



专题 9.7 整式乘法与因式分解章末八大题型总结（培优篇）

【苏科版】

► 题型梳理

【题型 1 整式的乘除中的错解问题】	1
【题型 2 整式乘除的计算与化简】	2
【题型 3 整式混合运算的应用】	2
【题型 4 因式分解（提公因式与公式法综合）】	4
【题型 5 因式分解（十字相乘法）】	4
【题型 6 因式分解（分组分解法）】	5
【题型 7 利用因式分解求值】	5
【题型 8 整式的乘除中的阅读理解类问题】	6

► 举一反三

【题型 1 整式的乘除中的错解问题】

【例 1】（2023 春·山东菏泽·七年级统考期末）某同学计算一个多项式乘 $-3x^2$ 时，因抄错符号，算成了加上 $-3x^2$ ，得到的答案是 $x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ ，那么正确的计算结果是_____.

【变式 1-1】（2023 秋·湖北孝感·七年级统考期末）小林同学把 $9(M-5)$ 错抄为 $9M-5$ ，抄错后算得的答案为 a ，则正确答案为_____.

【变式 1-2】（2023 秋·重庆渝中·七年级重庆巴蜀中学校考开学考试）在计算 $(x+a)(x+b)$ 时，甲把 b 错看成了 6，得到结果是： $x^2 + 8x + 12$ ；乙把 a 错看成 $-a$ ，得到结果是： $x^2 + x - 6$.

(1) 求出 a, b 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，计算 $(x+a)(x-b)$ 的结果.

【变式 1-3】（2023 春·湖南永州·七年级统考期末）甲、乙两人共同计算一道整式： $(x+a)(2x+b)$ ，由于甲抄错了 a 的符号，得到的结果是 $2x^2 - 7x + 3$ ，乙漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果是 $x^2 + 2x - 3$.

(1) 求 $(-2a+b)(a+b)$ 的值；

(2) 若整式中的 a 的符号不抄错，且 $a=3$ ，请计算这道题的正确结果.



【题型 2 整式乘除的计算与化简】

【例 2】(2023 秋·上海金山·八年级校联考期末)已知: $a + b = \frac{3}{2}$, $ab = 1$, 化简 $(a - 2)(b - 2)$ 的结果是_____.

【变式 2-1】(2023 春·陕西西安·八年级校考期中)已知 m 满足 $(3m - 2015)^2 + (2014 - 3m)^2 = 5$.

(1)求 $(2015 - 3m)(2014 - 3m)$ 的值.

(2)求 $6m - 4029$ 的值.

【变式 2-2】(2023 春·辽宁沈阳·八年级校考期中) (1)运用乘法公式计算: $999^2 - 1002 \times 998 + 1$

(2)先化简,再求值: $[(2x + y)(2x - y) - (3x + y)(x - 2y) - x^2] \div \left(-\frac{1}{2}y\right)$, 其中 $x = -1$, $y = 2$.

【变式 2-3】(2023 春·福建三明·八年级统考期中)为了比较两个数的大小,我们可以求这两个数的差,若差为 0,则两数相等;若差为正数,则被减数大于减数.若 $M = (a + 3)(a - 4)$, $N = (a + 2)(2a - 5)$, 其中 a 为有理数,

(1)求 $M - N$, 要求化简为关于 a 的多项式;

(2)比较 M , N 的大小.

【题型 3 整式混合运算的应用】

【例 3】(2023 秋·重庆大渡口·八年级重庆市第三十七中学校校联考开学考试)阅读材料:

材料 1: 将一个三位数或三位以上的整数分成左中右三个数,如果满足: 中间数=左边数的平方+右边数的平方,那么我们称该整数是平方和数,比如,对于整数 251, 它的中间数是 5, 左边数是 2, 右边数是 1, 因为 $2^2 + 1^2 = 5$, 所以 251 是平方和数;再比如,对于整数 3254, 因为 $3^2 + 4^2 = 25$, 所以 3254 是一个平方和数.显然, 152, 4253 这两个数也肯定是平方和数.

