专题 9.2　乘法公式【十大题型】

【苏科版】

题型梳理

举一反三

【知识点　乘法公式】

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。这个公式叫做平方差公式。

完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们积的 2 倍。这两个公式叫做完全平方公式。

【题型 1　判断运用乘法公式计算的正误】

【例 1】（2023 春·贵州毕节·七年级统考期末）计算$(x-y+3)(x+y-3)$时，下列变形正确的是（　）

A．$[(x-y)+3][(x+y)-3]$　　B．$[(x+3)-y][(x-3)+y]$

C．$[x-(y+3)][x+(y-3)]$　　D．$[x-(y-3)][x+(y-3)]$

【变式 1-2】（2023 春·天津滨海新·七年级统考期末）在下列多项式的乘法中，不可以用平方差公式计算的是（　）

A．$(x+y)(x-y)$　　B．$(-x+y)(x+y)$

C．$(-x-y)(-x+y)$　　D．$(x-y)(-x+y)$

【变式 1-3】（2023 春·广东茂名·七年级统考期中）下列多项式不是完全平方式的是(　).

A．x^2-4x-4　　B．$\frac{1}{4}+m^2+m$　　C．$a^2+2ab+b^2$　　D．t^2+4t+4

【题型 2　利用完全平方式确定系数】

【例 2】（2023 春·江苏扬州·七年级统考期末）若将多项式 $4a^2-2a+1$ 加上一个单项式成为一个完全平方式，则这个单项式可以是__________．（只要写出符合条件的一个）

【变式 2-1】（2023 春·四川达州·七年级校考期中）若$x^2+2(m-3)x+1$ 是完全平方式，$x+n$与$x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，则n^m的值为__________．

【变式 2-2】(2023 春·七年级课时练习)若 $9x^2-(k-1)xy+25y^2$是关于x的完全平方式，则$k=$____________．

【变式 2-3】(2023 春·福建泉州·七年级晋江市季延中学校考期中)已知 B 是含字母 x 的单项式，要使$x^2+B+\frac{1}{4}$是完全平方式，那么$B=$______．

【题型 3　乘法公式的计算】

【例 3】（2023 春·云南昭通·七年级校考期末）计算：

(1)$(2m-n+3p)(2m+3p+n)$；

(2)化简求值：$(x-3)(x+3)-(x^2-2x+1)$，其中$x=\frac{1}{2}$.

【变式 3-1】（2023 春·山东东营·六年级统考期末）利用整式乘法公式计算．

(1)$100^2-98\times102$；

(2)$(a+b+3)(a+b-3)$；

(3)$(-2m+3)(-2m-3)$；

(4)$\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^2$.

【变式 3-2】（2023 春·湖南永州·七年级校联考期中）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)=$______．

【变式 3-3】（2023 春·江西抚州·七年级校联考期中）运用乘法公式计算：

(1)$(2m-3n)(-2m-3n)-(2m-3n)^2$

(2)$100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

【题型 4　利用乘法公式求值】

【例 4】(2023 春·山东济南·七年级统考期末)设 $a=x-2022$，$b=x-2024$，$c=x-2023$．若$a^2+b^2=16$，则c^2的值是(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【变式 4-1】（2023 春·广西贵港·七年级校考期末）若$x-y-7=0$，则代数式x^2-y^2-14y的值为______.

【变式 4-2】（2023 春·湖南永州·七年级校考期中）（1）已知$a+\frac{1}{a}=3$，求$a^2+\frac{1}{a^2}$的值；

（2）已知$(a-b)^2=9$，$ab=18$，求a^2+b^2的值.

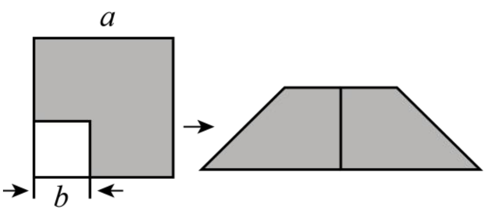
【变式 4-3】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）已知 m 满足$(3m-2015)^2+(2014-3m)^2=5$.

