90°，

∵*BF* 平分∠*ABC*，

∴∠*EBO*＝∠*GBO*，

在△*EBO* 和△*GBO* 中，

$$\begin{cases}\angle EBO=\angle GBO\\ OB=OB\\ \angle BOE=\angle BOG\end{cases},$$

∴△*EBO*≌△*GBO*（*ASA*），

∴*BE*＝*BG*，

∴*BE*＝*FE*＝*BG*＝*FG*，

∴四边形 *BEFG* 是菱形，

∴四边形 *BEFG* 就是所求的图形．

（2）作 *CL*⊥*AB* 于点 *L*，则∠*ALC*＝∠*BLC*＝90°，

∵$\angle A=45^\circ$，$\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$，$AC=4\sqrt{2}$，

∴$\angle LCA=\angle A=45^\circ$，$\frac{CL}{AC}=\sin A=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{CL}{BL}=\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$，

∴$AL=CL=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\sqrt{2}=4$，

∴$BL=\frac{3}{4}CL=\frac{3}{4}\times 4=3$，

∴$AB=AL+BO=4+3=7$，$BC=\sqrt{CL^2+BL^2}=\sqrt{4^2+3^3}=5$，

∵四边形 *BEFG* 是菱形，

∴*FE*∥*AB*，*FE*＝*BE*，

∴△*FEC*∽△*ABC*，∠*EHC*＝∠*BLC*＝90°，*EC*＝*BC*﹣*BE*＝5﹣*FE*，

∴*CH*⊥*FE*，

$\therefore \frac{CH}{CL}=\frac{FE}{AB}=\frac{EC}{BC}$,

$\therefore \frac{FE}{7}=\frac{5-FE}{5}$,

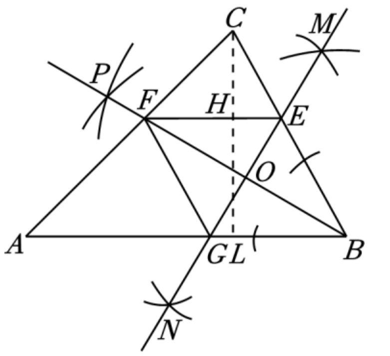
解得 $FE=\frac{35}{12}$,

$\therefore CH=\frac{CL\cdot FE}{AB}=\frac{4\times\frac{35}{12}}{7}=\frac{5}{3}$,

$\therefore HL=CL-CH=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$,

$\therefore S_{\text{菱形}BEFG}=EF\cdot HL=\frac{35}{12}\times\frac{7}{3}=\frac{245}{36}$,

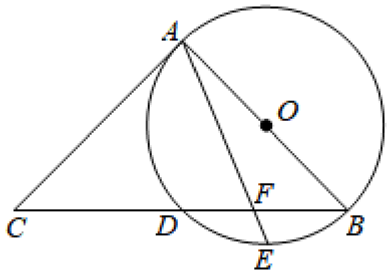
故答案为：$\frac{245}{36}$.



25.（10 分）如图，AB 是⊙O 的直径，BC 交⊙O 于点 D，E 是弧 BD 的中点，AE 与 BC 交于点 F，$\angle C=2\angle EAB$.

（1）求证：AC 是⊙O 的切线；

（2）若 $\cos C=\frac{2}{3}$，$CA=6$，求 AF 的长.



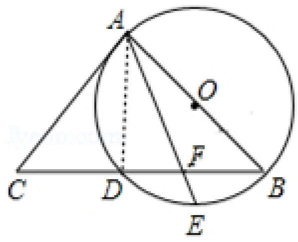
【答案】（1）详见证明过程；

（2）$2\sqrt{6}$.