材料 2: 将一个三位数或者三位以上的整数分成左中右三个数,如果满足: 中间数=2×左边数×右边数,那么我们称该整数是双倍积数;比如:对于整数 163, 它的中间数是 6, 左边数是 1, 右边数是 3, 因为 $2 \times 1 \times 3 = 6$, 所以 163 是双倍积数;再比如,对于整数 3305, 因为 $2 \times 3 \times 5 = 30$, 所以 3305 是一个双倍积数,显然, 361, 5303 这两个数也肯定是双倍积数.

请根据上述定义完成下面问题:

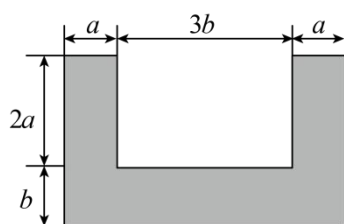
(1)如果一个三位整数既是平方和数,又是双倍积数,则该三位整数是_____. (直接写出结果)

(2)如果我们用字母 a 表示一个整数分出来的左边数,用字母 b 表示一个整数分出来的右边数,则 $\overline{a585b}$ 为一个平方和数, $\overline{a504b}$ 为一个双倍积数,求 $a^2 - b^2$ 的值.

【变式 3-1】(2023 秋·贵州遵义·八年级校考期中)如图,学校操场主席台前计划修建一块凹字形花坛.(单



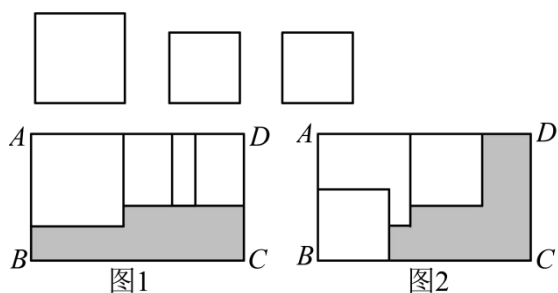
位：米)



(1)用含 a, b 的整式表示花坛的面积;

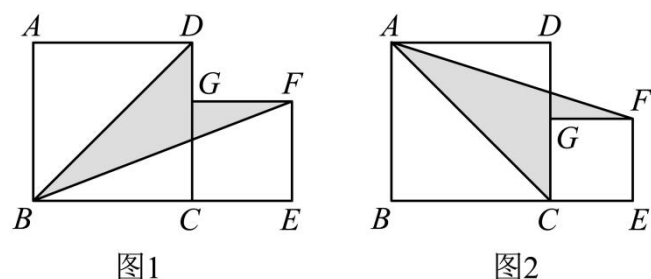
(2)若 $a = 2, b = 1$, 工程费为 500 元/平方米, 求建花坛的总工程费为多少元?

【变式 3-2】(2023 春·贵州铜仁·八年级统考期中) 在矩形 $ABCD$ 内, 将一张边长为 a 的正方形纸片和两张边长为 b 的正方形纸片 ($a > b$), 按图 1, 图 2 两种方式放置 (两个图中均有重叠部分), 矩形中未被这三张正方形纸片覆盖的部分用阴影表示, 设图 1 中阴影部分的面积为 S_1 , 图 2 中阴影部分的面积为 S_2 , 当 $AD - AB = 2$ 时, $S_1 - S_2$ 的值是 ()



- A. $2a$ B. $2b$ C. $-2b + b^2$ D. $2a - 2b$

【变式 3-3】(2023 秋·浙江·八年级期中) 正方形 $ABCD$ 中, 点 G 是边 CD 上一点 (不与点 C, D 重合), 以 CG 为边在正方形 $ABCD$ 外作正方形 $CEFG$, 且 B, C, E 三点在同一条直线上, 设正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a 和 b ($a > b$).



(1)求图 1 中阴影部分的面积 S_1 (用含 a, b 的代数式表示);

(2)当 $a = 5, b = 3$ 时, 求图 1 中阴影部分的面积 S_1 的值;

(3)当 $a = 5, b = 3$ 时, 请直接写出图 2 中阴影部分的面积 S_2 的值.