(1)求$(2015-3m)(2014-3m)$的值.

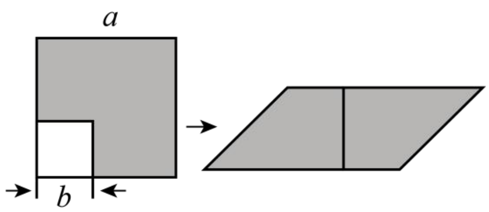
(2)求 $6m-4029$ 的值.

【题型 5　利用面积法验证乘法公式】

【例 5】（2023 春·七年级课时练习）如图，阴影部分是在边长为 a 的大正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形后所得到的图形，将阴影部分通过割、拼，形成新的图形．给出下列 2 种割拼方法，其中能够验证平方差公式的是（　）



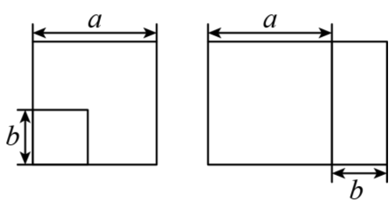
图①



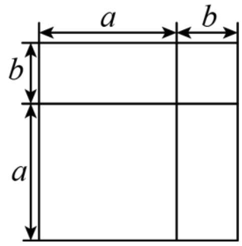
图②

A．①　　　　B．②　　　　C．①②　　　　D．①②都不能

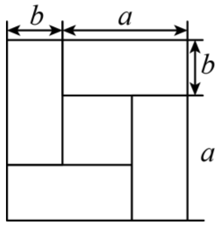
【变式 5-1】(2023 春·山东烟台·六年级统考期末)在下面的正方形分割方案中，可以验证$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$的图形是（　）



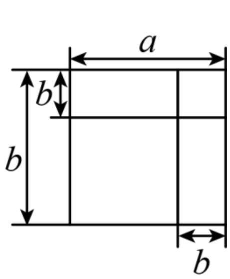
A．



B．

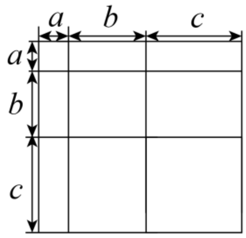


C．



D．

【变式 5-2】（2023 春·福建宁德·七年级校联考期中）下列等式不能用如图所示的方形网格验证的是（　）



A．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

B．$(a+b)(b+c)=ab+ac+b^2+bc$

C．$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

D．$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

【变式 5-3】（2023 春·江西抚州·七年级统考期末）（1）课本再现：如图 1，2 是“数形结合”的典型实例，应用“等积法”验证乘法公式．图 1 验证的是______，图 2 验证的是______；

（2）应用公式计算：

①已知$x+y=5$，$xy=-1$，求x^2+y^2的值；

②求$2022^2-2021\times2023$ 的值．

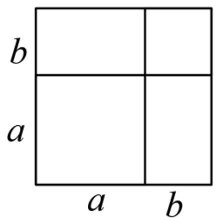


图1

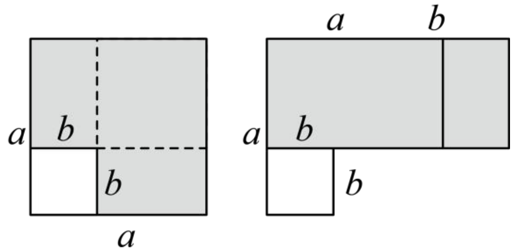
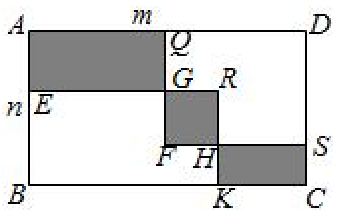


