



专题 7.17 平面图形的认识（二）章末十五大题型总结（培优篇）

【苏科版】

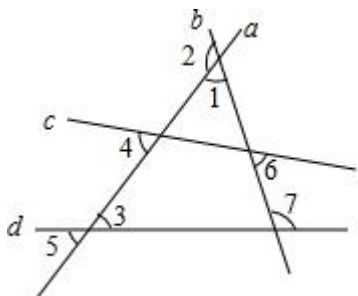
► 题型梳理

【题型 1 对顶角、邻补角的运用】	1
【题型 2 同位角、内错角、同旁内角的识别】	3
【题型 3 添加条件判定平行】	8
【题型 4 由平行线的性质求角度】	11
【题型 5 由平行线的判定与性质判断多结论问题】	15
【题型 6 在平行线中添加推理依据进行证明】	20
【题型 7 利用平行线的判定及性质求角度】	25
【题型 8 利用平行线的判定及性质进行证明】	32
【题型 9 确定第三边的取值范围】	37
【题型 10 三角形的三边关系的应用】	39
【题型 11 利用三角形的中线求长度】	41
【题型 12 三角形的高与面积有关的计算】	44
【题型 13 三角形的稳定性】	50
【题型 14 三角形中的角平分线、中线、高有关的综合计算】	52
【题型 15 三角形的内角和与外角有关的计算】	56

► 举一反三

【题型 1 对顶角、邻补角的运用】

【例 1】（2023 下·天津蓟州·七年级统考期中）如图，下列说法正确的是（ ）



- A. $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互为内错角 B. $\angle 2$ 的同位角只有 $\angle 4$
- C. $\angle 6$ 和 $\angle 7$ 互补 D. $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 互为邻补角

【答案】D

【分析】根据同位角、同旁内角、内错角和邻补角的概念解答即可。

【详解】A、 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互不是内错角，故此选项错误；



润禾托管

B、 $\angle 2$ 的同位角不是只有 $\angle 4$ ，还有几个，如 $\angle 5$ 也是，故此选项错误；

C、 $\angle 6$ 和 $\angle 7$ 不一定互补，只有 $c \parallel d$ 才互补，故此选项错误；

D、 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 互为邻补角，故此选项正确；

故选：D.

【点睛】此题考查同位角、同旁内角、内错角和邻补角，解题的关键是能够根据同位角、同旁内角、内错角和邻补角的概念解答.

【变式 1-1】（2023 下·浙江·七年级统考期末）数学课上老师用双手表示了“三线八角”图形，如图所示（两大拇指代表被截直线，食指代表截线）. 从左至右依次表示（ ）



A. 同旁内角、同位角、内错角

B. 同位角、内错角、同旁内角

C. 内错角、同旁内角、同位角

D. 内错角、同位角、同旁内角

【答案】D

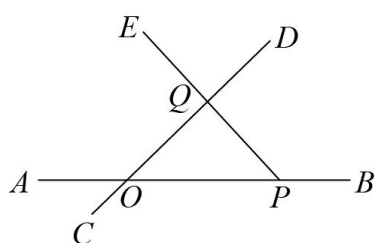
【分析】两条线 a 、 b 被第三条直线 c 所截，在截线的同旁，被截两直线的同一方，把这种位置关系的角称为同位角；两个角分别在截线的异侧，且夹在两条被截线之间，具有这样位置关系的一对角互为内错角；两个角都在截线的同一侧，且在两条被截线之间，具有这样位置关系的一对角互为同旁内角. 据此作答即可.

【详解】解：根据同位角、内错角、同旁内角的概念，可知
第一个图是内错角，第二个图是同位角，第三个图是同旁内角.

故选：D.

【点睛】本题考查了同位角、内错角、同旁内角，解题的关键是掌握同位角、内错角、同旁内角，并能区别它们.

【变式 1-2】（2023 上·福建泉州·七年级统考期末）如图所示，图中同旁内角的数量共有（ ）



A. 3 对

B. 4 对

C. 5 对

D. 6 对



【答案】C

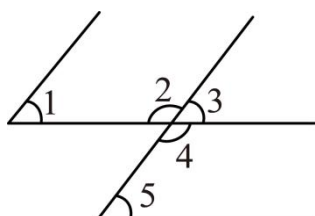
【分析】根据同旁内角的定义解答即可.

【详解】解：直线 AB 、 CD 被射线 PE 所截，可以得到两对同旁内角， $\angle DQP$ 与 $\angle BPQ$ ， $\angle QPO$ 与 $\angle PQO$ ；
直线 AB 、射线 PE 被直线 CD 所截，可以得到两对同旁内角， $\angle EQC$ 与 $\angle AOD$ ， $\angle QOP$ 与 $\angle PQO$ ；
直线 CD 、射线 PE 被直线 AB 所截，可以得到一对同旁内角， $\angle QOP$ 与 $\angle QPO$ ；
因此共有 5 对同旁内角，
故选：C.

【点睛】本题考查同旁内角的定义，同旁内角就是在截线的同一旁，在两条被截线之间的两个角.

【变式 1-3】（2023 下·山东济宁·七年级统考期末）如图，下列说法正确的是（ ）

① $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是同位角；② $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是同位角；③ $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角；④ $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是内错角



A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ②④

【答案】C

【分析】根据同位角，内错角及同旁内角的定义进行判断即可.

【详解】解：两条直线 a ， b 被第三条直线 c 所截，在截线 c 的同旁，且在被截两直线 a ， b 的同一侧的角，我们把这样的两个角称为同位角，则 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是同位角， $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 不是同位角，那么①正确，②错误；

两条直线 a ， b 被第三条直线 c 所截，在截线 c 的同旁，且在被截两直线 a ， b 之间的角，我们把这样的两个角称为同旁内角，则 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角，那么③正确；

两条直线 a ， b 被第三条直线 c 所截，在截线 c 的两侧，且在被截两直线 a ， b 之间的角，我们把这样的两个角称为内错角，则 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 不是内错角，那么④错误；

综上，正确的为①③，

故选：C.

【点睛】本题考查同位角，内错角及同旁内角的定义，熟练掌握相关定义是解题的关键.

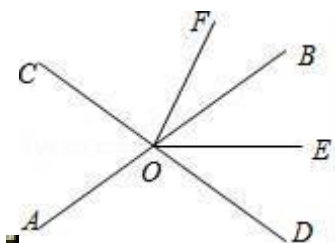
【题型 2 同位角、内错角、同旁内角的识别】

【例 2】（2023 下·山东济宁·七年级统考期末）如图，直线 AB 、 CD 相交于点 O ， OE 平分 $\angle BOD$ ， OF 平分



$\angle COE$.

- (1) 若 $\angle AOC=76^\circ$ ，求 $\angle BOF$ 的度数；
- (2) 若 $\angle BOF=36^\circ$ ，求 $\angle AOC$ 的度数；
- (3) 若 $|\angle AOC - \angle BOF|=\alpha^\circ$ ，请直接写出 $\angle AOC$ 和 $\angle BOF$ 的度数. (用含的代数式表示)



【答案】(1) $\angle BOF=33^\circ$; (2) $\angle AOC=72^\circ$; (3) $\angle AOC=2x=(\frac{360}{7})^\circ - \frac{4}{7}\alpha^\circ$, $\angle BOF=(\frac{360}{7})^\circ + \frac{3}{7}\alpha^\circ$.