【题型 4 因式分解（提公因式与公式法综合）】

【例 4】（2023 春·山东菏泽·八年级统考期末）分解因式

(1) $20a^3 - 30a^2$

(2) $25(x+y)^2 - 9(x-y)^2$

【变式 4-1】（2023 秋·湖北孝感·八年级统考期末）分解因式： $3a^2(m-n) + 12(n-m) =$ _____.

【变式 4-2】（2023 秋·重庆渝中·八年级重庆巴蜀中学校考开学考试）多项式 $-2a^3 - 4a^2 - 2a$ 因式分解的结果是_____.

【变式 4-3】（2023 春·湖南永州·八年级统考期末）请把下列各式分解因式

(1) $a^2(a-b) + (b-a)$

(2) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$

【题型 5 因式分解（十字相乘法）】

【例 5】（2023 春·湖南益阳·八年级校考期中）阅读下面的材料，解答提出的问题：

已知：二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 有一个因式是 $(x+3)$ ，求另一个因式及 m 的值.

解：设另一个因式为 $(x+n)$ ，由题意，得

$$x^2 - 4x + m = (x+3)(x+n),$$

$$x^2 - 4x + m = x^2 + (n+3)x + 3n,$$

$$\text{所以} \begin{cases} n+3=-4 \\ m=3n \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=-21 \\ n=-7 \end{cases}.$$

所以另一个因式为 $(x-7)$ ， m 的值为 -21 .

提出问题：

(1) 已知二次三项式 $x^2 - 5x - p$ 有一个因式是 $(x-1)$ ，另一个因式是_____；

(2) 已知二次三项式 $3x^2 + 2x - k$ 有一个因式是 $(x-5)$ ，求另一个因式及 k 的值.

【变式 5-1】（2023 春·湖南邵阳·八年级统考期末）多项式 $x^2 + x - 6$ 可因式分解成 $(x+a)(x+b)$ ，其中 a, b 均为整数，则 $(a+b)^{2023}$ 的值为（ ）

A. -1

B. 1

C. -2023

D. 2023

【变式 5-2】（2023 秋·上海静安·八年级上海市风华初级中学校考期中）分解因式： $(2x^2 + 4x)^2 - 4(2x^2 + 4x) - 12$.

【变式 5-3】（2023 春·湖南怀化·八年级统考期末）材料 1：由多项式乘法， $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ，将该式子从右到左地使用，即可对形如 $x^2 + (a+b)x + ab$ 的多项式进行因式分解： $x^2 + (a+b)x + ab =$



$(x+a)(x+b)$. 多项式 $x^2 + (a+b)x + ab$ 的特征是二次项系数为 1, 常数项为两数之积, 一次项系数为这两数之和.

材料 2: 因式分解: $(x+y)^2 + 2(x+y) + 1$, 解: 将“ $x+y$ ”看成一个整体, 令 $x+y=A$, 则原式 $= A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$, 再将“ A ”还原得: 原式 $= (x+y+1)^2$.

上述解题用到整体思想, 整体思想是数学解题中常见的一种思想方法. 请你解答下列问题:

(1) 根据材料 1 将 $x^2 + 4x + 3$ 因式分解;

(2) 根据材料 2 将 $(x-y)^2 - 10(x-y) + 25$ 因式分解;

(3) 结合材料 1 和材料 2, 将 $(m^2 - 2m)(m^2 - 2m + 4) + 3$ 因式分解.

【题型 6 因式分解 (分组分解法)】

【例 6】(2023 秋·山东日照·八年级统考期末) 已知 $a+b=3, ab=1$, 则多项式 $a^2b + ab^2 - a - b$ 的值为_____.

【变式 6-1】(2023 春·江苏·八年级期中) 分解因式: $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 =$ _____.

【变式 6-2】(2023 春·福建漳州·八年级校考期中) 阅读理解:

当一个多项式没有公因式又不能用公式法时, 这里再介绍一种因式分解方法, 叫分组分解法.

