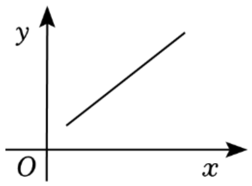
2022-2023 学年江苏省宿迁市高二（下）期末数学试卷

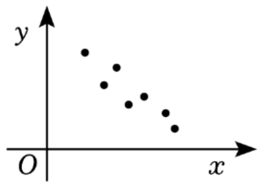
一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

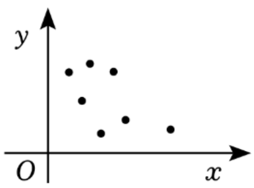
1．（5 分）已知 P（AB）$=\frac{1}{3}$，P（$A|B$）$=\frac{2}{5}$，则 P（B）＝（　　）

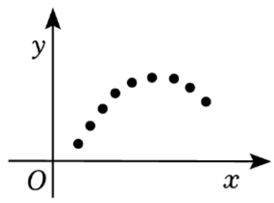
A．$\frac{1}{12}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

2．（5 分）下列图中，能反映出相应两个变量之间具有线性相关关系的是（　　）

A．

B．

C．

D．

3．（5 分）若样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差为 2，平均数 $\overline{x}$ 为 5，则下列说法正确的个数为（　　）

①数据 x_1+1，x_2+1，…，x_n+1 的平均数为 6；

②数据 x_1+1，x_2+1，…，x_n+1 的方差为 3；

③数据 $3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_n+1$ 的平均数为 15；

④数据 $3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_n+1$ 的方差为 19．

A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

4．（5 分）已知 m，n 是实数，若点 A（2，﹣5，﹣1），B（﹣1，﹣4，﹣2），C（$m+3$，﹣3，n）在同一直线上，则 $m+n$ 的值为（　　）

A．﹣10　　B．﹣7　　C．﹣3　　D．10

5．（5 分）某批麦种中，一等麦种占 96%，二等麦种占 4%，一、二等麦种种植后所结的麦穗含 55 粒以上麦粒的概率分别为 0.5，0.25，则用这批种子种植后所结的麦穗含有 55 粒以上麦粒的概率是（　　）

A．0.58　　B．0.49　　C．0.75　　D．0.125

6．（5 分）已知平面 α，β，γ，直线 l，m，n，$\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，下列命题不正确的是（　　）

A．若 $l\parallel m$，则 $l\parallel n$，$m\parallel n$

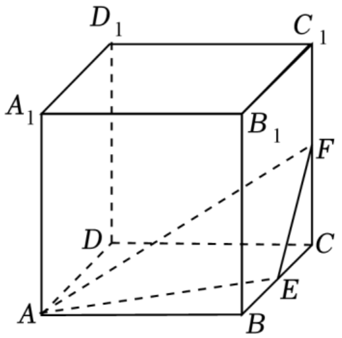
B．若 $n\parallel\alpha$，则 $l\parallel m$

C．若 $l\perp n$，则 $l\perp m$

D．若 $m\cap n=P$，则 $P\in l$

7．（5 分）如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E，F 分别是 BC，CC_1 中点，则二面角 F

－AE－C 的正切值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　B．1　　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

8．（5 分）为了合理配置教育资源、优化教师队伍结构、促进城乡教育优质均衡发展，科学编制校长教师交流轮岗 3 到 5 年规划和学年度交流计划，努力办好人民群众“家门口”的好学校．省委、省政府高度重视此项工作，省教育厅出台《关于深入推进义务教育学校校长教师交流轮岗的意见》，将义务教育教师交流轮岗工作纳入了省委 2023 年度重点工作任务．某市教育局为切实落实此项政策，安排 3 名校长和 3 名教师到甲、乙、丙三所义务教育学校进行轮岗交流，每所学校安排一名校长，则不同的安排方案种数是（　　）

A．720　　　B．162　　　C．81　　　D．33

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．残差平方和越小的模型，拟合的效果越好

B．随机变量 X 服从两点分布，则 D（X）的最大值为$\frac{1}{4}$

C．数据 23，2，15，13，22，20，9，17，5，18 的 70 百分位数为 18

D．样本相关系数$|r|$越接近 1，样本数据的线性相关程度也越强

（多选）10．（5 分）下列各式正确的是（　　）

A．$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}$

B．$A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}$

C．$rC_{n}^{r}=nC_{n-1}^{r-1}$

D．$A_{1}^{1}+2A_{2}^{2}+3A_{3}^{3}+\cdots+nA_{n}^{n}=A_{n+1}^{n+1}$

（多选）11．（5 分）以“迁马，跑在水美酒乡”为主题的 2023 宿迁马拉松，于 4 月 2 日开跑，共有 12000

名跑者在

“中国酒都”纵情奔跑，感受宿迁的水韵柔情．本次赛事设置全程马拉松、半程马拉松和欢乐跑（5.5公里）三个项目，每个项目均设置4000个参赛名额．在宿大学生踊跃参加志愿服务，现有甲、乙等5名大学生志愿者，通过培训后，拟安排在全程马拉松、半程马拉松和欢乐跑（5.5公里）三个项目进行志愿者活动，则下列说法正确的是（　　）

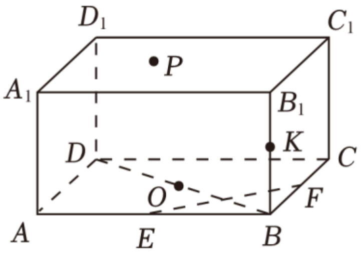
A．若全程马拉松项目必须安排3人，其余两项各安排1人，则有20种不同的分配方案

B．若每个比赛项目至少安排1人，则有150种不同的分配方案

C．安排这5人排成一排拍照，若甲、乙相邻，则有42种不同的站法

D．已知这5人的身高各不相同，若安排5人拍照，前排2人，后排3人，且后排3人中身高最高的站中间，则有40种不同的站法

（多选）12．（5分）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点，E，F，O，K 分别为 AB，BC，BD，BB_1 中点，若 $AA_1=AD=1$，$A_1B_1=2$，则下列说法正确的是（　　）



A．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$最大值为1

B．四棱锥 $P-ABCD$ 的体积和表面积均不变

C．若 PK∥面 A_1EF，则点 P 轨迹的长为$\frac{\sqrt{5}}{4}$

D．在棱 AA_1 上存在一点 M，使得面 MBD⊥面 OC_1D

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．（5分）若某种元件经受住打击测试的概率为$\frac{2}{3}$，则4个此种元件中恰有2个经受住打击的概率为______________________．

14．（5分）已知 $(2x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$ 的值为_____________．

15．（5分）空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为$\vec{m}=(A, B, C)$的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$．若平面 α 的方程为 $x+2y+z-1=0$，则平面 α 的一个法向量为______________________．