图2

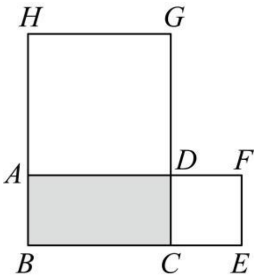
【题型 6　乘法公式的应用】

【例 6】（2023 春·浙江宁波·七年级校考期中）如图，为了美化校园，某校要在面积为 30 平方米长方形空地$ABCD$中划出长方形$EBKR$和长方形$QFSD$，若两者的重合部分$GFHR$恰好是一个边长为 3 米的正方形，现将图中阴影部分区域作为花圃，若长方形空地$ABCD$的长和宽分别为m和n，$m>n$，花圃区域$AEGQ$和$HKCS$总周长为 14 米，则 *m*-*n* 的值为（　）



A．4 米　　B．7 米　　C．5 米　　D．3.5 米

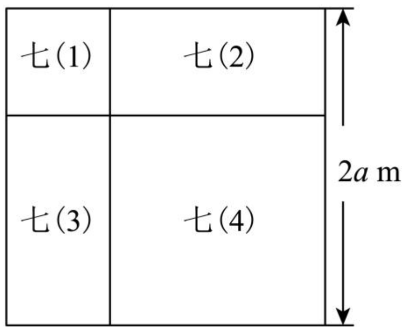
【变式 6-1】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）我们知道，将完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$适当的变形，可以解决很多数学问题．请你观察、思考，并解决以下问题：



(1)若$m+n=9$，$mn=10$，求m^2+n^2的值；

(2)如图，一农家乐准备在原有长方形用地（即长方形$ABCD$）上进行装修和扩建，先用长为 120m 的装饰性篱笆围起该长方形院子，再以AD、CD为边分别向外扩建正方形$ADGH$、正方形$DCEF$的空地，并在两块正方形空地上建造功能性花园，该功能性花园面积和为 2000m^2，求原有长方形用地$ABCD$的面积．

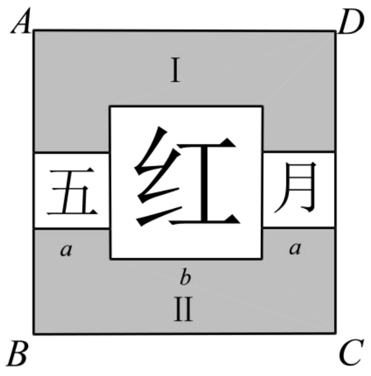
【变式 6-2】（2023 春·湖南邵阳·七年级统考期中）如图，某校一块边长为 $2a$m 的正方形空地是七年级四个班的清洁区，其中分给七年级（1）班的清洁区是一块边长为$(a-2b)$m 的正方形．$(0<2b<a)$



(1)分别求出七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积．

(2)七年级（4）班的清洁区的面积比七年级（1）班的清洁区的面积多多少？

【变式 6-3】（2023 春·浙江温州·七年级期中）学校为迎接艺术节，准备在一个正方形空地$ABCD$上搭建一个表演舞台，如图所示，正中间是“红五月”三个正方形平台．其中“五”字正方形和“月”字正方形边长均为 a 米，“红”字正方形边长为 b 米．I号区域布置造型背景，II号区域设置为乐队演奏席．



(1)用含 a，b 的代数式表示阴影部分的面积（即I和II面积之和）并化简；

(2)若阴影部分的面积（即I和II面积之和）为 288 平方米，且$a+b=20$ 米，求“红”字正方形边长 b 的值．

【题型 7 平方差公式的几何背景】

【例 7】（2023 春·安徽安庆·七年级统考期中）将边长为a的正方形的左上角剪掉一个边长为b的正方形(如图 1)，将剩下部分按照虚线分割成①和②两部分，将①和②两部分拼成一个长方形(如图 2)，解答下列问题：