【详解】试题分析：

(1) 由 $\angle AOC=76^\circ$ 易得 $\angle BOD=76^\circ$ ，结合 OE 平分 $\angle BOD$ 可得 $\angle DOE=\angle BOE=38^\circ$ ，由此可得 $\angle COE=180^\circ-38^\circ=142^\circ$ ，结合 OF 平分 $\angle COE$ 可得 $\angle EOF=71^\circ$ ，最后由 $\angle BOF=\angle EOF-\angle BOE$ 即可求得 $\angle BOF$ 的度数；

(2) 设 $\angle BOE=x$ ，由 OE 平分 $\angle BOD$ ， $\angle AOC=\angle BOD$ 可得 $\angle DOE=\angle BOE=x$ ， $\angle AOC=2x$ ，结合 $\angle BOF=36^\circ$ ，OF 平分 $\angle COE$ 可得 $\angle COF=\angle EOF=x+36^\circ$ ，最后由 $\angle AOC+\angle COF+\angle BOF=180^\circ$ 即可列出关于 x 的方程，解方程求得 x 的值即可求得 $\angle AOC$ 的度数；

(3) 设 $\angle BOE=x$ ，则由已知条件易得 $\angle AOC=2x$ ， $\angle BOF=90^\circ-\frac{3}{2}x$ ，这样结合 $|\angle AOC - \angle BOF|=\alpha^\circ$ 即可列出关于 x 的方程，解方程求得 x 的值即可求得 $\angle AOC$ 和 $\angle BOF$ 的值.

试题解析：

$$(1) \because \angle BOD=\angle AOC=76^\circ,$$

又 $\because$ OE 平分 $\angle BOD$,

$$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 76^\circ=38^\circ.$$

$$\therefore \angle COE=180^\circ - \angle DOE=180^\circ - 38^\circ=142^\circ,$$

$\because$ OF 平分 $\angle COE$,

$$\therefore \angle EOF=\frac{1}{2}\angle COE=\frac{1}{2}\times 142^\circ=71^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF=\angle EOF - \angle BOE=71^\circ - 38^\circ=33^\circ.$$

(2) $\because$ OE 平分 $\angle BOD$, OF 平分 $\angle COE$,



$$\therefore \angle BOE = \angle EOD, \angle COF = \angle FOE,$$

$$\therefore \text{设 } \angle BOE = x, \text{ 则 } \angle DOE = x,$$

$$\text{故 } \angle COA = 2x, \angle EOF = \angle COF = x + 36^\circ,$$

$$\text{则 } \angle AOC + \angle COF + \angle BOF = 2x + x + 36^\circ + 36^\circ = 180^\circ,$$

$$\text{解得: } x = 36^\circ,$$

$$\text{故 } \angle AOC = 72^\circ.$$

$$(3) \text{ 设 } \angle BOE = x,$$

$$\because OE \text{ 平分 } \angle BOD, \angle BOD = \angle AOC,$$

$$\therefore \angle DOE = x, \angle COA = 2x,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 2x,$$

$$\therefore \angle COE = 180^\circ - x,$$

$$\because OF \text{ 平分 } \angle COE,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle BOF = 90^\circ - \frac{3}{2}x,$$

$$\because |\angle AOC - \angle BOF| = \alpha^\circ,$$

$$\therefore |2x - (90^\circ - \frac{3}{2}x)| = \alpha^\circ,$$

$$\text{解得: } x = (\frac{180}{7})^\circ + \frac{2}{7}\alpha^\circ \text{ 或 } x = (\frac{180}{7})^\circ - \frac{2}{7}\alpha^\circ,$$

$$\text{当 } x = (\frac{180}{7})^\circ + \frac{2}{7}\alpha^\circ \text{ 时,}$$

$$\angle AOC = 2x = (\frac{360}{7})^\circ + \frac{4}{7}\alpha^\circ,$$

$$\angle BOF = 90^\circ - \frac{3}{2}x = (\frac{360}{7})^\circ - \frac{3}{7}\alpha^\circ;$$

$$\text{当 } x = (\frac{180}{7})^\circ - \frac{2}{7}\alpha^\circ \text{ 时,}$$

$$\angle AOC = 2x = (\frac{360}{7})^\circ - \frac{4}{7}\alpha^\circ,$$

$$\angle BOF = 90^\circ - \frac{3}{2}x = (\frac{360}{7})^\circ + \frac{3}{7}\alpha^\circ.$$

【变式 2-1】(2023 下·上海虹口·七年级上外附中校考期末)若 $\angle 1$ 的对顶角是 $\angle 2$, $\angle 2$ 的邻补角是 $\angle 3$, $\angle 3$ 的余角是 $\angle 4$, 若 $\angle 4 = 55^\circ$, 则 $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】145

【分析】根据余角、邻补角、对顶角的性质进行求解，即可得到答案.

【详解】解： $\because \angle 3$ 的余角是 $\angle 4$ ， $\angle 4 = 55^\circ$ ，

$$\therefore \angle 3 = 90^\circ - \angle 4 = 35^\circ,$$

$\because \angle 2$ 的邻补角是 $\angle 3$ ，

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 145^\circ,$$

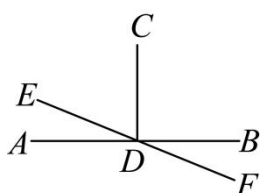
$\because \angle 1$ 的对顶角是 $\angle 2$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 145^\circ,$$

故答案为：145.

【点睛】本意考查了余角、邻补角、对顶角，熟练掌握相关性质是解题关键.

【变式 2-2】(2023 上·吉林长春·七年级吉林省第二实验学校校考期末)如图，直线 AB 、 EF 相交于点 D ， $\angle ADC = 90^\circ$. 若 $\angle ADE$ 与 $\angle ADC$ 的度数之比为 1:3，则 $\angle CDF$ 的度数是_____°.



【答案】120

【分析】根据题意求得 $\angle ADE = 30^\circ$ ，进而根据对顶角相等得出 $\angle BDF = \angle ADE = 30^\circ$ ，根据 $\angle CDF = \angle BDC + \angle BDF$ 即可求解.

【详解】 $\because \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle ADE$ 与 $\angle ADC$ 的度数之比为 1:3，

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ \times \frac{1}{3} = 30^\circ,$$

$\because$ 直线 AB 、 EF 相交于点 D ，

$$\therefore \angle BDF = \angle ADE = 30^\circ,$$

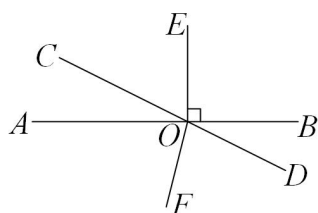
$$\because \angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle BDC + \angle BDF = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

故答案为：120.

【点睛】本题考查了对顶角相等，几何图形中角度的计算，数形结合是解题的关键.

【变式 2-3】(2023 上·江苏盐城·七年级统考期末)已知直线 AB 和 CD 交于点 O ， $\angle AOC = \alpha$ ， $\angle BOE = 90^\circ$ ， OF 平分 $\angle AOD$.



(1) 当 $\alpha=30^\circ$ 时, 则 $\angle EOC=$ _____°; $\angle FOD=$ _____°.

(2) 当 $\alpha=60^\circ$ 时, 射线 OE' 从 OE 开始以 $12^\circ/\text{秒}$ 的速度绕点 O 逆时针转动, 同时射线 OF' 从 OF 开始以 $8^\circ/\text{秒}$ 的速度绕点 O 顺时针转动, 当射线 OE' 转动一周时射线 OF' 也停止转动, 求经过多少秒射线 OE' 与射线 OF' 第一次重合?

(3) 在(2)的条件下, 射线 OE' 在转动一周的过程中, 当 $\angle E'OF'=90^\circ$ 时, 请直接写出射线 OE' 转动的时间为_____秒.

【答案】 (1) 60, 75; (2) $\frac{15}{2}$ 秒; (3) 3 或 12 或 21 或 30

【分析】 (1) 根据题意利用互余和互补的定义可得: $\angle EOC$ 与 $\angle FOD$ 的度数.

(2) 由题意先根据 $\alpha=60^\circ$, 得出 $\angle EOF=150^\circ$, 则射线 OE' 、 OF' 第一次重合时, 其 OE' 运动的度数+ OF' 运动的度数=150, 列式解出即可;

(3) 根据题意分两种情况在直线 OE 的左边和右边, 进而根据其夹角列4个方程可得时间.