16．（3分）现有编号为1，2，3，…，n（$n>2$，$n\in\mathbf{N}^*$）的 n 个相同的袋子，每个袋中均装有 n 个形状和

大小都相同的小球，且编号为 k（$k=1$，2，3，…，n）的袋中有 k 个红球，$n-k$ 个白球．当 $n=5$ 时，从编号为 3 的袋中无放回依次摸出两个球，则摸到的两个球都是红球的概率为__________；现随机从 n 个袋子中任选一个，再从袋中无放回依次摸出三个球，若第三次取出的球为白球的概率为$\frac{9}{20}$，则 n 的值为 _________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）在 $(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2x})^n(n\in N^*)$ 展开式中，前 3 项的系数成等差数列．

求：（1）n 的值；

（2）二项展开式中的有理项．

18.（12 分）甲、乙进行轮流掷骰子游戏，若出现点数大于 4 得 3 分，出现点数小于或等于 4 得 1 分，两人得分之和大于或等于 6 分时游戏结束，且规定最后掷骰子的人获胜，经过抽签，甲先掷骰子．

（1）求乙掷一次就获胜的概率；

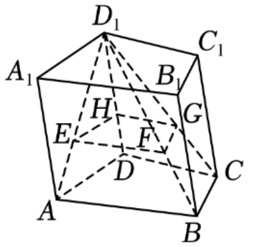
（2）求甲获胜的概率．

19.（12 分）在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{D_1E}=k\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_1F}=k\overrightarrow{D_1B}$，$\overrightarrow{D_1G}=k\overrightarrow{D_1C}$，$\overrightarrow{D_1H}=k\overrightarrow{D_1D}$．

（1）当 $k=\frac{3}{4}$ 时，试用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$；

（2）证明：E，F，G，H 四点共面；

（3）判断直线 D_1C_1 能否是平面 D_1AB 和平面 D_1DC 的交线，并说明理由．



20.（12 分）据文化和旅游部数据中心测算，2023 年“五一”假期，全国国内旅游出游合计 2.74 亿人次，同比增长 70.83%．为迎接暑期旅游高峰的到来，某旅游公司对今年年初推出一项新的旅游产品 1～5 月份的营业收入（万元）进行统计，统计数据如表所示：

月份 x	1	2	3	4	5
月收入 y（万元）	94	98	105	115	123

（1）依据表中给出的数据，建立该项旅游产品月收入 y 万元关于月份 x 的线性回归方程，并预测该项旅游产品今年 7 月份的营业收入是多少万元？

（2）观察表中数据可以看出该产品很受游客欢迎，为了进一步了解喜爱该旅游产品是否与性别有关，

工作人员随机调查了100名游客，被调查的女性游客人数占40%，其中喜爱的人数为25人，调查到的男性游客中喜爱的人数占$\frac{3}{4}$.

①根据调查情况填写2×2列联表；

②根据列联表中数据能否有90%的把握认为“游客喜爱该旅游产品与性别有关”？

	喜爱	不喜爱	总计
女性人数			
男性人数			
总计			

参考公式及数据：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}，\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.\quad \chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

，其中$n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.10	0.050	0.010	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	10.828

21.（12分）近些年天然气使用逐渐普及，为了百姓能够安全用气，国务院办公厅2022年6月印发《城市燃气管道等老化更新改造实施方案（2022﹣2025 年）》，为了更具有针对性，某市在实施管道老化更新的过程中，从本市某社区500个家庭中随机抽取了100个家庭燃气使用情况进行调查，统计这100个家庭燃气使用量（单位：m^3），得到如下频数分布表（第一行是燃气使用量，第二行是频数），并将这一个月燃气使用量超过$22m^3$的家庭定为“超标”家庭.

[6.5，9.5)	[9.5，12.5)	[12.5，15.5)	[15.5，18.5)	[18.5，21.5)	[21.5，24.5)	[24.5，27.5]
8	14	16	30	16	12	4

（1）估计该社区这一个月燃气使用量的平均值$\overline{x}$；

（2）若该社区这一个月燃气使用量大致服从正态分布N（μ，30.25），其中μ近似为100个样本家庭的平均值$\overline{x}$（精确到$0.1m^3$），估计该社区中“超标”家庭的户数；

（3）根据原始样本数据，在抽取的100个家庭中，这一个月共有8个“超标”家庭，市政府决定从这8个“超标”家庭中任选5个跟踪调查其使用情况．设这一个月燃气使用量不小于$24.5m^3$的家庭个数为X，求X的分布列和数学期望.

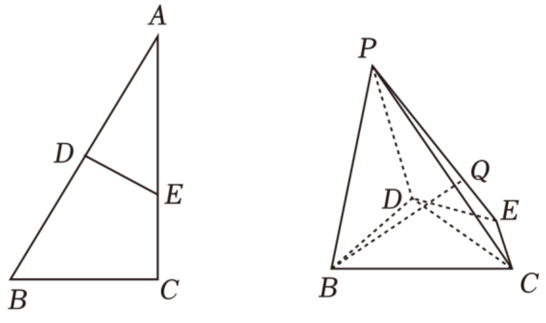
附：若 X 服从正态分布 N（μ，σ^2），则 P（μ﹣σ＜X≤μ+σ）＝0.6826，P（μ﹣2σ＜X≤μ+2σ）＝0.9544，P（μ﹣3σ＜X≤μ+3σ）＝0.9974．

22．（12 分）如图（1）所示，在△ABC 中，$AB=4\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，∠B＝60°，DE 垂直平分 AB．现将△ADE 沿 DE 折起，使得二面角 A﹣DE﹣B 大小为 60°，得到如图（2）所示的空间几何体（折叠后点 A 记作点 P）

（1）求点 D 到面 PEC 的距离；

（2）求四棱锥 P﹣$BCED$ 外接球的体积；

（3）点 Q 为一动点，满足 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PE}$（0＜λ＜1），当直线 BQ 与平面 PEC 所成角最大时，试确定点 Q 的位置．



图(1)　　　　图(2)

2022-2023学年江苏省宿迁市高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）已知 P（AB）$=\frac{1}{3}$，P（$A|B$）$=\frac{2}{5}$，则 P（B）＝（　　）

A．$\frac{1}{12}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

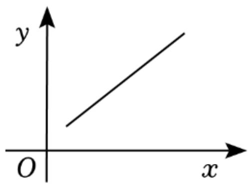
【答案】D

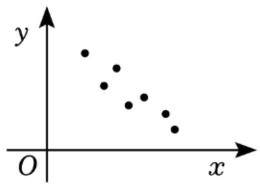
【分析】根据条件概率公式，即可求得答案．

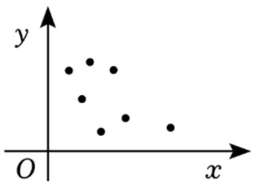
【解答】解：P（B）$=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{6}$．

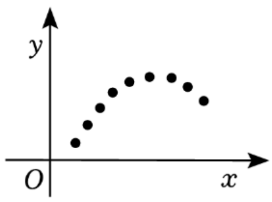
故选：D．

2．（5分）下列图中，能反映出相应两个变量之间具有线性相关关系的是（　　）

A．

B．

C．

D．

【答案】B

【分析】根据题意，依次分析选项中的变量关系，综合可得答案．

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，是确定性的函数关系，不符合题意；

对于 B，图中的散点分布在某条直线的附近，两个变量之间具有线性相关关系，符合题意；

对于 C，图中的散点没有向某条直线的附近集中，两个变量不具有线性相关关系，不符合题意；

对于 D，图中的散点分布在一条曲线附近，两个变量不具有线性相关关系，不符合题意．

故选：B．

3.（5 分）若样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差为 2，平均数 $\overline{x}$ 为 5，则下列说法正确的个数为（　　）

①数据 x_1+1，x_2+1，…，x_n+1 的平均数为 6；

②数据 x_1+1，x_2+1，…，x_n+1 的方差为 3；

③数据 $3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_n+1$ 的平均数为 15；

④数据 $3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_n+1$ 的方差为 19.