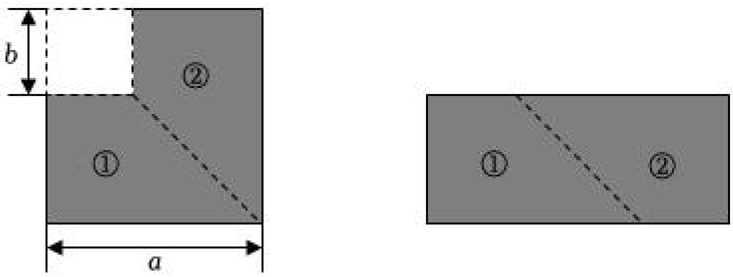


图1　　　　图2

(1)设图 1 中阴影部分的面积为S_1，图 2 中阴影部分的面积为S_2，请用含a，b的式子表示：$S_1=$______ ，$S_2=$______ ；(不必化简)

(2)由（1）中的结果可以验证的乘法公式是______ ；

(3)利用（2）中得到的公式，计算：$2023^2-2022\times2024$．

【变式 7-1】（2023 春·全国·七年级期末）如图 1 的两个长方形可以按不同的形式拼成图 2 和图 3 两个图形．

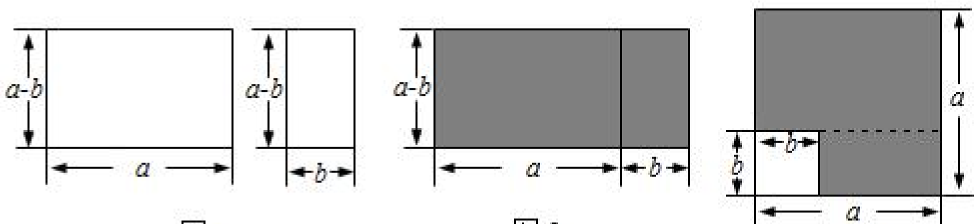


图 1　　图 2　　图 3

(1)在图 2 中的阴影部分的面积 S_1 可表示为_；（写成多项式乘法的形式）；在图 3 中的阴影部分的面积 S_2

可表示为_；（写成两数平方差的形式）；

(2)比较图 2 与图 3 的阴影部分面积，可以得到的等式是_；

A.（a＋b）^{2}＝a^2＋$2ab$＋b^2

B.（a＋b）（a－b）＝a^2－b^2

C.（a－b）^{2}＝a^2－$2ab$＋b^2

(3)请利用所得等式解决下面的问题：

①已知 $4m^2-n^2=12$，$2m+n=4$，则 $2m-n$＝_；

②计算（2＋1）（2^2＋1）（2^4＋1）（2^8＋1）×…×（2^{32}＋1）＋1 的值，并直接写出该值的个位数字是多少．

【变式 7-2】（2023 春·陕西咸阳·七年级咸阳市秦都中学校考阶段练习）【知识生成】

（1）我们已经知道，通过计算几何图形的面积可以表示一些代数恒等式，例如：从边长为a的正方形中剪掉一个边长为b的正方形如图 1，然后将剩余部分拼成一个长方形如图 2．图 1 中剩余部分的面积为______，图 2 的面积为______，请写出这个代数恒等式；

【知识应用】

(2)应用(1)中的公式，完成下面任务：若m是不为 0 的有理数，已知$P=(a+2m)(a-2m)$，$Q=(a+m)(a-m)$，比较P、Q大小；

【知识迁移】

（3）事实上，通过计算几何图形的体积也可以表示一些代数恒等式，图 3 表示的是一个边长为x的正方体挖去一个小长方体后重新拼成一个新长方体，请你根据图 3 中图形的变化关系，通过计算写出一个代数恒等式．