【详解】 解: (1) $\because \angle BOE=90^\circ$,

$$\therefore \angle AOE=90^\circ,$$

$$\because \angle AOC=\alpha=30^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC=90^\circ-30^\circ=60^\circ,$$

$$\angle AOD=180^\circ-30^\circ=150^\circ,$$

$$\because OF \text{ 平分 } \angle AOD,$$

$$\therefore \angle FOD=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times 150^\circ=75^\circ;$$

故答案为: 60, 75;

$$(2) \text{ 当 } \alpha=60^\circ, \angle EOF=90^\circ+60^\circ=150^\circ.$$

设当射线 OE' 与射线 OF' 重合时至少需要 t 秒,

$$\text{可得 } 12t+8t=150, \text{ 解得: } t=\frac{15}{2};$$

答: 当射线 OE' 与射线 OF' 重合时至少需要 $\frac{15}{2}$ 秒;



润禾托管

(3) 设射线 OE 转动的时间为 t 秒,

由题意得: $12t + 8t = 150 - 90$ 或 $12t + 8t = 150 + 90$ 或 $8t + 12t = 360 + 150 - 90$ 或 $12t + 8t = 360 + 150 + 90$,

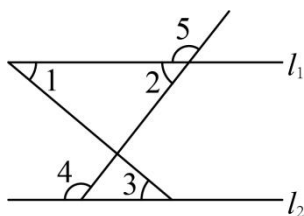
解得: $t = 3$ 或 12 或 21 或 30 .

答: 射线 OE 转动的时间为 3 或 12 或 21 或 30 秒.

【点睛】本题考查对顶角相等, 邻补角互补的定义, 角平分线的定义, 角的计算, 第三问有难度, 熟记相关性质是解题的关键, 注意要分情况讨论.

【题型3 添加条件判定平行】

【例3】(2023下·湖北孝感·七年级统考期中) 如图, 下列条件中, 不能判断直线 $l_1 \parallel l_2$ 的是 ()



A. $\angle 1 = \angle 3$

B. $\angle 2 = \angle 3$

C. $\angle 4 = \angle 5$

D. $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

【答案】B

【分析】直接利用平行线的判定方法分别分析得出答案.

【详解】解: A、 $\because \angle 1 = \angle 3$, 根据内错角相等, 两直线平行可得 $l_1 \parallel l_2$, 故该选项不符合题意;

B、根据 $\angle 2 = \angle 3$, 不能判断直线 $l_1 \parallel l_2$, 故该选项符合题意

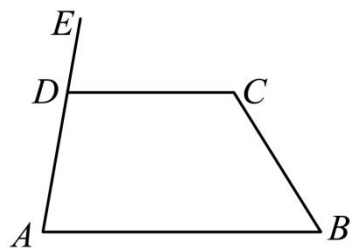
C、 $\because \angle 4 = \angle 5$, 根据同位角相等, 两直线平行可得 $l_1 \parallel l_2$, 故该选项不符合题意;

D、 $\because \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$, 根据同旁内角互补, 两直线平行可得 $l_1 \parallel l_2$, 故该选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定, 正确把握平行线的判定方法是解题关键.

【变式3-1】(2023下·黑龙江双鸭山·七年级统考期末) 如图, A, D, E 三点在同一条直线上, 在不添加辅助线的情况下, 请你添加一个条件_____, 使 $AB \parallel CD$ (填一个即可).





【答案】 $\angle EDC = \angle A$ (答案不唯一)

【分析】根据平行线的判定定理即可得到答案.

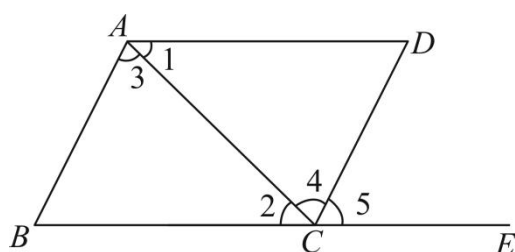
【详解】解: 根据平行线的判定定理可得:

$\angle EDC = \angle A$; $\angle A + \angle ADC = 180^\circ$; $\angle B + \angle DCB = 180^\circ$ 都可判断 $AB \parallel CD$,

故答案为: $\angle EDA = \angle A$ (答案不唯一)

【点睛】本题考查了平行线的判定, 熟练掌握平行线的判定定理是解题的关键.

【变式 3-2】(2023 下·湖南益阳·七年级统考期末) 如图, 下列条件中: ① $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$; ② $\angle 1 = \angle 2$; ③ $\angle 3 = \angle 4$; ④ $\angle B = \angle 5$; ⑤ $\angle D = \angle 5$, 则一定能判定 $AB \parallel CD$ 的条件有_____ (填写所有正确的序号).



【答案】①③④

【分析】根据平行线的判定定理逐项分析判断.

【详解】解: ①若 $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$, 根据同旁内角互补, 两直线平行可得 $AB \parallel CD$, 符合题意;

②若 $\angle 1 = \angle 2$, 根据内错角相等, 两直线平行可得 $AD \parallel BC$, 不合题意;

③若 $\angle 3 = \angle 4$, 根据内错角相等, 两直线平行可得 $AB \parallel CD$, 符合题意;

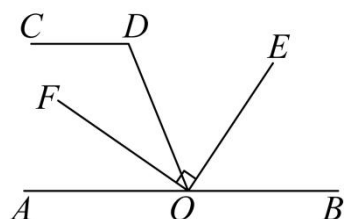
④若 $\angle B = \angle 5$, 根据同位角相等, 两直线平行可得 $AB \parallel CD$, 符合题意;

⑤若 $\angle D = \angle 5$, 根据内错角相等, 两直线平行可得 $AD \parallel BC$, 不合题意;

故答案为①③④.

【点睛】本题考查平行线的判定, 熟练掌握两直线平行的判定方法是解题关键.

【变式 3-3】(2023 下·山东烟台·六年级统考期末) 如图, O 是直线 AB 上一点, OE 平分 $\angle BOD$, $OF \perp OE$, $\angle D = 120^\circ$, 添加一个条件, 仍不能判定 $AB \parallel CD$, 添加的条件可能是 ()



A. $\angle BOE = 60^\circ$

B. $\angle DOF = 30^\circ$



C. $\angle AOF = 30^\circ$

D. $\angle BOE + \angle AOF = 90^\circ$

【答案】D

【分析】根据平行线的判定定理逐项进行判断即可.

【详解】解：A、 $\because OE$ 平分 $\angle BOD$, $\angle BOE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BOE = 120^\circ$$

$$\therefore \angle D = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = \angle D = 120^\circ$$

$\therefore AB \parallel CD$, 故 A 不符合题意;

B、 $\because OF \perp OE$,

$$\therefore \angle FOE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DOF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DOE = \angle FOE - \angle DOF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$\therefore OE$ 平分 $\angle BOD$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle DOE = 120^\circ$$

$$\therefore \angle D = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = \angle D = 120^\circ$$

$\therefore AB \parallel CD$, 故 B 不符合题意;

C、 $\because OF \perp OE$,

$$\therefore \angle FOE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AOF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle BOE = 180^\circ - \angle AOF - \angle FOE = 60^\circ$$

$\therefore OE$ 平分 $\angle BOD$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BOE = 120^\circ$$

$$\therefore \angle D = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = \angle D = 120^\circ$$

$\therefore AB \parallel CD$, 故 C 不符合题意;

D、 $\because \angle BOE + \angle AOF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FOE = 90^\circ$$



润禾托管

不能判断 $AB \parallel CD$ ，故D符合题意，

故选：D.

【点睛】本题考查了平行线的判定，角平分线的性质，熟练掌握平行线的判定和性质是解答本题的关键.