A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

【答案】*D*

【分析】结合题目进行计算即可.

【解答】解：对于①，平均数为（$x_1+1+x_2+1+\cdots+x_n+1$）÷n

=（$x_1+x_2+\cdots+x_n+n$）÷n=（$5n+n$）÷n=$6n\div n$=6，①正确；

对于②，方差为$[(x_1+1-6)^2+(x_2+1-6)^2+\cdots+(x_n+1-6)^2]\div n$

$=[(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+\cdots+(x_n-5)^2]\div n=2$，②错误；

对于③，平均数为（$3x_1+1+3x_2+1+\cdots+3x_n+1$）÷$n$=（$3x_1+3x_2+\cdots+3x_n+n$）÷$n$

=（$15n+n$）÷n=$16n\div n$=16，③错误；

对于④，方差为$[(3x_1+1-16)^2+(3x_2+1-16)^2+\cdots+(3x_n+1-16)^2]\div n$

$=[(3x_1-15)^2+(3x_2-15)^2+\cdots+(3x_n-15)^2]\div n$

$=9[(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+\cdots+(x_n-5)^2]\div n=9\times2=18$，④错误.

故选：*D*.

4.（5 分）已知 m，n 是实数，若点 A（2，－5，－1），B（－1，－4，－2），C（$m+3$，－3，n）在同一直线上，则 $m+n$ 的值为（　　）

A．－10　　B．－7　　C．－3　　D．10

【答案】*A*

【分析】三点在同一条直线上，即向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，利用向量共线定理即可得出.

【解答】解：m，n 是实数，若点 A（2，－5，－1），B（－1，－4，－2），C（$m+3$，－3，n）在同一直线上，

则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线.

∵$\overrightarrow{AB}$=（－3，1，－1），$\overrightarrow{BC}$=（$m+4$，1，$n+2$），

∴$\frac{m+4}{-3}=\frac{1}{1}=\frac{n+2}{-1}$，∴$m$=－7，$n$=－3，

∴$m+n=-10$．

故选：A．

5．（5 分）某批麦种中，一等麦种占 96%，二等麦种占 4%，一、二等麦种种植后所结的麦穗含 55 粒以上麦粒的概率分别为 0.5，0.25，则用这批种子种植后所结的麦穗含有 55 粒以上麦粒的概率是（　　）

A．0.58　　B．0.49　　C．0.75　　D．0.125

【答案】B

【分析】由互斥事件和相互独立事件的概率公式计算可得答案．

【解答】解：由一等麦种占 96%，二等麦种占 4%，

用一、二等种子长出的穗含 55 颗以上麦粒的概率分别为 0.5，0.25，

则这批种子所结的穗含 56 颗以上麦粒的概率为：

$P=0.96\times0.5+0.04\times0.25=0.49$．

故选：B．

6．（5 分）已知平面 α，β，γ，直线 l，m，n，$\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，下列命题不正确的是（　　）

A．若 $l/\!/m$，则 $l/\!/n$，$m/\!/n$　　B．若 $n/\!/\alpha$，则 $l/\!/m$

C．若 $l\perp n$，则 $l\perp m$　　D．若 $m\cap n=P$，则 $P\in l$

【答案】C

【分析】由空间中三个平面两两相交，交线要么互相平行，要么相交于一点，然后逐一分析四个选项得答案．

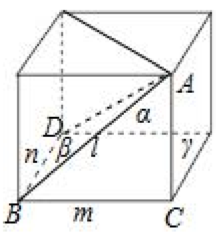
【解答】解：已知 $\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，

则 l、m、n 的关系有两种，要么相互平行，要么相交于一点．

若 $l/\!/m$，则 $l/\!/n$，$m/\!/n$，故 A 正确；

若 $n/\!/\alpha$，则 n 与 α 无交点，则 n 与 l，n 与 m 无交点，可知 $l/\!/m$，故 B 正确；

在如图所示的正方体中，



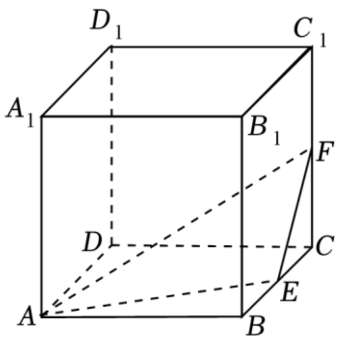
平面 ABC 为平面 α，平面 ABD 为平面 β，平面 BDC 为平面 γ，

$l\perp n$，l 与 m 不垂直，故 C 错误；

若 $m\cap n=P$，则 $P\in m$，$P\in n$，可得 $P\in\alpha$，$P\in\beta$，又 $\alpha\cap\beta=l$，则 $P\in l$，故 D 正确．

故选：C．

7．（5 分）如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E，F 分别是 BC，CC_1 中点，则二面角 $F-AE-C$ 的正切值为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．1　　C．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】A

【分析】建立坐标系求出平面的法向量，利用向量法进行求解即可．

【解答】解：建立如图的空间坐标系，

∵正方体的棱长为 2，点 E，F 分别是 BC，CC_1 中点，

∴A（2，0，0），C（0，2，0），E（1，2，0），F（0，2，1），

则$\overrightarrow{m}$=（0，0，1）是平面 AEC 的一个法向量，

设$\overrightarrow{n}$=（x，y，z）是平面 AEF 的一个法向量，

则$\overrightarrow{AE}$=（﹣1，2，0），$\overrightarrow{EF}$=（﹣1，0，1），

∵$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+2y=0$，$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-x+z=0$，

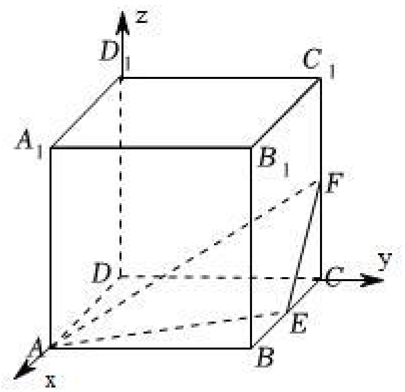
∴令 $x=2$，则 $y=1$，$z=2$，即$\overrightarrow{n}$=（2，1，2），