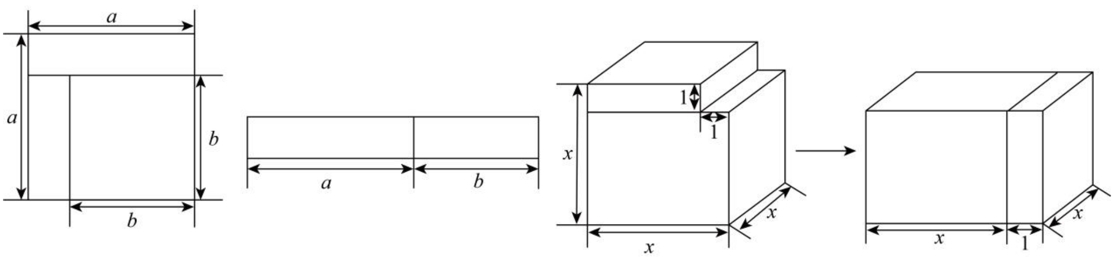
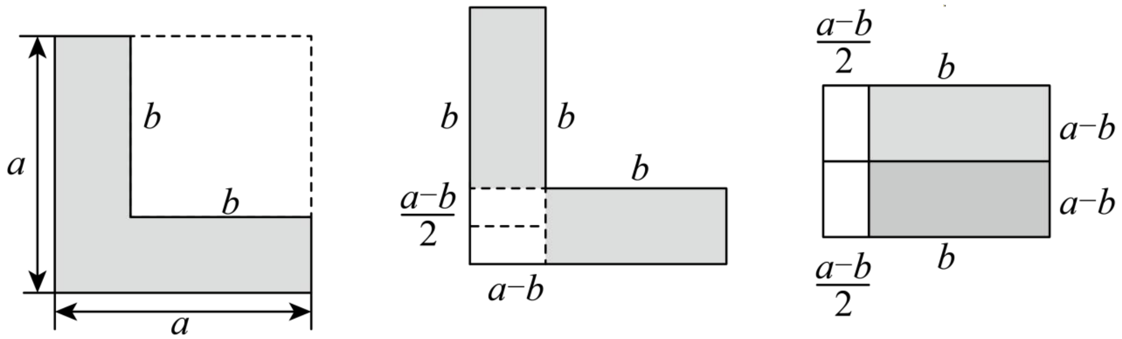


图1　　图2　　图3

【变式 7-3】（2023 春·山西大同·七年级统考期中）【实践操作】

（1）如图①，在边长为 a 的大正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形$(a>b)$，把图①中 L 形的纸片按图②剪拼，改造成了一个大长方形如图③，请求出图③中大长方形的面积；



图①　　　　图②　　　　图③

（2）请写出图①、图②、图③验证的乘法公式为：_.

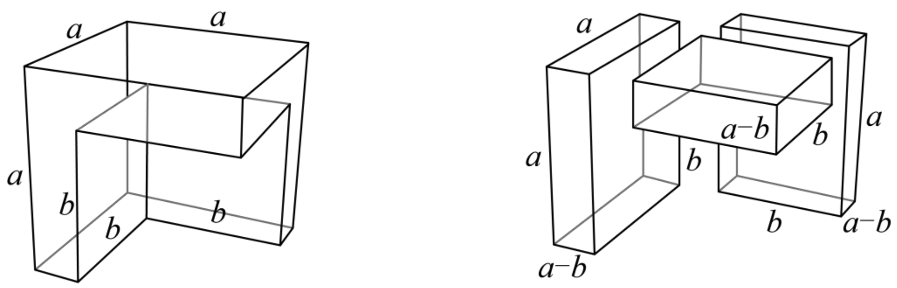
【应用探究】

（3）利用（2）中验证的公式简便计算：$499\times501+1$；

（4）计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2021^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2022^2}\right)$.

【知识迁移】

（5）类似地，我们还可以通过对立体图形进行变换得到代数恒等式如图④，将一个棱长为 a 的正方体中去掉一个棱长为 b 的正方体，再把剩余立体图形切割分成三部分如图⑤，利用立体图形的体积，可得恒等式为：$a^3-b^3=$_.（结果不需要化简）



图④　　　　图⑤

【题型 8　完全平方公式的几何背景】

【例 8】（2023 春·浙江温州·七年级校联考期中）图 1，是一个长为 $2m$，宽为 $2n$的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四块小长方形，然后按图 2 的形状拼成一个正方形.