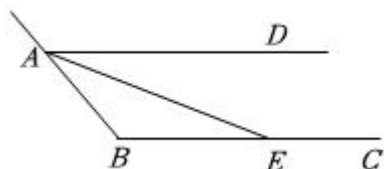
【题型4 由平行线的性质求角度】

【例4】（2023下·云南昆明·七年级统考期末）已知，在同一平面内， $\angle ABC = 110^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E ，那么 $\angle AEB$ 度数为_____.

【答案】 35° 或 55°

【分析】画出相应的简图，再利用平行线的性质及角平分线的定义进行求解即可.

【详解】解：①如图，



$\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 110^\circ$ ，

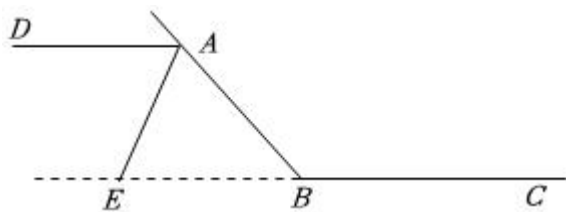
$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle DAE = \angle AEB$ ，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAD = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = 35^\circ$ ；

②如图，



$\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 110^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle ABC = 110^\circ$ ， $\angle DAE = \angle AEB$ ，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAD = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = 55^\circ$.

综上所述， $\angle AEB$ 的度数为： 35° 或 55° .

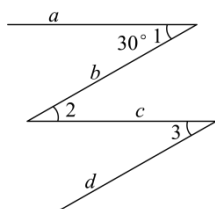


润禾托管

故答案为： 35° 或 55° 。

【点睛】此题考查了平行线的性质，解题的关键是熟记平行线的性质并灵活运用。

【变式 4-1】（2023 下·北京朝阳·七年级校考期末）如图， $a \parallel c, b \parallel d$ ， $\angle 1 = 30^\circ$ ，求 $\angle 3$ 的度数。



【答案】 30°

【分析】根据两直线平行内错角相等，解答即可。

【详解】解： $\because a \parallel c$ ， $\angle 1 = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 30^\circ,$$

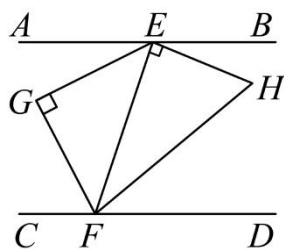
又 $\because b \parallel d$ ，

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 30^\circ,$$

$\therefore \angle 3$ 的度数为 30° 。

【点睛】本题考查平行线的性质，解题的关键是对以上知识的熟练掌握。

【变式 4-2】（2023 下·广东深圳·七年级统考期末）如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle G = \angle FEH = 90^\circ$ ， $\angle GEF = 45^\circ$ ， $\angle H = 60^\circ$ ，若 $\angle AEG = 26^\circ$ ，则 $\angle DFH =$ _____。



【答案】 41°

【分析】由平角关系可求得 $\angle BEH$ ，过点 H 作 $HM \parallel AB$ ，则 $AB \parallel CD \parallel HM$ ，由平行线的性质即可求得结果。

【详解】解： $\because \angle AEG + \angle GEF + \angle FEH + \angle BEH = 180^\circ$ ， $\angle GEF = 45^\circ$ ， $\angle AEG = 26^\circ$ ，

$$\therefore \angle BEH = 180^\circ - (\angle AEG + \angle GEF + \angle FEH) = 19^\circ,$$

过点 H 作 $HM \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel HM$ ，

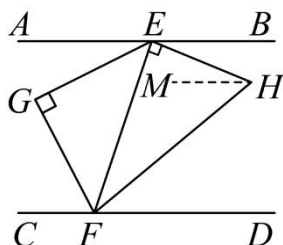


$$\therefore \angle EHM = \angle BEH = 19^\circ, \angle DFH = \angle MHF,$$

$$\because \angle MHF = \angle EHF - \angle EHM = 60^\circ - 19^\circ = 41^\circ,$$

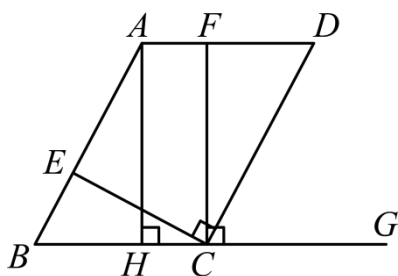
$$\therefore \angle DFH = 41^\circ;$$

故答案为: 41° .



【点睛】本题考查了平行线的性质，平角等知识，掌握平行线的性质是解题的关键.

【变式 4-3】(2023 下·贵州黔南·七年级统考期末)如图,已知 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle DCE = 90^\circ$, 点 E 在线段 AB 上, $\angle FCG = 90^\circ$, 点 F 在直线 AD 上, $\angle AHG = 90^\circ$.



(1)图中与 $\angle D$ 相等的角有_____;

(2)若 $\angle ECF = 25^\circ$, 求 $\angle BCD$ 的度数;

(3)在 (2) 的条件下, 点 C (点 C 不与 B, H 两点重合) 从点 B 出发, 沿射线 BG 的方向运动, 其他条件不变, 求 $\angle BAF$ 的度数.

【答案】(1) $\angle DCG$, $\angle ECF$, $\angle B$

(2) 155°

(3) 25° 或 155°

【分析】(1) 根据同角的余角相等以及平行线的性质, 即可得到与 $\angle D$ 相等的角;

(2) 根据 $\angle ECF = 25^\circ$, $\angle DCE = 90^\circ$, 可得 $\angle FCD = 65^\circ$, 再根据 $\angle BCF = 90^\circ$, 即可得到 $\angle BCD = 65^\circ + 90^\circ = 155^\circ$;

(3) 分两种情况讨论: 当点 C 在线段 BH 上; 点 C 在 BH 延长线上, 根据平行线的性质, 即可得到 $\angle BAF$ 的度



数为 25° 或 155° .

【详解】(1) 解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle D = \angle DCG,$$

$$\because \angle FCG = 90^\circ, \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle DCG,$$

$$\therefore \angle D = \angle ECF,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DCG = \angle B,$$

$$\therefore \angle D = \angle B;$$

$\therefore$ 与 $\angle D$ 相等的角为 $\angle DCG, \angle ECF, \angle B$;

(2) 解: $\because \angle ECF = 25^\circ, \angle DCE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FCD = 65^\circ,$$

$$\because \angle BCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 65^\circ + 90^\circ = 155^\circ;$$

(3) 解: 分两种情况进行讨论:

① 如图 a, 当点 C 在线段 BH 上时, 点 F 在 DA 的延长线上, 此时 $\angle ECF = \angle DCG = \angle B = 25^\circ$,

$$\because AD \parallel BC,$$

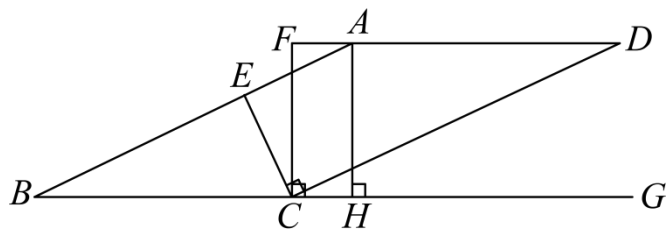
$$\therefore \angle BAF = \angle B = 25^\circ;$$

② 如图 b, 当点 C 在 BH 的延长线上时, 点 F 在线段 AD 上.

$$\because \angle B = 25^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAF = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ,$$

综上所述, $\angle BAF$ 的度数为 25° 或 155° .