【分析】（1）连接 AD，通过 E 是弧 BD 的中点，$\angle C=2\angle EAB$ 求证 $\angle BAC=90°$ 即可求证 AC 是⊙O 的切线；

（2）利用 $\cos C=\frac{2}{3}$，$CA=6$ 求出 CD 的长，再通过求证$\angle EAC=\angle AFD$ 即可推出 $CF=AC=6$，再利用勾股定理即可计算出 AF 的长．

【解答】解：（1）证明：连接 AD，如图所示：



∵E 是$\widehat{BD}$的中点，

∴$\widehat{DE}=\widehat{BE}$，

∴$\angle EAB=\angle EAD$，

∵$\angle ACB=2\angle EAB$，

∴$\angle ACB=\angle DAB$，

∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle ADB=90^\circ$，

∴$\angle DAC+\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle DAC+\angle DAB=90^\circ$，

即$\angle BAC=90^\circ$，

∴$AC\perp AB$，

∴AC 是⊙O 的切线；

（2）在 Rt△ACD 中，$\cos C=\frac{CD}{AC}=\frac{2}{3}$，

∴$CD=\frac{2}{3}\times 6=4$，

∵AC 是⊙O 的切线，

∴$\angle DAE+\angle AFD=90^\circ$，$\angle EAD=\angle EAB$，

∴$\angle EAC=\angle AFD$，

∴$CF=AC=6$，

∴$DF=2$，

∵$AD^2=AC^2-CD^2=6^2-4^2=20$，

∴$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{20+4}=2\sqrt{6}$．

26．（10 分）商场销售 A，B 两种商品，其进价，售价如表所示．

商品	进价（元/件）	售价（元/件）
A	15	20
B	35	45

（1）若商场投入 3000 元购进两种商品共 100 件，求商场分别购进 A，B 两种商品的数量；

（2）为了加快销售进度，该商场对商品进行促销，若一次性购物总额不超过 500 元，则九折优惠；若一次性购物总额超过 500 元则八折优惠，某单位到该商场购买了这两种商品共付款 432 元，求该商场获得的最小利润和最大利润．

【答案】（1）商场购进 A 商品，B 两种商品的数量分别为 25 件、75 件；

（2）该商场获得的最小利润是 17 元，最大利润是 67 元．

【分析】（1）根据题意和表格中的数据，可以列出相应的方程，然后求解即可；

（2）根据题意，利用分类讨论的方法，可以计算出该商场获得的最小利润和最大利润．

【解答】解：（1）设购进 A 商品 x 件，则购进 B 商品（$100-x$）件．

由题意可得：$15x+35(100-x)=3000$，

解得 $x=25$，

$\therefore 100-x=75$，

答：商场购进 A 商品，B 两种商品的数量分别为 25 件、75 件；

（2）设该单位购买 A 商品 m 件，购买 B 商品 n 件，

①当一次性购物总额不超过 500 元时，

则付款总金额为 $432\div0.9=480$（元），

$\therefore 20m+45n=480$，

$\therefore m=24-\frac{9}{4}n>0$，

$\therefore 0<n<\frac{32}{3}$，且 m、n 均是正整数，n 是 4 的倍数，

故满足条件的 m，n 有：$\begin{cases}m=6\\n=8\end{cases}$或$\begin{cases}m=15\\n=4\end{cases}$．

当 $m=6$，$n=8$ 时，利润是：$432-6\times15-8\times35=62$（元）；

当 $m=15$，$n=4$ 时，则利润是：$432-(15\times15+35\times4)=67$（元）；

②当一次性购物总额超过 500 元时，

则付款总金额为 $432\div0.8=540$（元），

∴$20m+45n=540$，

∴$m=27-\frac{9}{4}n\geqslant 0$，

∴$0<n\leqslant 12$，且 m、n 均是正整数，n 是 4 的倍数，

故满足条件的 m，n 有：$\begin{cases}m=9\\n=8\end{cases}$或$\begin{cases}m=18\\n=4\end{cases}$.