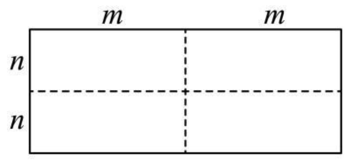


图1

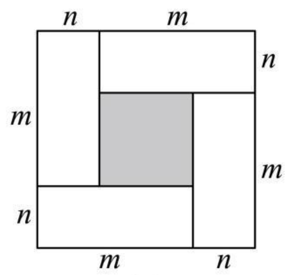


图2

(1)图 2 中的阴影部分的面积为 _；

(2)观察图 2，三个代数式$(m+n)^2$，$(m-n)^2$，mn之间的等量关系是 _；

(3)若$x+y=-6$，$xy=\frac{11}{4}$，则$x-y=$_；（直接写出答案）

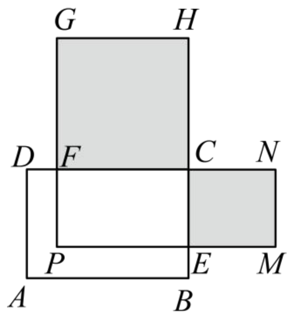
【变式 8-1】（2023 春·七年级课时练习）完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$适当的变形，可以解决很多的数学问题．

例如：若$a+b=3$，$ab=1$，求a^2+b^2的值．

解：因为$a+b=3$，所以$(a+b)^2=9$，即：$a^2+2ab+b^2=9$，

又因$ab=1$，所以$a^2+b^2=7$

根据上面的解题思路与方法，解决下列问题：



(1)若$x+y=8$，$x^2+y^2=40$，则xy的值为______；

(2)拓展：若$(4-x)x=3$，则$(4-x)^2+x^2=$______．

(3)应用：如图，在长方形$ABCD$中，$AB=20$，$BC=12$，点 E、F 是BC、CD上的点，且$BE=DF=x$，分别以FC、CE为边在长方形$ABCD$外侧作正方形$CFGH$和正方形$CEMN$，若长方形$CEPF$的面积为 160，求图中阴影部分的面积和．

【变式 8-2】（2023 春·江苏·七年级期中）【知识生成】通常情况下，通过用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式．如图 1，在边长为a的正方形中剪掉一个边长为b的小正方形$(a>b)$．把余下的部分沿虚线剪开拼成一个长方形（如图 2）．图 1 中阴影部分面积可表示为：a^2-b^2，图 2 中阴影部

分面积可表示为$(a+b)(a-b)$，因为两个图中的阴影部分面积是相同的，所以可得到等式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

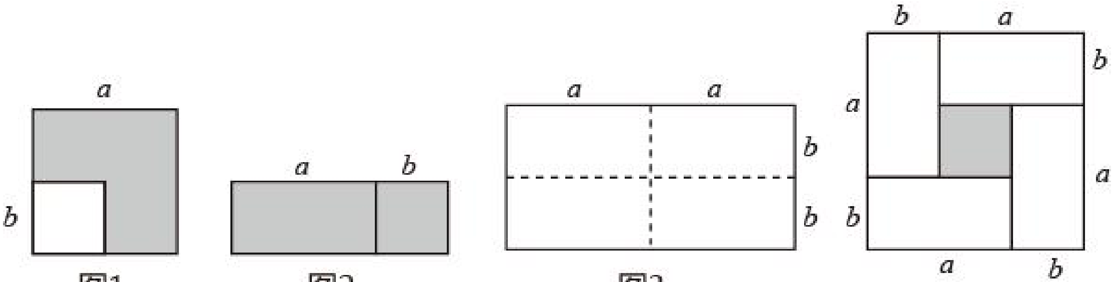


图1 图2 图3 图4

【拓展探究】图 3 是一个长为 $2a$，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四个小长方形，然后按图 4 的形状拼成一个正方形.