比如因式分解: $am + bm + an + bn = (am + bm) + (an + bn) = m(a+b) + n(a+b) = (a+b)(m+n)$

这种分组法是分组后用提公因式法分解;

比如因式分解: $a^2 + 2ab + b^2 - 9 = (a^2 + 2ab + b^2) - 9 = (a+b)^2 - 9 = (a+b+3)(a+b-3)$

这种分组法是分组后用公式法分解.

根据以上信息分解因式:

(1) $ab - a - b + 1$;

(2) $a^2 - 9b^2 - 2a + 6b$;

(3) $n^2 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+6)$.

【变式 6-3】(2023 秋·上海·八年级校考期中) 因式分解: $x^2 + 9xy + 18y^2 - 3x - 9y$.

【题型 7 利用因式分解求值】

【例 7】(2023 春·四川达州·八年级校联考期中) 若 $a = 2022x + 2023, b = 2022x + 2024, c = 2022x + 2025$, 则多项式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【变式 7-1】(2023 春·重庆沙坪坝·八年级重庆南开中学校考期中) 若 $x^2 + x - 3 = 0$, 则 $x^3 + 2x^2 - 2x + 5$



的值为_____.

【变式 7-2】（2023 春·浙江杭州·八年级杭州市文晖中学校考期中）（1）当 $mn = -4$, $m + n = 3$, 求 $m - n$ 的值.

（2）已知 $x + y = 2$, $xy = \frac{3}{4}$, 求 $x^3y + xy^3 + 2x^2y^2$ 的值.

【变式 7-3】（2023 春·江苏泰州·八年级泰州市第二中学附属初中校考期中）阅读材料：若 $m^2 + 2mn + 2n^2 - 6n + 9 = 0$, 求 m 和 n 的值.

解：∵ $m^2 + 2mn + 2n^2 - 6n + 9 = 0$,

∴ $m^2 + 2mn + n^2 + n^2 - 6n + 9 = 0$,

∴ $(m + n)^2 + (n - 3)^2 = 0$,

∴ $m + n = 0$, $n - 3 = 0$,

∴ $m = -3$, $n = 3$.

像这样将代数式进行恒等变形, 使代数式中出现完全平方式的方法叫做“配方法”. 请利用配方法, 解决下列问题:

(1) 已知 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 8y + 16 = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $A = 2a^2 - 3a - 1$, $B = a^2 - a - 4$, 试比较 A 与 B 的大小: $A \underline{\hspace{2cm}} B$ (填“>”或“<”);

(3) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 都是正整数, 且满足 $a^2 + b^2 - 6a - 2b + 10 = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【题型 8 整式的乘除中的阅读理解类问题】

【例 8】（2023 春·湖南益阳·七年级校考期中）若 x 满足 $(60 - x)(x - 40) = 20$, 求 $(60 - x)^2 + (x - 40)^2$ 的值.

解：设 $60 - x = a$, $x - 40 = b$,

则 $ab = 20$, $a + b = 60 - x + x - 40 = 20$.

∴ $(60 - x)^2 + (x - 40)^2$

$= a^2 + b^2$

$= (a + b)^2 - 2ab$

$= 20^2 - 2 \times 20$

$= 360$.

(1) 若 x 满足 $(70 - x)(x - 20) = -30$, 求 $(70 - x)^2 + (x - 20)^2$ 的值.



(2)若 x 满足 $(3-4x)(2x-5) = \frac{9}{2}$, 求 $(3-4x)^2 + 4(2x-5)^2$ 的值. 友情提示 (2) 中的 $4(2x-5)^2$ 可通过逆用积的乘方公式变成 $[2(2x-5)]^2$.

(3)若 x 满足 $(2023-x)^2 + (2020-x)^2 = 2061$, 求 $(2023-x)(2020-x)$ 的值.