设二面角 $F-AE-C$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}$，

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

则 $\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

故选：A．



8．（5 分）为了合理配置教育资源、优化教师队伍结构、促进城乡教育优质均衡发展，科学编制校长教师交流轮岗 3 到 5 年规划和学年度交流计划，努力办好人民群众“家门口”的好学校．省委、省政府高度重视此项工作，省教育厅出台《关于深入推进义务教育学校校长教师交流轮岗的意见》，将义务教育教师交流轮岗工作纳入了省委 2023 年度重点工作任务．某市教育局为切实落实此项政策，安排 3 名校长和 3 名教师到甲、乙、丙三所义务教育学校进行轮岗交流，每所学校安排一名校长，则不同的安排方案种数是（　　）

A．720　　　　B．162　　　　C．81　　　　D．33

【答案】B

【分析】每所学校安排一名校长，共 A_3^3 种选择，3 名教师可以去甲、乙、丙三所义务教育学校中的任意一所，故有 3^3 种选择，再结合分步乘法计数原理计算即可．

【解答】解：安排 3 名校长和 3 名教师到甲、乙、丙三所义务教育学校进行轮岗交流，

每所学校安排一名校长，共 $A_3^3=6$ 中选择，

3 名教师可以去甲、乙、丙三所义务教育学校中的任意一所，故有 $3^3=27$ 种选择，

故共有 $6\times27=162$ 种选择．

故选：B．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（5 分）下列说法正确的是（　　）

A．残差平方和越小的模型，拟合的效果越好

B．随机变量 X 服从两点分布，则 $D(X)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

C．数据 23，2，15，13，22，20，9，17，5，18 的 70 百分位数为 18

D．样本相关系数 $|r|$ 越接近 1，样本数据的线性相关程度也越强

【答案】*ABD*

【分析】根据残差平方和，即可判断 *A*；根据两大分布，即可判断 *B*；根据百分位数，即可判断 *C*；根据相关系数，即可判断 *D*.

【解答】解：对于 *A*，残差平方和越小的模型，拟合的效果越好，故 *A* 正确；

对于 *B*，随机变量 *X* 服从两点分布，则 $D(X)=p(1-p)\leqslant\left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $p=\frac{1}{2}$时等号成立，故 $D(X)$ 的最大值为$\frac{1}{4}$，故 *B* 正确；

对于 *C*，数据 23，2，15，13，22，20，9，17，5，18，从小到大排列为：2，5，9，13，15，17，18，20，22，23，

10×0.7＝7，故数据 23，2，15，13，22，20，9，17，5，18 的 70 百分位数为$\frac{18+20}{2}$＝19，故 *C* 错误；

对于 *D*，样本相关系数$|r|$越接近 1，样本数据的线性相关程度也越强，故 *D* 正确.

故选：*ABD*.

（多选）10.（5 分）下列各式正确的是（　　）

A. $C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}$

B. $A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}$

C. $rC_{n}^{r}=nC_{n-1}^{r-1}$

D. $A_{1}^{1}+2A_{2}^{2}+3A_{3}^{3}+\cdots+nA_{n}^{n}=A_{n+1}^{n+1}$

【答案】*BC*

【分析】根据题意，由排列组合数公式依次分析选项是否正确，综合可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 *A*，当 $n=3$，$m=2$ 时，$C_{4}^{2}=6$，$C_{3}^{2}+C_{3}^{3}=4$，故 *A* 错误；

对于 *B*，$A_{n+1}^{n}=(n+1)!$，$A_{n+1}^{n+1}=\frac{(n+1)!}{1!}=(n+1)!$，*B* 正确；

对于 *C*，左式$=r\times\frac{n!}{r!\times(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!\times(n-r)!}$，右式$=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\times(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!\times(n-r)!}$，则有左式＝右式，*C* 正确；

对于 *D*，当 $n=2$ 时，左式$=A_{1}^{1}+2A_{2}^{2}=5$，右式$=A_{3}^{3}=6$，左式≠右式，*D* 错误.

故选：*BC*.

（多选）11.（5 分）以“迁马，跑在水美酒乡”为主题的 2023 宿迁马拉松，于 4 月 2 日开跑，共有 12000

名跑者在

“中国酒都”纵情奔跑，感受宿迁的水韵柔情．本次赛事设置全程马拉松、半程马拉松和欢乐跑（5.5 公里）三个项目，每个项目均设置 4000 个参赛名额．在宿大学生踊跃参加志愿服务，现有甲、乙等 5 名大学生志愿者，通过培训后，拟安排在全程马拉松、半程马拉松和欢乐跑（5.5 公里）三个项目进行志愿者活动，则下列说法正确的是（　　）

A．若全程马拉松项目必须安排 3 人，其余两项各安排 1 人，则有 20 种不同的分配方案

B．若每个比赛项目至少安排 1 人，则有 150 种不同的分配方案

C．安排这 5 人排成一排拍照，若甲、乙相邻，则有 42 种不同的站法

D．已知这 5 人的身高各不相同，若安排 5 人拍照，前排 2 人，后排 3 人，且后排 3 人中身高最高的站中间，则有 40 种不同的站法

【答案】*ABD*

【分析】对于 *A*，首先对 5 人分组：3，1，1，然后对除全程马拉松项目外的其他项目排列即可；

对于 *B*，首先对 5 人分组，然后对 3 个项目进行全排列即可；

对于 *C*，运用“捆绑法”将甲、乙看成一个整体，再做全排列即可；

对于 *D*，第一步选 2 个人排前排，第二步剩下的 3 个人排后排，其中最高的在中间，只需对另外，进行排列即可．

【解答】解：若全程马拉松项目必须安排 3 人，其余两项各安排 1 人，

则先从 5 人中任选 3 人安排在全程马拉松项目，剩余 2 人在其余两个项目，全排即可，

故不同的方案有 $C_5^3A_2^2$＝20 种，*A* 正确；

若每个比赛项目至少安排 1 人，

则先将 5 人按”3，1，1”或“2，2，1”形式分成三组，再分配到三个项目上，

故不同的方案有 $\frac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3+\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$＝60+90＝150，故 *B* 正确；

若甲，乙相邻，可把 2 人看成一个整体，与下的 3 人全排列，有 A_4^4排法，甲、乙两人相邻有 A_2^2排法，

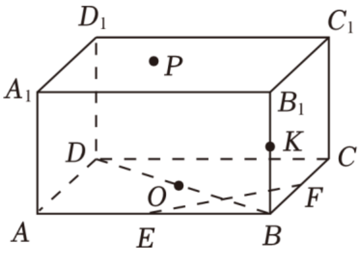
所以共有 $A_2^2A_4^4$＝48 不同的站法，故 *C* 错误；

前排有 A_5^2种站法，后排 3 人中最高的站中间有 A_2^2种站法，

所以共有 $A_5^2A_2^2$＝40 种不同的站法，*D* 正确．

故选：*ABD*．

（多选）12．（5 分）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点，E，F，O，K 分别为 AB，BC，BD，BB_1 中点，若 $AA_1=AD=1$，$A_1B_1=2$，则下列说法正确的是（　　）