图a



$\because \angle FGA$ 的余角比 $\angle DGH$ 大 16° ,

$$\therefore 90^\circ - \angle FGA - \angle DGH = 16^\circ,$$

$$\because \angle FGA = \angle DGH,$$

$$\therefore 90^\circ - 2\angle FGA = 16^\circ,$$

$$\therefore \angle FGA = \angle DGH = 37^\circ, \text{ 故 ③ 错误;}$$

$$\text{设 } \angle AGM = \alpha, \angle MGK = \beta,$$

$$\therefore \angle AGK = \alpha + \beta,$$

$$\because GK \text{ 平分 } \angle AGC,$$

$$\therefore \angle CGK = \angle AGK = \alpha + \beta,$$

$$\because GM \text{ 平分 } \angle FGC,$$

$$\therefore \angle FGM = \angle CGM,$$

$$\therefore \angle FGA + \angle AGM = \angle MGK + \angle CGK,$$

$$\therefore 37^\circ + \alpha = \beta + \alpha + \beta,$$

$$\therefore \beta = 18.5^\circ,$$

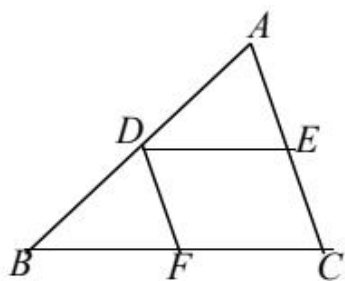
$$\therefore \angle MGK = 18.5^\circ, \text{ 故 ④ 错误,}$$

综上, ①②正确, 共 2 个,

故选: B.

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质, 角平分线的定义, 对顶角相等, 正确的识别图形是解题的关键.

【变式 5-1】(2023 下·四川南充·七年级统考期末) 如图, 在三角形 ABC 中, 点 D, E, F 分别在 AB, AC, BC 上, $DE \parallel BC$, $\angle C = \angle EDF$, 则下列结论错误的是 ()



A. $\angle ADE = \angle B$

B. $DF \parallel AC$

C. $\angle BFD = \angle AED$

D. $\angle B + \angle CED = 180^\circ$

【答案】D

【分析】结合已知条件, 利用平行线的性质定理和判定定理逐项判断即可得出答案.

【详解】解: $\because DE \parallel BC$,



润禾托管

$\therefore \angle ADE = \angle B$ ，故 A 选项结论正确，不合题意；

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EDF + \angle DFC = 180^\circ$ ，

又 $\because \angle C = \angle EDF$ ，

$\therefore \angle C + \angle DFC = 180^\circ$ ，

$\therefore DF \parallel AC$ ，故 B 选项结论正确，不合题意；

$\therefore \angle BFD = \angle C$ ，

又 $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AED = \angle C$ ， $\angle C + \angle CED = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BFD = \angle AED$ ，故 C 选项结论正确，不合题意；

$\because \angle C + \angle CED = 180^\circ$ ， $\angle C$ 不一定等于 $\angle B$ ，

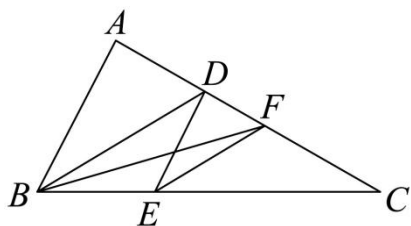
$\therefore$ 现有条件无法推出 $\angle B + \angle CED = 180^\circ$ ，故 D 选项结论不正确，符合题意；

故选 D.

【点睛】本题考查平行线的性质与判定，熟练运用平行线的性质定理和判定定理是解题的关键.

【变式 5-2】(2023 下·江苏扬州·七年级校考阶段练习) 如图，BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \parallel AB$ ，EF 是 $\triangle DEC$ 的角平分线，有下列四个结论：① $\angle BDE = \angle DBE$ ；② $EF \parallel BD$ ；③ $\angle CDE = \angle ABC$ ；

④ $S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ABF}$. 其中，正确的是 ()



A. ①②

B. ①②③

C. ②③④

D. ①②④

【答案】D

【分析】利用 $DE \parallel AB$ ，BD 平分 $\angle ABC$ ，EF 平分 $\angle DEC$ ，可以判断出①②正确；再根据 $\angle A$ 与 $\angle ABC$ 不一定相等，再利用 $\angle A$ 与 $\angle CDE$ 相等，可判断出③不一定正确；根据 $EF \parallel BD$ ，推出 $\triangle BDF$ 与 $\triangle BDE$ 是等底等高的三角形，最后利用等式性质可得到④正确.

【详解】 $\because DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle BDE$ ， $\angle ABC = \angle DEC$ ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, EF 平分 $\angle DEC$,

$\therefore \angle ABD = \angle DBE$, $\angle DEF = \angle FEC$,

$\therefore \angle BDE = \angle DBE$,

$\angle FEC = \angle DBC$,

$\therefore EF \parallel BD$,

故①②正确;

$\therefore \angle A$ 与 $\angle ABC$ 不一定相等,

由题意可知 $\angle A = \angle CDE$,

$\therefore \angle CDE$ 与 $\angle ABC$ 不一定相等,

故③错误;

$\because EF \parallel BD$,

$\therefore \triangle BDF$ 与 $\triangle BDE$ 是等底等高的三角形,

$\therefore S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDE}$,

$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ABF}$,

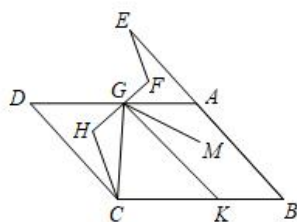
故④正确,

$\therefore$ ①②④正确.

故选: D.

【点睛】此题考查了角平分线的定义, 平行线的判定及性质, 平行线间的距离处处相等等相关内容, 熟练掌握平行线的判定与性质是解题关键.

【变式 5-3】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期中) 如图, E 在线段 BA 的延长线上, $\angle EAD = \angle D$, $\angle B = \angle D$, $EF \parallel HC$, 连 FH 交 AD 于 G , $\angle FGA$ 的余角比 $\angle DGH$ 大 16° , K 为线段 BC 上一点, 连 CG , 使 $\angle CKG = \angle CGK$, 在 $\angle AGK$ 内部有射线 GM , GM 平分 $\angle FGC$. 则下列结论: ① $AD \parallel BC$; ② GK 平分 $\angle AGC$; ③ $GK \parallel CD$; ④ $\angle MGK = 16^\circ$. 其中正确结论的个数有 ()





A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】C

【分析】根据平行线的判定定理得到 $AD \parallel BC$ ，故①正确；由平行线的性质得到 $\angle AGK = \angle CKG$ ，等量代换得到 $\angle AGK = \angle CGK$ ，求得 GK 平分 $\angle AGC$ ；故②正确；根据平行线同旁内角互补得 $\angle D + \angle DCG + \angle GCK = 180^\circ$ ，再根据题目已知 $\angle CKG = \angle CGK$ ，得 $\angle D + \angle DCG = 2\angle GKC$ ，又根据 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle D + \angle DCG = 2\angle AGK$ ，但根据现有条件无法证明 $GD = GC$ ，故③错误；设 $\angle AGM = \alpha$ ， $\angle MGK = \beta$ ，得到 $\angle AGK = \alpha + \beta$ ，根据角平分线的性质即可得到结论。

【详解】解： $\because \angle EAD = \angle D$ ， $\angle B = \angle D$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle B$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，故①正确；

$\therefore \angle AGK = \angle CKG$ ，

$\because \angle CKG = \angle CGK$ ，

$\therefore \angle AGK = \angle CGK$ ，

$\therefore GK$ 平分 $\angle AGC$ ；故②正确；

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle D + \angle DCG + \angle GCK = 180^\circ$ ，

$\because \angle CKG = \angle CGK$ ，

$\therefore \angle D + \angle DCG + 180^\circ - 2\angle GKC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle D + \angle DCG = 2\angle GKC$ ，

又 $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AGK = \angle CKG$ ，

$\therefore \angle D + \angle DCG = 2\angle AGK$ ，

要使 $GK \parallel CD$ ，就要使 $\angle D = \angle AGK$ 且 $\angle D = \angle DCG$ ，

$\therefore$ 就要 $GD = GC$ ，

但题目没给出这个条件且利用现有条件也无法证明 $GD = GC$ ，

$\therefore$ 故③错误；

设 $\angle AGM = \alpha$ ， $\angle MGK = \beta$ ，

$\therefore \angle AGK = \alpha + \beta$ ，



$\because GK$ 平分 $\angle AGC$,

$\therefore \angle CGK = \angle AGK = \alpha + \beta$,

$\because GM$ 平分 $\angle FGC$,

$\therefore \angle FGM = \angle CGM$,

$\therefore \angle FGA + \angle AGM = \angle MGK + \angle CGK$,

$\therefore 37^\circ + \alpha = \beta + \alpha + \beta$,

$\therefore \beta = 18.5^\circ$,

$\therefore \angle MGK = 18.5^\circ$, 故④错误,

故选: C.