当 $m=9$，$n=8$ 时，利润为：432﹣（9×15+8×35）＝17（元）；

当 $m=18$，$n=4$ 时，利润为：432﹣（18×15+4×35）＝22（元）；

由上可得，该商场获得的最小利润是 17 元，最大利润是 67 元，

答：该商场获得的最小利润是 17 元，最大利润是 67 元．

27．（10 分）如图，将▱$ABCD$ 绕点 A 旋转得到▱$AB'C'D'$．

（1）如图 1，$\angle ABC=90°$，当点 B' 落在边 CD 上，延长 CD 与 $C'D'$ 交于点 E．如果点 E 为边 $C'D'$ 的中点，求$\frac{AB}{BC}$的值；

（2）如图 2，$\angle ABC\neq 90°$，当点 B' 落在边 BC 上，且 $B'C'$ 与边 CD 相交于点 E 时，如果点 E、B' 分别为边 CD、BC 的中点，求$\frac{AB}{BC}$的值．

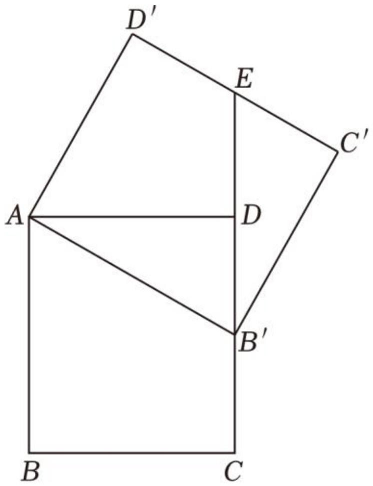


图1

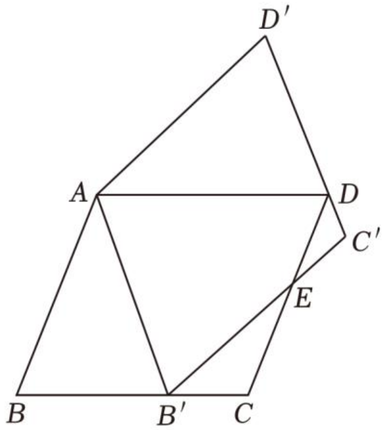


图2

【答案】（1）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

（2）$\frac{AB}{BC}$的值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

【分析】（1）根据矩形的判定定理得到▱$ABCD$ 是矩形，根据矩形的性质得到 $AD=BC$，$AB=CD$，$\angle B=\angle C=\angle ADC=90°$，根据旋转的性质得到 $B'C'=BC=AD$，$\angle C'=\angle C=\angle AB'C'=90°$，求得$\angle DAB'=\angle C'B'E$，根据全等三角形的性质得到 $B'D=C'E$，由点 E 为边 $C'D'$ 的中点，得

到 $C'E=\frac{1}{2}C'D'=\frac{1}{2}AB'$，设 $B'D=x$，$AB'=2x$，于是得到结论；

（2）设 $AB=2a$，$BC=2b$，$C'E=m$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}$，根据平行四边形的性质得到 $CD=AB=2a$，$AD=BC=2b$，求得 $BB'=B'C=b$，$CE=DE=a$．由旋转的性质可知：$AB=AB'$，$AD=AD'$，$\angle BAD=\angle BAD$，$\angle C=\angle C'$，得到 $\angle BAB=\angle DAD$，$\frac{AB}{AB'}=\frac{AD}{AD'}$根据相似三角形的性质得到$\frac{AB}{AD}=\frac{BB'}{DD'}$，即 $\frac{2a}{2b}=\frac{b}{DD'}$，求得 $DD'=\frac{b^2}{a}$，根据旋转的性质得到 $C'D'=CD=2a$，$BC=B'C'=2b$，$B'E=B'C'-C'E=2b-m$，根据相似三角形的性质得到$\frac{B'E}{DE}=\frac{CE}{C'E}=\frac{B'C}{DC'}$，求得$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{a}{b}=1$，当$\frac{a}{b}=1$时，得到$C'E=m=\frac{2a^2-b^2}{b}=a$，$B'E=2b-m=a$，推出 $\angle B=\angle AB'B=120°$，得到 $\angle B'AB=180°-\angle B-\angle AB'B=-60°$（不合题意，舍去），于是得到$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