A．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$最大值为 1

B．四棱锥 $P-ABCD$ 的体积和表面积均不变

C．若 PK∥面 A_1EF，则点 P 轨迹的长为$\frac{\sqrt{5}}{4}$

D．在棱 AA_1 上存在一点 M，使得面 MBD⊥面 OC_1D

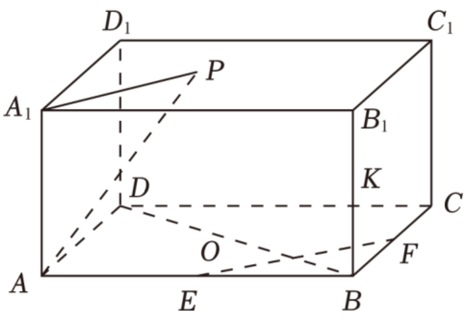
【答案】ACD

【分析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AA_1}+x\overrightarrow{A_1D_1}+y\overrightarrow{A_1B_1})\cdot\overrightarrow{BC}$，当 P 点与 C_1 点重合时，$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$，可得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$最大值为 1 可判断 A；利用棱锥的体积公式计算可得四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；当 P 点与 A_1 点重合、为上底面的中心时，计算出表面积可判断 B；取 A_1B_1，B_1C_1 的中点 G，H，GB_1，B_1H 的中点 N，J，利用面面平行的判定定理可得平面 A_1EF∥平面 NKJ，可得点 P 轨迹为线段 NJ，求出 NJ 可判断 C；以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在的直线为 x，y，z 轴建立平面直角坐标系，设 M（1，0，a），求出平面 BDC_1、平面 MBD 的一个法向量，利用面面垂直的向量求法求出 a 可判断 D．

【解答】解：对于 A，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{AA_1}+x\overrightarrow{A_1D_1}+y\overrightarrow{A_1B_1}$，当 P 点与 C_1 点重合时，$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$，即 $x=1$，所以 $0\leqslant x\leqslant 1$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AA_1}+x\overrightarrow{A_1D_1}+y\overrightarrow{A_1B_1})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}+x\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0+x\times1\times1+0=x$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$最大值为 1，故 A 正确；

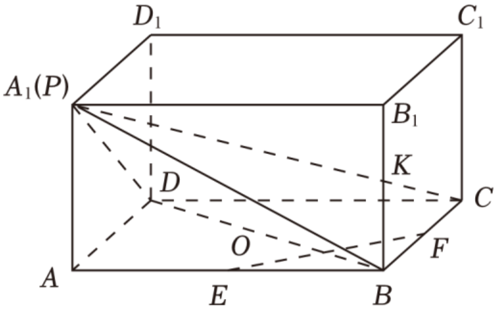


对于 B，因为 P 点到底面 $ABCD$ 的距离为 $AA_1=1$，底面面积为 $AD\times AB=2$，

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{2}{3}$，是定值；

当 P 点与 A_1 点重合时，四个侧面都为直角三角形，

所以表面积为 $S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}+S_{长方形ABCD}=\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 1\times 1+1\times 2=3.5+\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}$，

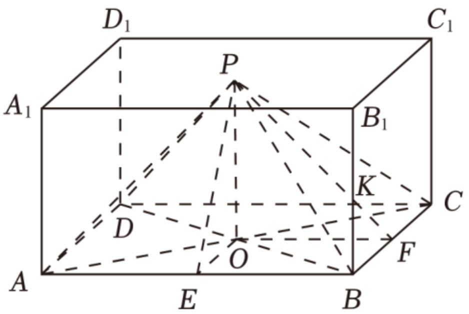


当 P 点为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心时，连接 PA，PB，PC，PD，PO，PE，PF，则 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAD}$，且 $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，

$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PF=\sqrt{PO^2+OF^2}=\sqrt{2}$，

此时表面积为 $S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}+S_{长方形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times 2+1\times 2=\sqrt{5}+2+\sqrt{2}$，

所以 $3.5+\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{5}+2+\sqrt{2}$，故 B 错误；



对于 C，取 A_1B_1，B_1C_1 的中点 G，H，GB_1，B_1H 的中点 N，J，

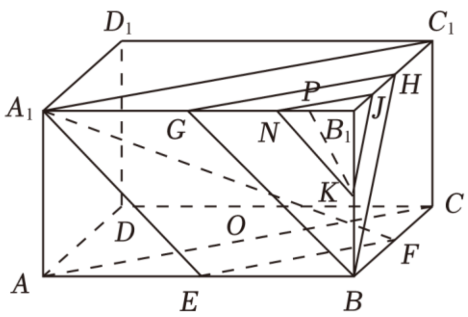
分别连接 A_1C_1，BG，BH，GH，NK，NJ，KJ，AC，可得 $A_1E\parallel BG\parallel NK$，$AC\parallel A_1C_1\parallel GH\parallel NJ\parallel EF$，

因为 $NJ\not\subset$ 平面 A_1EF，$EF\subset$ 平面 A_1EF，所以 $NJ\parallel$ 平面 A_1EF，

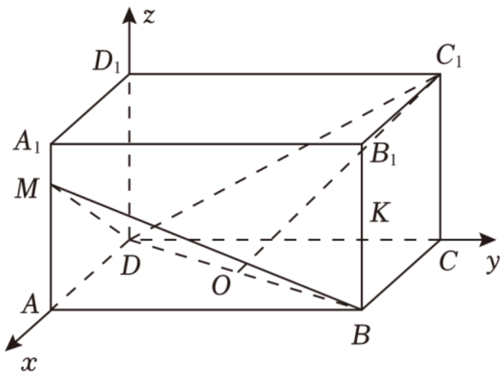
因为 $NK\not\subset$ 平面 A_1EF，$A_1E\subset$ 平面 A_1EF，所以 $NK\parallel$ 平面 A_1EF，且 $NK\cap NJ=N$，

NK、$NJ\subset$ 平面 NKJ，所以平面 $A_1EF\parallel$ 平面 NKJ，

当 $P\in NJ$ 时，$PK\subset$ 平面 NKJ，可得 $PK\parallel$ 面 A_1EF，则点 P 轨迹为线段 NJ，此时 $NJ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$，故 C 正确；



对于 D，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在的直线为 x，y，z 轴建立平面直角坐标系，



所以 D（0，0，0），B（1，2，0），C_1（0，2，1），设 M（1，0，a），则 $0\leqslant a\leqslant 1$，

$\overrightarrow{DC_1}=(0,\ 2,\ 1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{DM}=(1,\ 0,\ a)$，$\overrightarrow{BM}=(0,\ -2,\ a)$，

设平面 BDC_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，$\begin{cases}2y_1+z_1=0\\ x_1+2y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$ 可得 $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ 2)$，

设平面 MBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2+az_2=0\\ az_2-2y_2=0\end{cases}$，令 $z_2=1$ 可得 $\overrightarrow{n_2}=(-a,\ \frac{a}{2},\ 1)$，

由 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=-2a-\frac{a}{2}+2=0$，解得 $a=\frac{4}{5}$，满足题意，故 D 正确．

故选：ACD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）若某种元件经受住打击测试的概率为 $\frac{2}{3}$，则 4 个此种元件中恰有 2 个经受住打击的概率为 $\underline{\frac{8}{27}}$．

【答案】$\frac{8}{27}$．

【分析】根据 n 次独立重复实验恰好发生 k 次的概率计算公式即可求解．

【解答】解：由题意，4 个元件中有 2 个经受住打击的概率为$P=C_4^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{27}$.