【变式 8-1】(2023 春·湖南邵阳·七年级统考期末) 阅读材料: 杨辉三角, 又称贾宪三角, 是二项式系数在三角形中的一种几何排列, 西方人帕斯卡发现时, 已比宋代杨辉要迟 393 年. 如图, 根据你观察的杨辉三角的排列规律, 完成下列问题.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 1 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a+b)^1 = 1a + 1b \\
 (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
 \end{array}$$

(1)判断 $(a+b)^5$ 的展开式共有 _____ 项; 写出 $(a+b)^6$ 的第三项的系数是 _____;

(2)计算与猜想:

①计算: $2^5 - 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 - 10 \times 2^2 + 5 \times 2 - 1$

②猜想: $(2x-1)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数是 _____.

(3)运用: 若今天是星期五, 过 7 天仍是星期五, 那么再过 8^6 天是星期 _____.

【变式 8-2】(2023 秋·上海静安·七年级上海市风华初级中学学校考期中) 我们已经学习过多项式除以单项式, 多项式除以多项式一般可用竖式计算, 步骤如下:

①把被除式、除式按某个字母作降幂排列, 并把所缺的项用零补齐;

②用被除式的第一项除以除式第一项, 得到商式的第一项;

③用商式的第一项去乘除式, 把积写在被除式下面 (同类项对齐), 消去相等项;

④把减得的差当作新的被除式, 再按照上面的方法继续演算, 直到余式为零或余式的次数低于除式的次数时为止, 被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 余式. 若余式为零, 说明这个多项式能被另一个多项式整除.

例如: 计算 $(6x^4 - 7x^3 - x^2 - 1) \div (2x + 1)$, 可用竖式除法如图:

所以 $6x^4 - 7x^3 - x^2 - 1$ 除以 $2x + 1$, 商式为 $3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, 余式为 0.

根据阅读材料, 请回答下列问题:



$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\
 2x + 1 \overline{) 6x^4 - 7x^3 - x^2 + 0 \cdot x - 1} \\
 \underline{6x^4 + 3x^3} \\
 -10x^3 - x^2 \\
 \underline{-10x^3 - 5x^2} \\
 4x^2 + 0 \cdot x \\
 \underline{4x^2 + 2x} \\
 -2x - 1 \\
 \underline{-2x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

(1) $(x^2 + 2x - 3) \div (x - 1) =$ _____;

(2) 计算: $(x^3 - x^2 - 4) \div (x - 2)$;

(3) $x^3 + ax^2 + bx - 2$ 能被 $x^2 + 2x + 2$ 整除, 求 a 、 b 的值.

【变式 8-3】(2023 春·湖南怀化·七年级统考期末) 阅读下列材料, 解决相应问题:

“友好数对”

已知两个两位数, 将它们各自的十位数字和个位数字交换位置后, 得到两个与原两个两位数均不同的新数, 若这两个两位数的乘积与交换位置后两个新两位数的乘积相等, 则称这样的两个两位数为“友好数对”. 例如 $43 \times 68 = 34 \times 86 = 2924$, 所以 43 和 68 与 34 和 86 都是“友好数对”.

(1) 36 和 84 _____ “友好数对”. (填“是”或“不是”)

(2) 为探究“友好数对”的本质, 可设“友好数对”中一个数的十位数字为 a , 个位数字为 b , 且 $a \neq b$; 另一个数的十位数字为 c , 个位数字为 d , 且 $c \neq d$, 则 a, b, c, d 之间存在一个等量关系, 其探究和说理过程如下, 请你将其补充完整.

解: 根据题意, “友好数对”中的两个数分别表示为 $10a + b$ 和 $10c + d$, 将它们各自的十位数字和个位数字交换位置后两个数依次表示为 _____ 和 _____.

因为它们是友好数对, 所以 $(10a + b)(10c + d) =$ _____.

即 a, b, c, d 的等量关系为: _____.

(3) 请从下面 A、B 两题中任选一题作答, 我选择 _____ 题.

A. 请再写出一对“友好数对”, 与本题已给的“友好数对”不同.

B. 若有一个两位数, 十位数字为 $x + 2$, 个位数字为 x , 另一个两位数, 十位数字为 $x + 2$, 个位数字为 $x + 8$, 且这两个数为“友好数对”, 直接写出这两个两位数.