【解答】解：（1）∵$\angle ABC=90°$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴▱$ABCD$ 是矩形，

∴$AD=BC$，$AB=CD$，$\angle B=\angle C=\angle ADC=90°$，

∵将▱$ABCD$ 绕点 A 旋转得到▱$AB'C'D'$，

∴$B'C'=BC=AD$，$\angle C'=\angle C=\angle AB'C'=90°$，

∴$\angle B'AD+\angle AB'D=\angle AB'D+\angle C'B'E=90°$，

∴$\angle DAB'=\angle C'B'E$，

∴$\triangle ADB'\cong\triangle B'C'E$（$ASA$），

∴$B'D=C'E$，

∵点 E 为边 $C'D'$ 的中点，

∴$C'E=\frac{1}{2}C'D'=\frac{1}{2}AB'$，

设 $B'D=x$，$AB'=2x$，

∴$AD=BC=\sqrt{3}x$，

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{2x}{\sqrt{3}x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

（2）设 $AB=2a$，$BC=2b$，$C'E=m$，则$\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CD=AB=2a$，$AD=BC=2b$，

又∵点 B'、E 分别为边 BC、CD 的中点，

∴$BB'=B'C=b$，$CE=DE=a$.

由旋转的性质可知：$AB=AB'$，$AD=AD'$，$\angle BAD=\angle BAD$，$\angle C=\angle C'$，

∴$\angle BAB=\angle DAD$，$\frac{AB}{AB'}=\frac{AD}{AD'}$

∴$\triangle BAB'\backsim\triangle DAD'$

∴$\frac{AB}{AD}=\frac{BB'}{DD'}$，即$\frac{2a}{2b}=\frac{b}{DD'}$，

∴$DD'=\frac{b^2}{a}$，

又∵▱$ABCD$ 绕点 A 旋转得到▱$AB'C'D'$，

∴$C'D'=CD=2a$，$BC=B'C'=2b$，$B'E=B'C'-C'E=2b-m$，

∴$CD'=C'D'-DD'=2a-\frac{b^2}{a}$.

∵$\angle C=\angle C'$，$\angle B'EC=\angle DEC'$，

∴$\triangle B'EC\backsim\triangle DEC'$

∴$\frac{B'E}{DE}=\frac{CE}{C'E}=\frac{B'C}{DC'}$，即$\frac{2b-m}{a}=\frac{a}{m}=\frac{b}{2a-\frac{b^2}{a}}=\frac{ab}{2a^2-b^2}$，

由$\frac{a}{m}=\frac{ab}{2a^2-b^2}$得：$m=\frac{2a^2-b^2}{b}$，

由$\frac{2b-m}{a}=\frac{ab}{2a^2-b^2}$得：$\frac{m}{a}=\frac{2b}{a}-\frac{ab}{2a^2-b^2}$，

∴$\frac{m}{a}\times\frac{a}{m}=(\frac{2b}{a}-\frac{ab}{2a^2-b^2})\times\frac{ab}{2a^2-b^2}=1$，

∴$(\frac{2b}{a}-\frac{ab}{2a^2-b^2})\times\frac{ab}{2a^2-b^2}=1$即$\frac{2b^2}{2a^2-b^2}-\frac{a^2b^2}{(2a^2-b^2)^2}=1$