故答案为：$\frac{8}{27}$.

14.（5 分）已知（$2x-1$）$^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$，则$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$的值为 ___$3^{10}-1$___.

【答案】$3^{10}-1$.

【分析】由题意，令 $x=0$，可得 $a_0=1$．而 $1+|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$的值，即（$2x+1$）^{10} 的展开式的各项系数和，再令 $x=1$ 即可.

【解答】解：∵（$2x-1$）$^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$，

∴令 $x=0$，可得 $a_0=1$.

则 $1+|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$的值，即（$2x+1$）^{10} 的展开式的各项系数和.

令 $x=1$，可得 $1+|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|=3^{10}$，

故$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|=3^{10}-1$.

故答案为：$3^{10}-1$.

15.（5 分）空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，经过点 P（x_0，y_0，z_0）且法向量为$\vec{m}=(A,B,C)$的平面方程为 A（$x-x_0$）$+B$（$y-y_0$）$+C$（$z-z_0$）$=0$．若平面 α 的方程为 $x+2y+z-1=0$，则平面 α 的一个法向量为 ___（1，2，1）(答案不唯一)___.

【答案】（1，2，1）(答案不唯一).

【分析】根据题意，将平面方程变形为 1（$x-0$）+2（$y-0$）+1（$z-1$）=0，由此分析可得答案.

【解答】解：根据题意，平面 α 的方程为 $x+2y+z-1=0$，即 1（$x-0$）+2（$y-0$）+1（$z-1$）=0，则平面 α 的一个法向量为（1，2，1）.

故答案为：（1，2，1）(答案不唯一).

16.（3 分）现有编号为 1，2，3，…，n（$n>2$，$n\in\mathbf{N}^*$）的 n 个相同的袋子，每个袋中均装有 n 个形状和大小都相同的小球，且编号为 k（$k=1$，2，3，…，n）的袋中有 k 个红球，$n-k$ 个白球．当 $n=5$ 时，从编号为 3 的袋中无放回依次摸出两个球，则摸到的两个球都是红球的概率为___0.3___；现随机从 n 个袋子中任选一个，再从袋中无放回依次摸出三个球，若第三次取出的球为白球的概率为$\frac{9}{20}$，则 n 的值为 ___10___.

【答案】0.3，10.

【分析】代入 n，k 的值，求出满足条件的概率即可，利用古典概率型，先求出某一情况下取球方法数的总数，在列举出第三次取球为白球的情形以及对应的取法法，根据古典概型计算概率，逐一把所有情

况累加，能求出总的概率，由此能求出结果．

【解答】解：当 $n=5$，$k=3$ 时，袋中有 3 个红球，2 个白球，

共有 $C_5^2=10$ 个基本事件，

摸到的两个球都是红球有 $C_3^2=3$ 个基本事件，

故摸到的两个球都是红球的概率 $P=\frac{3}{10}=0.3$；

设选出的是第 k 个球，连续三次取球的方法数为 $n(n-1)(n-2)$，

第三次取出的是白球的取法有如下四种情况：

白白白，取法数为：$(n-k)(n-k-1)(n-k-2)$，

红白白，取法数为：$k(n-k)(n-k-1)$，

白红白，取法数为：$(n-k)k(n-k-1)$，

红红白，取法数为：$k(k-1)(n-k)$，

∴第三次取出的是白球的总情况数为：

$(n-k)(n-k-1)(n-k-2)+2k(n-k)(n-k-1)+k(k-1)9n-k)=(n-1)(n-2)(n-k)$，

则在第 k 个袋子中取出的是白球的概率为：

$P_k=\frac{(n-1)(n-2)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{n-k}{n}$，

∵选取第 k 个袋的概率为$\frac{1}{n}$，

∴任选袋子取第三个球是白球的概率为：

$P=\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\cdot\frac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} n-k=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1} i=\frac{n-1}{2n}$，

当 $P=\frac{n-1}{2n}=\frac{9}{20}$时，$n=10$．

故答案为：0.3，10．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）在 $(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2x})^n(n\in N^*)$展开式中，前 3 项的系数成等差数列．

求：（1）n 的值；

（2）二项展开式中的有理项．

【答案】（1）8．

（2）$T_1=1$，$T_5=\frac{35}{8}x^{-3}$，$T_9=256x^{-6}$．

【分析】(1) 由题意，利用二项式展开式的通项公式，等差数列的定义和性质，求得 n 值．

(2) 由题意，利用二项式展开式的通项公式，求出二项展开式中的有理项．

【解答】解：(1) 由于在 $(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2x})^n(n\in N^*)$展开式中，前 3 项的系数$C_n^0$、$C_n^1\times\frac{1}{2}$、$C_n^2\times\frac{1}{4}$成等差数列，

$\therefore C_n^0+C_n^2\times\frac{1}{4}=2\times C_n^1\times\frac{1}{2}$，求得 $n=1$（舍去）或 $n=8$．

综上可得，$n=8$．

(2) 由于展开式的铜项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(\frac{1}{2})^r\cdot x^{-\frac{3r}{4}}$，

令 $-\frac{3r}{4}$为整数，可得 $r=0$，4，8，

故二项展开式中的有理项为 $T_1=C_8^0=1$，$T_5=C_8^4\cdot\frac{1}{16}\cdot x^{-3}=\frac{35}{8}x^{-3}$，$T_9=C_8^8\cdot(\frac{1}{2})^8\cdot x^{-6}=256x^{-6}$．

18．(12 分) 甲、乙进行轮流掷骰子游戏，若出现点数大于 4 得 3 分，出现点数小于或等于 4 得 1 分，两人得分之和大于或等于 6 分时游戏结束，且规定最后掷骰子的人获胜，经过抽签，甲先掷骰子．

(1) 求乙掷一次就获胜的概率；

(2) 求甲获胜的概率．

【答案】(1) $\frac{1}{9}$；

(2) $\frac{52}{243}$．

【分析】(1) 乙要想一次就获胜，则甲的点数大于 4，乙的点数大于 4；(2) 分两种掷骰子的情况，一种甲、乙、甲，一种甲、乙、甲、乙、甲．

【解答】解：(1) 乙要想一次就获胜，则甲得 3 分，乙得 3 分，即甲的点数大于 4，乙的点数大于 4，概率都为$\frac{1}{3}$，

所以乙掷一次就获胜的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

(2) 分两种掷骰子的情况，一种甲、乙、甲，一种甲、乙、甲、乙、甲，

得分为 3，1，3 或 1，3，3 或 1，1，1，1，3，

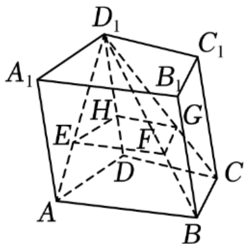
所以甲获胜的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times2+(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}=\frac{52}{243}$．