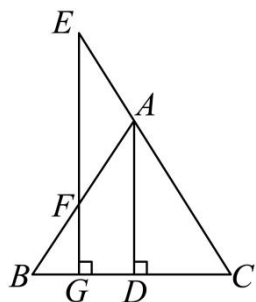
【点睛】本题考查了平行线的判定和性质, 角平分线的性质, 对顶角性质, 正确的识别图形是解题的关键.

【题型 6 在平行线中添加推理依据进行证明】

【例 6】(2023 下·北京东城·七年级北京二中校考期末) 补全证明过程, 并在 () 内填写推理的依据.

已知: 如图, $AD \perp BC$ 于点 D , $EG \perp BC$ 于点 G , $\angle E = \angle 1$,

求证: AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线.



证明: $\because AD \perp BC$, $EG \perp BC$

$\therefore \angle EGD = \angle ADC = 90^\circ$ (①_____)

$\therefore AD \parallel EG$ (②_____)

$\therefore \angle E = \angle$ (③_____),

$\angle 1 = \angle BAD$ (④_____)

$\therefore \angle E = \angle 1$

$\therefore \angle CAD = \angle BAD$

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线 (⑤_____)

【答案】垂直的定义, 同位角相等、两直线平行, DAC , 两直线平行, 内错角相等, 角平分线的定义.



【分析】根据垂直的定义、平行线的判定与性质、角平分线的定义逐步分析即可解答.

【详解】证明： $\because AD \perp BC, EG \perp BC,$

$\therefore \angle EGD = \angle ADC = 90^\circ$ （垂直的定义），

$\therefore AD \parallel EG$ （同位角相等、两直线平行），

$\therefore \angle E = \angle DAC,$

$\angle 1 = \angle BAD$ （两直线平行，内错角相等），

$\because \angle E = \angle 1,$

$\therefore \angle CAD = \angle BAD,$

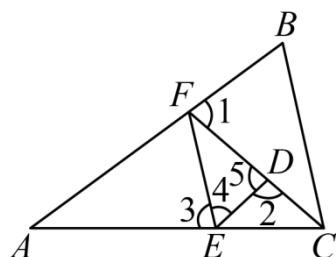
$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线（角平分线的定义）.

故答案为：垂直的定义，同位角相等、两直线平行， $\angle DAC$ ，两直线平行，内错角相等，角平分线的定义.

【点睛】本题主要考查了垂直的定义、平行线的判定与性质、角平分线的定义等知识点，灵活运用平行线的判定与性质是解答本题的关键.

【变式 6-1】（2023 下·山东临沂·七年级统考期末）请在括号内完成证明过程和填写上推理依据.

如图，已知 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\angle B = \angle 4$ ，试判断 $\angle ACB$ 与 $\angle 3$ 的大小关系，并说明理由.



解： $\angle ACB = \angle 3$ ，理由如下：

$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

又 $\because$ （ ） $+\angle 2 = 180^\circ$ （邻补角定义）

$\therefore$ （ ） $= \angle 1$ （ ）

$\therefore$ （ ） $\parallel AB$ （ ）

$\therefore \angle AFE = \angle 4$ （ ）

$\because \angle B = \angle 4,$

$\therefore$ （ ） $= \angle B$ （ ）

$\therefore EF \parallel BC$ （ ）

$\therefore \angle ACB = \angle 3$ （ ）



【答案】 $\angle 5$ ； $\angle 5$ ，同角的补角相等； DE ，内错角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等； $\angle AFE$ ，等量代换；同位角相等，两直线平行；两直线平行，同位角相等

【分析】根据邻补角的定义，平行线的判定和性质，进行作答即可.

【详解】解： $\angle ACB = \angle 3$ ，理由如下：

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle 5 + \angle 2 = 180^\circ \text{（邻补角定义）}$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 1 \text{（同角的补角相等）}$$

$$\therefore DE \parallel AB \text{（内错角相等，两直线平行）}$$

$$\therefore \angle AFE = \angle 4 \text{（两直线平行，内错角相等）}$$

$$\because \angle B = \angle 4$$

$$\therefore \angle AFE = \angle B \text{（等量代换）}$$

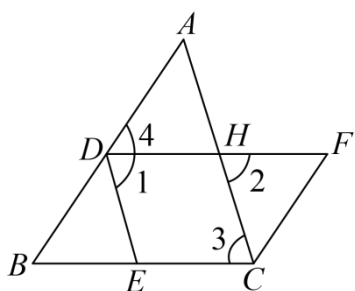
$$\therefore EF \parallel BC \text{（同位角相等，两直线平行）}$$

$$\therefore \angle ACB = \angle 3 \text{（两直线平行，同位角相等）}.$$

【点睛】本题考查平行线的判定和性质，解题的关键是熟练掌握平行线的判定定理和性质定理.

【变式 6-2】（2023 下·重庆彭水·七年级校联考期末）推理填空：

如图，点 D ， E ， H 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB ， BC ， AC 上，连接 DE ，过点 C 作 CF 交 DH 的延长线于点 F 且满足 $\angle B + \angle BCF = 180^\circ$ ；若 $DE \parallel AC$ ， $\angle 1 = \angle 3$. 求证： $\angle B = \angle F$.



证明： $\because DE \parallel AC$ （已知）

$$\therefore \angle 1 = \underline{\hspace{2cm}} \text{（两直线平行，同位角相等）}$$

$$\because \angle 1 = \angle 3 \text{（已知）}$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 \text{（}\underline{\hspace{2cm}}\text{）}$$

$$\therefore DF \parallel BC \text{（}\underline{\hspace{2cm}}\text{）}$$

$$\therefore \angle 4 = \angle B \text{（两直线平行，同位角相等）}$$



$\because \angle B + \angle BCF = 180^\circ$ (已知)

$\therefore$ _____ $\parallel$ _____ (同旁内角互补, 两直线平行)

$\therefore \angle 4 =$ _____ (两直线平行, 内错角相等)

$\therefore \angle B = \angle F$ (等量代换)

【答案】 $\angle 2$; 等量代换; 内错角相等, 两直线平行; AB ; CF ; $\angle F$

【分析】 先根据平行线的性质得到 $\angle 1 = \angle 2$, 进而等量代换得到 $\angle 3 = \angle 2$, 由此可证明 $DF \parallel BC$ 得到 $\angle 4 = \angle B$, 再证明 $AB \parallel CF$ 得到 $\angle 4 = \angle F$, 即可证明 $\angle B = \angle F$.