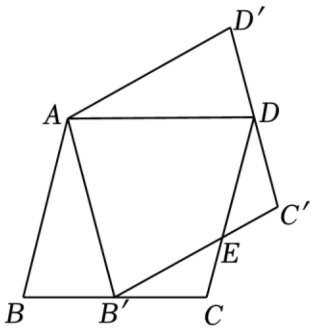
∴$2b^2(2a^2-b^2)-a^2b^2=(2a^2-b^2)^2$，

∴整理得：$4a^4-7a^2b^2+3b^4=0$，即$(4a^2-3b^2)(a^2-b^2)=0$，

∴$4a^2=3b^2$ 或 $a^2=b^2$，

∴$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{a}{b}=1$，

当$\frac{a}{b}=1$时，如下图所示，



则$C'E=m=\dfrac{2a^2-b^2}{b}=a$，$B'E=2b-m=a$，

∴$B'E=CE=B'C=a$，

∴$\angle C=60^\circ$，

又∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle B=180^\circ-\angle C=120^\circ$，

又∵$AB=AB'$

∴$\angle B=\angle AB'B=120^\circ$，

∴$\angle B'AB=180^\circ-\angle B-\angle AB'B=-60^\circ$（不合题意，舍去），

∴$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

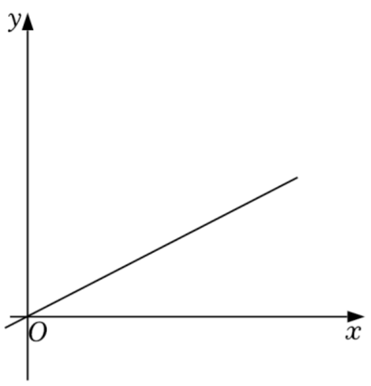
即$\dfrac{AB}{BC}$的值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

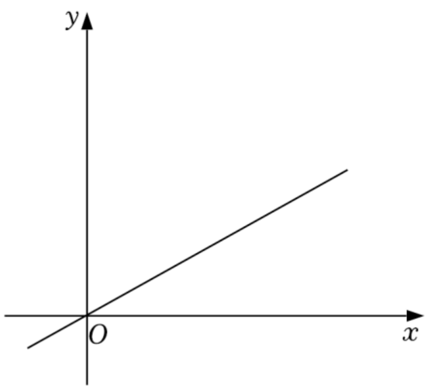
28.（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=-ax^2+3ax+4a$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴正半轴交于点 C，直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 交于第一象限内的 D 点，且△ABC 的面积为 10.

（1）求二次函数的表达式；

（2）点 E 为 x 轴上一点，过点 E 作 y 轴的平行线交线段 OD 于点 F，交抛物线于点 G，当 $GF=\sqrt{5}OF$ 时，求点 G 的坐标；

（3）已知点 P（n，0）是 x 轴上的点，若点 P 关于直线 OD 的对称点 Q 恰好落在二次函数的图象上，求 n 的值.





（备用图）

【答案】（1）$y=-x^2+3x+4$；

（2）G（2，6）；

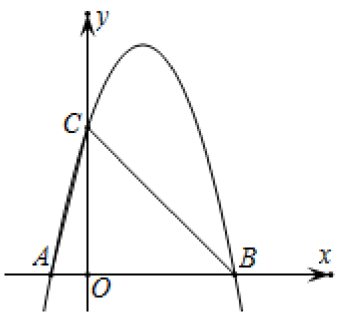
（3）n 的值为 5 或 $-\frac{20}{9}$.

【分析】（1）在 $y=-ax^2+3ax+4a$ 中，令 $y=0$ 得 A（-1，0），B（4，0），根据△ABC 的面积为 10，即得 $OC=4$，C（0，4），用待定系数法即得二次函数的表达式为 $y=-x^2+3x+4$；

（2）设 E（m，0），则 F（m，$\frac{1}{2}m$），G（m，$-m^2+3m+4$），由 $GF=\sqrt{5}OF$，可得 $-m^2+\frac{5}{2}m+4=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}m$，即可解得 G（2，6）；

（3）连接 PQ 交直线 OD 于 K，过 Q 作 $QT\perp x$ 轴于 T，设 Q（r，s），可得 K（$\frac{n+r}{2}$，$\frac{s}{2}$），即得 $\frac{s}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{n+r}{2}$，$n+r=2s$①，又 $r^2+s^2=n^2$，（$n+r$）（$n-r$）$=s^2$②，可解得 $r=\frac{3}{5}n$，$s=\frac{4}{5}n$，故 Q（$\frac{3}{5}n$，$\frac{4}{5}n$），代入 $y=-x^2+3x+4$ 得 $\frac{4}{5}n=-\left(\frac{3}{5}n\right)^2+3\times\frac{3}{5}n+4$，解得 $n=5$ 或 $n=-\frac{20}{9}$.