19．(12 分) 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{D_1E}=k\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_1F}=k\overrightarrow{D_1B}$，$\overrightarrow{D_1G}=k\overrightarrow{D_1C}$，$\overrightarrow{D_1H}=k\overrightarrow{D_1D}$．

(1) 当 $k=\frac{3}{4}$时，试用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$表示$\overrightarrow{AF}$；

（2）证明：E，F，G，H 四点共面；

（3）判断直线 D_1C_1 能否是平面 D_1AB 和平面 D_1DC 的交线，并说明理由．



【答案】（1）$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}$（$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$）$+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$；

（2）见证明；

（3）可以，见证明．

【分析】（1）根据三角形相似原理和向量运算法则进行计算即可；

（2）四边形 $EFGH$ 与地面相似，从而四点共面；

（3）若四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，则直线 D_1C_1 为平面 D_1AB 和平面 D_1DC 的交线．

【解答】解：（1）由三角形相似及几何关系，得 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}$（$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$）$+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$；

（2）证明：由三角形相似原理可得 $EH=\frac{3}{4}AD$，$EF=\frac{3}{4}AB$，$GH=\frac{3}{4}DC$，$GF=\frac{3}{4}BC$，所以，四边形 $EFGH$ 与四边形 $ABCD$ 相似，所以 E，F，G，H 四点共面；

（3）可以，

理由如下：若四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，则 AD_1 与 BC_1 平行且相等，

所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，平面 D_1AB 与平面 ABC_1D_1 重合，

又 C_1D_1 与 CD 平行且相等，所以四边形 DCC_1D_1 是平行四边形，平面 D_1DC 与平面 ABC_1D_1 重合，

此时 D_1C_1 即为平面 D_1AB 和平面 D_1DC 的交线．

20．（12 分）据文化和旅游部数据中心测算，2023 年“五一”假期，全国国内旅游出游合计 2.74 亿人次，同比增长 70.83%．为迎接暑期旅游高峰的到来，某旅游公司对今年年初推出一项新的旅游产品 1～5 月份的营业收入（万元）进行统计，统计数据如表所示：

月份 x	1	2	3	4	5
月收入 y（万元）	94	98	105	115	123

（1）依据表中给出的数据，建立该项旅游产品月收入 y 万元关于月份 x 的线性回归方程，并预测该项旅游产品今年 7 月份的营业收入是多少万元？

（2）观察表中数据可以看出该产品很受游客欢迎，为了进一步了解喜爱该旅游产品是否与性别有关，

工作人员随机调查了 100 名游客，被调查的女性游客人数占 40%，其中喜爱的人数为 25 人，调查到的男性游客中喜爱的人数占$\frac{3}{4}$.

①根据调查情况填写 2×2 列联表；

②根据列联表中数据能否有 90%的把握认为“游客喜爱该旅游产品与性别有关”？

	喜爱	不喜爱	总计
女性人数			
男性人数			
总计			

参考公式及数据：

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$. $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

P（$\chi^2\geqslant x_0$）	0.10	0.050	0.010	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=7.5x+84.5$，

预测该项旅游产品今年 7 月份的营业收入是 137 万元；

（2）①列联表见解析；

②没有 90%把握认为“游客喜爱该旅游产品与性别有关”.

【分析】（1）由题意，设出 y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，根据统计数据列出等式求出$\hat{a}$和$\hat{b}$的值，进而可得$\hat{y}=7.5x+84.5$，将 $x=7$ 代入即可求出今年 7 月份的营业收入；

（2）①结合信息即可得到 2×2 列联表；

②根据 2×2 列联表，计算出 χ^2 的值，对照题目中的表格，即可得出结论.

【解答】解：（1）设 y 关于 x 的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

已知$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\frac{94+98+105+115+123}{5}=107$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=26+9+0+8+32=75$，

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}$＝7.5，

则$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=84.5$，

所以$\hat{y}$＝7.5x+84.5，

当x＝7 时，y＝137，

所以y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=7.5x+84.5$，

预测该项旅游产品今年 7 月份的营业收入是 137 万元；

（2）①调查情况 2×2 列联表为：

	喜爱	不喜爱	总计
女性人数	25	15	40
男性人数	45	15	60
总计	70	30	100

②提出假设H_0：喜爱该旅游产品与性别没有关系，

根据表中数据可得$\chi^2=\dfrac{100(25\times15-15\times40)^2}{40\times60\times70\times30}=\dfrac{25}{14}\approx1.786$，

因为 1.786＜2.706，

所以没有 90%把握认为“游客喜爱该旅游产品与性别有关”.

21.（12 分）近些年天燃气使用逐渐普及，为了百姓能够安全用气，国务院办公厅 2022 年 6 月印发《城市燃气管道等老化更新改造实施方案（2022﹣2025 年）》，为了更具有针对性，某市在实施管道老化更新的过程中，从本市某社区 500 个家庭中随机抽取了 100 个家庭燃气使用情况进行调查，统计这 100 个家庭燃气使用量（单位：m^3），得到如下频数分布表（第一行是燃气使用量，第二行是频数），并将这一个月燃气使用量超过 22m^3的家庭定为“超标”家庭.

[6.5，9.5）	[9.5，12.5）	[12.5，15.5）	[15.5，18.5）	[18.5，21.5）	[21.5，24.5）	[24.5，27.5]
8	14	16	30	16	12	4

（1）估计该社区这一个月燃气使用量的平均值$\overline{x}$；

（2）若该社区这一个月燃气使用量大致服从正态分布N（μ，30.25），其中 μ 近似为 100 个样本家庭的平均值$\overline{x}$（精确到 0.1m^3），估计该社区中“超标”家庭的户数；

（3）根据原始样本数据，在抽取的 100 个家庭中，这一个月共有 8 个“超标”家庭，市政府决定从这 8 个“超标”家庭中任选 5 个跟踪调查其使用情况．设这一个月燃气使用量不小于 $24.5m^3$ 的家庭个数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

附：若 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$．

【答案】（1）16.52；

（2）79；

（3）X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$E(X)=\frac{5}{2}$．

【分析】（1）利用组中值可求燃气使用量的平均值 $\overline{x}$；

（2）利用正态分布的对称性结合题设中给出的数据可求该社区中“超标”家庭的户数；

（3）利用超几何分布可求 X 的分布列和数学期望．

【解答】解：（1）样本数据各组的中点值分别为 8，11，14，17，20，23，26，

则 $\overline{x}=\frac{8\times8+11\times14+14\times16+17\times30+20\times16+23\times12+26\times4}{100}=16.52$，

估计该社区这一个月燃气使用量的平均值 16.52．

（2）据题意，$\mu=16.5$，$\sigma^2=30.25$，$\sigma=5.5$，则 $P(X>22)=P(X>\mu+\sigma)=\frac{1-0.6826}{2}=0.1587$，

估计该社区 500 个家庭中“超标家庭”有 $500\times0.1587=79.35\approx79$ 个．

（3）由频数分布表知 8 个“超标家庭”有 4 个不小于 24.5，有 4 个在[21.5，24.5）内，

则 X 的可能取值有 1，2，3，4，

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^4}{C_8^5}=\frac{1}{14}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_4^3}{C_8^5}=\frac{3}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_4^2}{C_8^5}=\frac{3}{7}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4C_4^1}{C_8^5}=\frac{1}{14}$，