【详解】 证明: $\because DE \parallel AC$ (已知)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (两直线平行, 同位角相等)

$\because \angle 1 = \angle 3$ (已知)

$\therefore \angle 3 = \angle 2$ (等量代换)

$\therefore DF \parallel BC$ (内错角相等, 两直线平行)

$\therefore \angle 4 = \angle B$ (两直线平行, 同位角相等)

$\because \angle B + \angle BCF = 180^\circ$ (已知)

$\therefore AB \parallel CF$ (同旁内角互补, 两直线平行)

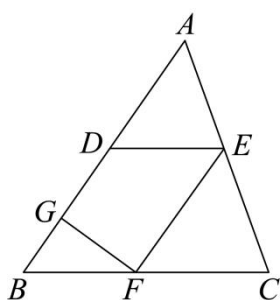
$\therefore \angle 4 = \angle F$ (两直线平行, 内错角相等)

$\therefore \angle B = \angle F$ (等量代换)

故答案为: $\angle 2$; 等量代换; 内错角相等, 两直线平行; AB ; CF ; $\angle F$.

【点睛】 本题主要考查了平行线的性质与判定, 熟知平行线的性质与判定条件是解题的关键.

【变式 6-3】 (2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级统考期末) 在下面的括号内, 填上推理的根据. 如图, 点 D, E 分别为三角形 ABC 的边 AB, AC 上的点, 点 F, G 分别在 BC, AB 上, $\angle AED = \angle C$, $\angle DEF = \angle B$, $\angle EFG = 90^\circ$. 求证 $FG \perp AB$.



证明: $\because \angle AED = \angle C$



$\therefore DE \parallel BC$ ()
 $\therefore \angle DEF = \angle EFC$ ()
 $\because \angle DEF = \angle B$
 $\therefore \angle EFC = \angle B$
 $\because \angle EFC + \angle EFB = 180^\circ$
 $\therefore \angle B + \angle EFB = 180^\circ$ ()
 $\therefore DB \parallel EF$ ()
 $\therefore \angle AGF + \angle EFG = 180^\circ$ ()
 $\because \angle EFG = 90^\circ$
 $\therefore \angle AGF = 90^\circ$
 $\therefore FG \perp AB$ ()

【答案】见解析

【分析】由 $\angle AED = \angle C$ 判定 $DE \parallel BC$ ，得到 $\angle DEF = \angle EFC$ ，利用等量代换得到 $\angle B + \angle EFB = 180^\circ$ ，推出 $DB \parallel EF$ ，则有 $\angle AGF + \angle EFG = 180^\circ$ ，根据 $\angle EFG = 90^\circ$ ，算出 $\angle AGF = 90^\circ$ ，即可证明.

【详解】解：证明： $\because \angle AED = \angle C$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ （同位角相等，两直线平行）
 $\therefore \angle DEF = \angle EFC$ （两直线平行，内错角相等）
 $\because \angle DEF = \angle B$ ，
 $\therefore \angle EFC = \angle B$ ，
 $\because \angle EFC + \angle EFB = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle EFB = 180^\circ$ （等量代换）
 $\therefore DB \parallel EF$ （同旁内角互补，两直线平行）
 $\therefore \angle AGF + \angle EFG = 180^\circ$ （两直线平行，同旁内角互补）
 $\because \angle EFG = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AGF = 90^\circ$ ，
 $\therefore FG \perp AB$ （垂线的定义）

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，垂线的定义，灵活运用平行线的判定和性质得出角的关系式解题的关键.



【题型 7 利用平行线的判定及性质求角度】

【例 7】（2023 下·浙江·七年级期末）已知， $AB \parallel CD$ ，点 E 在 CD 上，点 G, F 在 AB 上，点 H 在 AB, CD 之间，连接 FE, EH, HG ， $\angle AGH = \angle FED$ ， $FE \perp HE$ ，垂足为 E 。

（1）如图 1，求证： $HG \perp HE$ ；

（2）如图 2， GM 平分 $\angle HGB$ ， EM 平分 $\angle HED$ ， GM, EM 交于点 M ，求证： $\angle GHE = 2\angle GME$ ；

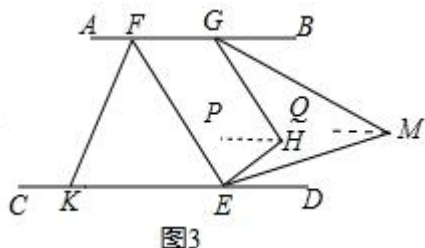


图3

（3）如图 3，在（2）的条件下， FK 平分 $\angle AFE$ 交 CD 于点 K ，若 $\angle KFE : \angle MGH = 13 : 5$ ，求 $\angle HED$ 的度数。

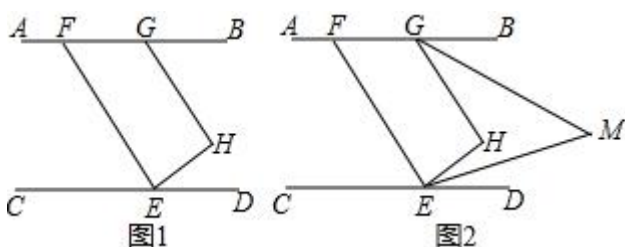


图1

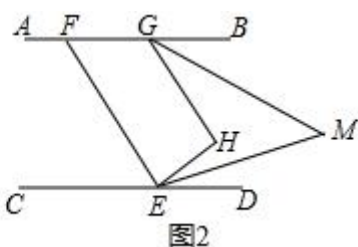


图2

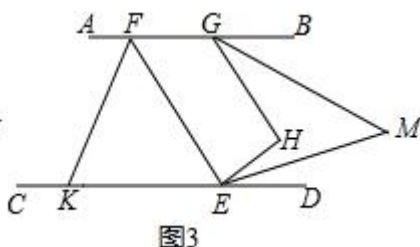


图3

【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3） 40°

【分析】（1）根据平行线的性质和判定解答即可；

（2）过点 H 作 $HP \parallel AB$ ，根据平行线的性质解答即可；

（3）过点 H 作 $HP \parallel AB$ ，根据平行线的性质解答即可。

【详解】证明：（1） $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle AFE = \angle FED,$$

$$\because \angle AGH = \angle FED,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AGH,$$

$$\therefore EF \parallel GH,$$

$$\therefore \angle FEH + \angle H = 180^\circ,$$

$$\because FE \perp HE,$$

$$\therefore \angle FEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle H = 180^\circ - \angle FEH = 90^\circ,$$



(2) $\angle DEA = 146^\circ$

【分析】(1) 由 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 得到 $DE \parallel AC$ ，即可得到 $\angle A = \angle DEB$ ，再根据等量代换得到 $\angle 3 = \angle DEB$ 即可证明；

(2) 由平行的性质得到 $\angle BDC + \angle B = 180^\circ$ ，求出 $\angle 3 = 34^\circ$ 即可求出答案．

【详解】(1) $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$,

$\therefore DE \parallel AC$,

$\therefore \angle A = \angle DEB$,

$\because \angle A = \angle 3$,

$\therefore \angle 3 = \angle DEB$,

$\therefore AB \parallel CD$;

(2) $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BDC + \angle B = 180^\circ$,

$\because \angle B = 78^\circ, \angle BDE = 2\angle 3$,

$\therefore 2\angle 3 + \angle 3 + 78^\circ = 180^\circ$,

$\therefore \angle 3 = 34^\circ$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 3 + \angle DEA = 180^\circ$,

$\therefore \angle DEA = 146^\circ$.