（1）用两种不同方法表示图 4 中阴影部分面积：

方法 1：_，方法 2：_；

（2）由(1)可得到一个关于（$a+b$）^{2}、（$a-b$）^{2}、ab 的的等量关系式是_；

（3）若 $a+b=10$，$ab=5$，则（$a-b$）$^2=$_；

【知识迁移】

（4）如图 5，将左边的几何体上下两部分剖开后正好可拼成如右图的一个长方体．根据不同方法表示它的体积也可写出一个代数恒等式：_.

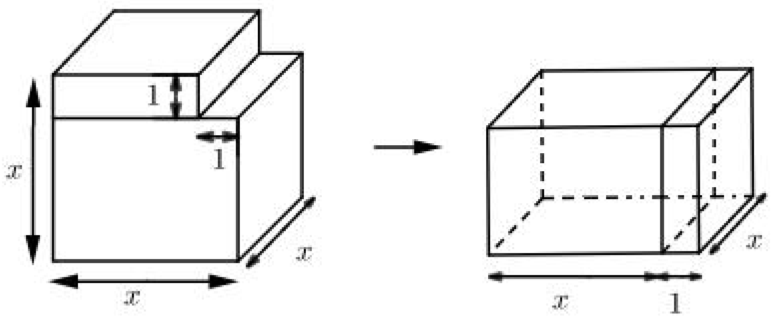


图5

【变式 8-3】（2023 春·江苏·七年级期中）【知识生成】用两种不同方法计算同一图形的面积，可以得到一个等式，如图 1，是用长为 a，宽为$b(a>b)$的四个相同的长方形拼成的一个大正方形，用两种不同的方法计算阴影部分（小正方形）的面积，可以得到$(a-b)^2$、$(a+b)^2$、ab三者之间的等量关系式：________；

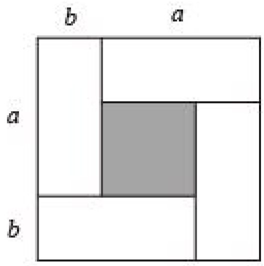


图1

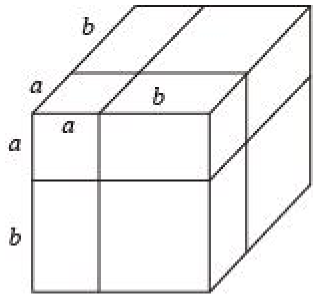


图2

【知识迁移】类似地，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，也可以得到一个等式，

如图 2，观察大正方体分割，可以得到等式：$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

利用上面所得的结论解答下列问题：

（1）已知$x+y=6,xy=\frac{11}{4}$，求$(x-y)^2$的值；

（2）已知$a+b=6,ab=7$，求a^3+b^3的值．

【题型 9　乘法公式中的新定义问题】

【例 9】（2023 春·河北石家庄·七年级统考期中）新定义：如果 a，b 都是非零整数，且$a=4b$，那么就称 a 是“4 倍数”.

验证：嘉嘉说：23^2-21^2是“4 倍数”，琪琪说：$12^2-6\times12+9$ 也是“4 倍数”，判断_________说得对（填“嘉嘉”、“琪琪”或“嘉嘉、琪琪”）.

【变式 9-1】（2023 春·浙江金华·七年级统考期末）定义：两个自然数的平方和加上这两个自然数乘积的两倍即可得到一个新的自然数，我们把这个新的自然数称为“完全数”，例如：$2^2+3^2+2\times2\times3=25$，其中“25”就是一个“完全数”，则任取两个自然数可得到小于 200 且不重复的“完全数”的个数有（　　）

A．14 个　　B．15 个　　C．26 个　　D．60 个

【变式 9-2】（2023 春·广东揭阳·七年级校联考期中）现定义一种运算“⊕”，对任意有理数 m，n 规定：$m\oplus n=mn(m-n)$，如：$1\oplus2=1\times2(1-2)=-2$，则$(a+b)\oplus(a-b)$的值是___________.