【解答】解：（1）如图：



在 $y=-ax^2+3ax+4a$ 中，令 $y=0$ 得 $-ax^2+3ax+4a=0$，

解得 $x=4$ 或 $x=-1$，

∴A（-1，0），B（4，0），

∴$AB=5$，

∵△ABC的面积为10，

∴$\frac{1}{2}AB\bullet OC=10$，即$\frac{1}{2}\times5\bullet OC=10$，

∴$OC=4$，

∴C（0，4），

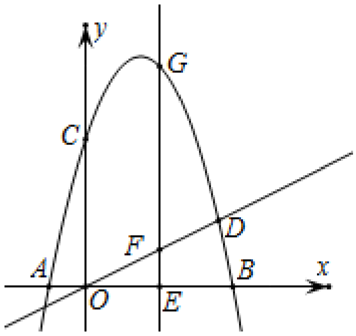
把C（0，4）代入$y=-ax^2+3ax+4a$得：

$4a=4$，

∴$a=1$，

∴二次函数的表达式为$y=-x^2+3x+4$；

（2）如图：



设E（m，0），则F（m，$\frac{1}{2}m$），G（m，$-m^2+3m+4$），

∴$OF=\sqrt{m^2+(\frac{1}{2}m)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，$GF=-m^2+3m+4-\frac{1}{2}m=-m^2+\frac{5}{2}m+4$，

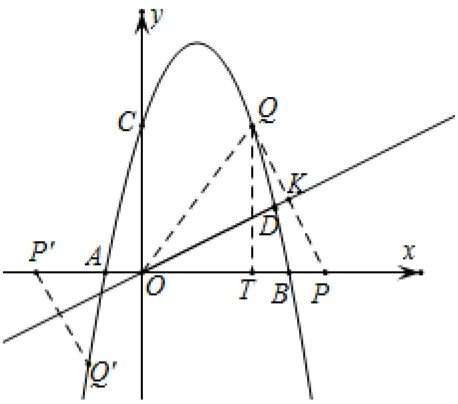
∵$GF=\sqrt{5}OF$，

∴$-m^2+\frac{5}{2}m+4=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}m$，

解得$m=2$或$m=-2$（舍去），

∴G（2，6）；

（3）连接PQ交直线OD于K，过Q作$QT\perp x$轴于T，如图：



∵P（n，0）关于直线对称点为Q，

∴$OQ=OP=|n|$，K是PQ中点，

设Q（r，s），

∴K（$\frac{n+r}{2}$，$\frac{s}{2}$），

∵K在直线$y=\frac{1}{2}x$上，

∴$\frac{s}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{n+r}{2}$，

整理得：$n+r=2s$①，

∵$OT^2+QT^2=OQ^2$，

∴$r^2+s^2=n^2$，

变形得：$(n+r)(n-r)=s^2$②，

把①代入②得：$2s(n-r)=s^2$，

∵$s\neq0$，

∴$n-r=\frac{s}{2}$③，

由①③可得$r=\frac{3}{5}n$，$s=\frac{4}{5}n$，

∴Q（$\frac{3}{5}n$，$\frac{4}{5}n$），

∵Q在抛物线$y=-x^2+3x+4$上，

∴$\frac{4}{5}n=-(\frac{3}{5}n)^2+3\times\frac{3}{5}n+4$，

解得$n=5$或$n=-\frac{20}{9}$，

答：n的值为5或$-\frac{20}{9}$.