则 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

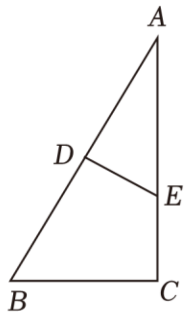
$E(X)=1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{3}{7}+4\times\frac{1}{14}=\frac{5}{2}$．

22．（12 分）如图（1）所示，在△ABC 中，$AB=4\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，∠$B=60°$，DE 垂直平分 AB．现将△ADE 沿 DE 折起，使得二面角 $A-DE-B$ 大小为 60°，得到如图（2）所示的空间几何体（折叠后点 A 记作点 P）

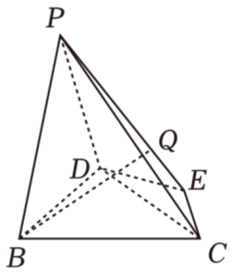
（1）求点 D 到面 PEC 的距离；

（2）求四棱锥 $P-BCED$ 外接球的体积；

（3）点 Q 为一动点，满足 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PE}$（$0<\lambda<1$），当直线 BQ 与平面 PEC 所成角最大时，试确定点 Q 的位置．



图(1)



图(2)

【答案】（1）$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$；

（2）$\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$；

（3）当 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{PE}$ 时，直线 BQ 与平面 PEC 所成最大．

【分析】（1）由已知可证得平面 PDB⊥平面 $BCDE$，取 BD 中点 O，连接 PO，OC，则有 OB，OC，OP 两两垂直，所以以 O 为坐标原点，OB，OC，OP 所在直线为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，然后利用空间向量求解．

（2）连接 BE，则四边形 $BCED$ 的外接圆圆心在 BE 的中点 O_1，△PBD 外接圆的圆心为 PO 的三等分点 O_2 过点圆心 O_1 O_2 分别作两面垂线，则垂线交点即为球心 M，连接 BM，求出其长度可得外接球的半径，从 而可求出外接球的体积．

（3）由 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PE}$（$0<\lambda<1$），表示出点 Q 的坐标，然后利用空间向量表示出直线 BQ 与平面 PEC 所成角的正弦值，求出其最大值可得答案．

【解答】解：（1）：由 $AB=4\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，得 $AC=6$，$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，$DC=BC$，

因为 DE 垂直平分 AB，所以 $DE\perp PD$，$DE\perp BD$，

所以∠PDB 为平面 PDE 与平面 $BCED$ 的二面角的平面角，

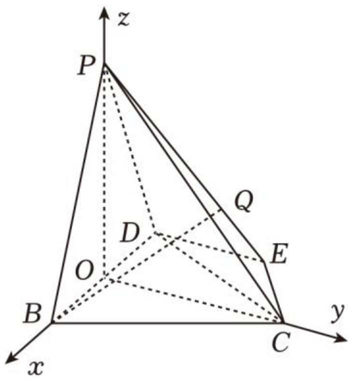
所以$\angle PDB=\dfrac{\pi}{3}$，$PD=BD$，所以$\triangle PDB$为等边三角形，

取BD中点O，连接PO，OC，所以$PO\perp BD$，$OC\perp BD$，因为$PD\cap BD=D$，PD，$BD\subset$平面PDB，

所以$DE\perp$平面PDB，因为$DE\subset$平面$BCDE$，所以平面$PDB\perp$平面$BCDE$，

因为$PO\perp BD$，$OC\perp BD$，所以$\angle POC$为二面角$P-BD-C$的平面角，

所以$PO\perp OC$，以O为坐标原点，OB，OC，OP所在直线为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



则B（$\sqrt{3}$，0，0），C（0，0，3），P（0，0，3），D（$-\sqrt{3}$，0，0），E（$-\sqrt{3}$，2，0），

所以$\overrightarrow{PC}=$（0，3，-3），$\overrightarrow{PE}=$（$-\sqrt{3}$，2，3），

设平面PEC的一个法向量为$\vec{n}=$（x，y，z），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3y-3z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=-\sqrt{3}x+2y-3z=0\end{cases}$，令$z=1$，则$\vec{n}=$（$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，1，1），

又$\overrightarrow{DP}=$（（$\sqrt{3}$，0，3），

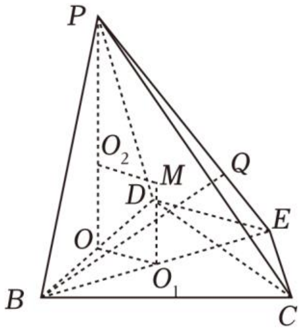
所以点D到面PEC的距离$d=\dfrac{|\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+3|}{\sqrt{1+1+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{7}{3}}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$；

（2）连接BE，由$BD\perp DE$，$BC\perp CE$，则四边形$BCED$的外接圆圆心在BE的中点O_1，

$\triangle PBD$为正三角形，则$\triangle PBD$外接圆的圆心为PO的三等分点O_2，

过点圆心O_1，O_2 分别作两面垂线，则垂线交点即为球心M，

如图所示，连接BM，则BM即球的半径．



在 Rt△*ADE* 中，$AD=2\sqrt{3}$，∠*DEE*＝30°，∠*ADE*＝90°，

则$DE=AD\tan30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$，

Rt△MO_1B 中，$MO_1=OO_2=\frac{1}{3}PO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=1$，

$BO_1=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}\sqrt{BD^2+DE^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=2$，

所以由勾股定理得$MB=\sqrt{MO_1^2+BO_1^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

则球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$；

（3）$Q(x_1, y_1, z_1)$，$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PE}(0<\lambda<1)$，得$(x_1, 3_1, z_1-3)=\lambda(-\sqrt{3}, 2, 3)$，

所以$\begin{cases}x_1=-\sqrt{3}\lambda\\ y_1=2\lambda\\ z_1=3-3\lambda\end{cases}$，得$Q(-\sqrt{3}, 2\lambda, 3-3\lambda)$，

所以$\overrightarrow{BQ}=(-\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}, 2\lambda, 3-3\lambda)$，

设直线 *BQ* 与平面 *PEC* 所成角为 θ，（$\theta\in[0, \frac{\pi}{2}]$），

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BQ}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BQ}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4}{\sqrt{\frac{7}{3}}\times\sqrt{(-\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})^2+(2\lambda)^2+(3-3\lambda)^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7\sqrt{4\lambda^2-3\lambda+3}}=\frac{2\sqrt{21}}{7\sqrt{4(\lambda-\frac{3}{8})^2+\frac{39}{16}}}$，

所以当 $\lambda=\frac{3}{8}$时，sinθ 取得最大值$\frac{8\sqrt{91}}{91}$，

此时直线 *BQ* 与平面 *PEC* 所成角最大，

即当$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{8}\overrightarrow{PE}$时，直线 *BQ* 与平面 *PEC* 所成角最大．