【变式 9-3】（2023 春·江苏徐州·七年级统考期中）对于任意有理数a、b、c、d，定义一种新运算：$\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=a^2+b^2-cd$.

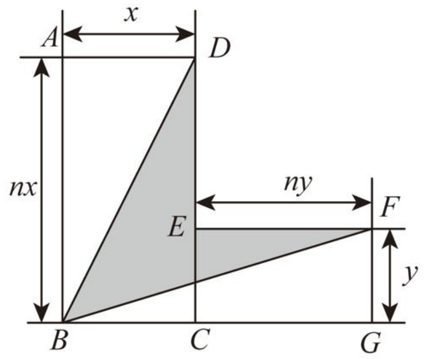
(1)$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=$______；

(2)对于有理数x、y，若$\begin{bmatrix}x & k\\ y & xy\end{bmatrix}$是一个完全平方式，则$k$______；

(3)对于有理数x、y，若$x+y=10$，$xy=22$.

①求$\begin{bmatrix} 2x-y & 3x-y \\ y & x-y \end{bmatrix}$的值；

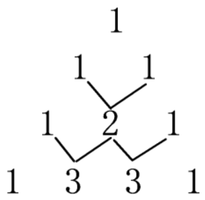
②将长方形$ABCD$和长方形$CEFG$按照如图方式进行放置，其中点B、C、G在同一条直线上，点E在边CD上，连接BD、BF．若$AD=x$，$AB=nx$，$FG=y$，$EF=ny$，图中阴影部分的面积为45，求n的值．



【题型 10 乘法公式的规律探究】

【例 10】（2023·上海·七年级假期作业）杨辉是我国南宋时著名的数学家，他发现了著名的三角系数表，它的其中一个作用是指导按规律写出形如$(a+b)^n$（其中n为正整数）展开式的系数，请你仔细观察下表中的规律，填出$(a+b)^4$展开式中所缺的系数．

$=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$



$(a+b)^1=a+b$　　　　$(a-b)^1=a-b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　　　$(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$=$a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　　　$(a-b)^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$

(1)仔细观察上边的图和下边的式子，写出$(a-b)^3$=__________；

(2)直接在横线上填数字：

$(a+b)^4=a^4$+__________a^3b+__________a^2b^2+__________ab^3+__________b^4；

(3)请根据你找到的规律写出下列式子的结果：

$(x-y)^5=$__________；

$(2x-y)^5=$__________．

【变式 10-1】（2023·安徽合肥·统考模拟预测）观察下列等式：第 1 个等式：$1\times2+1=2^2-1$；第 2 个等

式：$2\times3+2=3^2-1$；第 3 个等式：$3\times4+3=4^2-1$；第 4 个等式：$4\times5+4=5^2-1$；...按照以上规律，解决下列问题：

(1)写出第 5 个等式：______；

(2)写出你猜想的第n个等式（用含n的等式表示，$n\geq1$，且n为整数），并加以证明．

【变式 10-2】（2023 春·安徽合肥·七年级中国科技大学附属中学校考期中）观察下列等式：

①$\frac{3^2-1^2}{4}=1+1$；②$\frac{4^2-2^2}{4}=1+2$；③$\frac{5^2-3^2}{4}=1+3$；④$\frac{6^2-4^2}{4}=1+4$；⑤$\frac{7^2-5^2}{4}=1+5$……

(1)请按以上规律写出第⑥个等式______；

(2)猜想并写出第n个等式______；并证明猜想的正确性

【变式 10-3】（2023 春·全国·七年级专题练习）仔细观察下列等式：

第 1 个：$5^2-1^2=8\times3$

第 2 个：$9^2-5^2=8\times7$

第 3 个：$13^2-9^2=8\times11$

第 4 个：$17^2-13^2=8\times15$

…

（1）请你写出第 6 个等式：________；

（2）请写出第 n 个等式，并加以验证；

（3）运用上述规律，计算：$8\times7+8\times11+\ldots+8\times399+8\times403$．