【点睛】本题主要考查平行的判定与性质，熟练掌握平行的判定与性质是解题的关键．

【变式 7-2】(2023 下·安徽六安·七年级校考期末) 如图 1，已知点 B 和点 C 分别是 AF 和 DE 上的点， $\angle DAF = \angle BCD$ ， $\angle F = \angle ECF$ ．

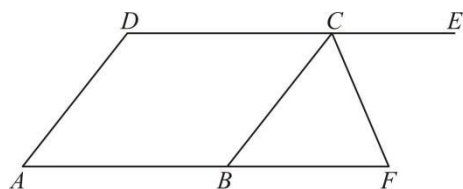


图1

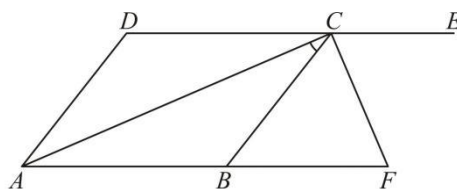


图2

(1) 试说明: $AD \parallel BC$;

(2) 如图 2，连接 AC ，已知 $AC \perp CF$ ， $\angle ECF = m\angle BCF$ ．



①当 $m = 1$ 时, $\angle DAF = 62^\circ$, 求 $\angle ACB$ 的度数;

②若 $\angle ACD + \angle ABC = 150^\circ$, 则 $\angle D =$ _____. (用含 m 的代数式表示)

【答案】(1)见解析

(2)① $\angle ACB = 31^\circ$; ② $\angle D = 60^\circ(1 + m)$

【分析】(1) 先根据 $\angle F = \angle ECF$ 证明 $DE \parallel AF$, 得到 $\angle DAF + \angle D = 180^\circ$, 进而可证 $\angle BCD + \angle D = 180^\circ$, 根据同旁内角互补两直线平行可证 $AD \parallel BC$;

(2) ①由 $AD \parallel BC$ 可得 $\angle CBF = 62^\circ$, 由 $DE \parallel AF$ 可得 $\angle BCE = 118^\circ$, 进而求出 $\angle ECF = \angle BCF = 59^\circ$, 结合 $AC \perp CF$ 可求出 $\angle ACB = 31^\circ$;

②由 $DE \parallel AF$ 可求得 $\angle ACB = 30^\circ$, 进而求出 $\angle BCF = 60^\circ$, $\angle BCE = 60^\circ(1 + m)$, 然后根据两直线平行同位角相等可求 $\angle D$ 的度数.

【详解】(1) $\because \angle F = \angle ECF$

$\therefore DE \parallel AF$

$\therefore \angle DAF + \angle D = 180^\circ$

$\because \angle DAF = \angle BCD$

$\therefore \angle BCD + \angle D = 180^\circ$

$\therefore AD \parallel BC$

(2) ① $\because AD \parallel BC$, $\angle DAF = 62^\circ$

$\therefore \angle CBF = 62^\circ$

$\because DE \parallel AF$

$\therefore \angle BCE = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

$\because \angle ECF = \angle BCF$

$\therefore \angle ECF = \angle BCF = \frac{1}{2} \times 118^\circ = 59^\circ$

$\because AC \perp CF$

$\therefore \angle ACF = 90^\circ$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$

② $\because DE \parallel AF$

$\therefore \angle ACD + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$



润禾托管

$$\because \angle ACD + \angle ABC = 150^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ$$

$$\because AC \perp CF$$

$$\therefore \angle ACF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\because \angle ECF = m\angle BCF$$

$$\therefore \angle ECF = 60^\circ m$$

$$\therefore \angle BCE = 60^\circ(1 + m)$$

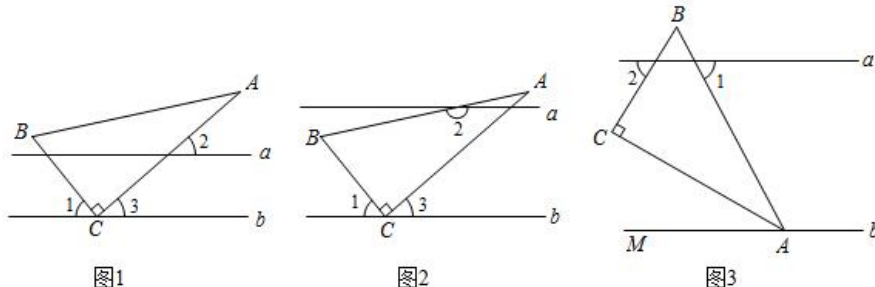
$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle D = \angle BCE = 60^\circ(1 + m)$$

故答案为: $60^\circ(1 + m)$

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质，垂直的定义，熟练掌握平行线的判定与性质是解答本题的关键.

【变式 7-3】（2023 下·浙江·七年级期末）综合与实践课上，同学们以“一个直角三角形和两条平行线”为背景开展数学活动，如图，已知两直线 a, b ，且 $a \parallel b$ ， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BCA = 90^\circ$ ，操作发现：



(1) 如图 1. 若 $\angle 1 = 48^\circ$ ，求 $\angle 2$ 的度数；

(2) 如图 2，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle 1$ 的度数不确定，同学们把直线 a 向上平移，并把 $\angle 2$ 的位置改变，发现 $\angle 2 - \angle 1 = 120^\circ$ ，请说明理由.

(3) 如图 3，若 $\angle A = 30^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAM$ ，此时发现 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 又存在新的数量关系，请写出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的数量关系并说明理由.

【答案】(1) 42° ；(2) 见解析；(3) $\angle 1 = \angle 2$ ，理由见解析

【分析】(1) 由平角定义求出 $\angle 3 = 42^\circ$ ，再由平行线的性质即可得出答案；

(2) 过点 B 作 $BD \parallel a$. 由平行线的性质得 $\angle 2 + \angle ABD = 180^\circ$ ， $\angle 1 = \angle DBC$ ，则 $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - \angle 1$ ，进而得出结论；

(3) 过点 C 作 $CP \parallel a$ ，由角平分线定义得 $\angle CAM = \angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle BAM = 2\angle BAC = 60^\circ$ ，由平行线的性质得



润禾托管

$\angle 1 = \angle BAM = 60^\circ$, $\angle PCA = \angle CAM = 30^\circ$, $\angle 2 = \angle BCP = 60^\circ$, 即可得出结论.

【详解】解: (1) $\because \angle 1 = 48^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle BCA - \angle 1 = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 42^\circ;$$

(2) 理由如下:

过点 B 作 $BD \parallel a$. 如图 2 所示:

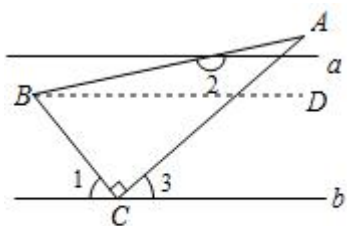


图2

则 $\angle 2 + \angle ABD = 180^\circ$,

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore b \parallel BD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - \angle 1,$$

$$\therefore \angle 2 + 60^\circ - \angle 1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 - \angle 1 = 120^\circ;$$

(3) $\angle 1 = \angle 2$, 理由如下:

过点 C 作 $CP \parallel a$, 如图 3 所示:

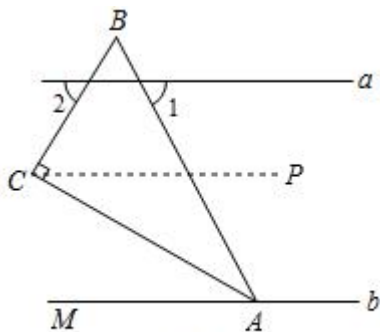


图3

$\because AC$ 平分 $\angle BAM$

$$\therefore \angle CAM = \angle BAC = 30^\circ, \angle BAM = 2\angle BAC = 60^\circ,$$



又 $\because a \parallel b$,

$\therefore CP \parallel b$, $\angle 1 = \angle BAM = 60^\circ$,

$\therefore \angle PCA = \angle CAM = 30^\circ$,

$\therefore \angle BCP = \angle BCA - \angle PCA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

又 $\because CP \parallel a$,

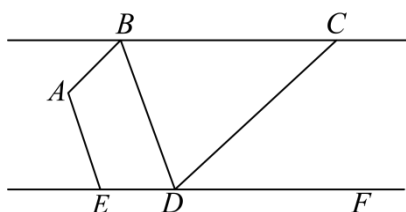
$\therefore \angle 2 = \angle BCP = 60^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

【点睛】本题是三角形综合题目，考查了平移的性质、直角三角形的性质、平行线的判定与性质、角平分线定义、平角的定义等知识；本题综合性强，熟练掌握平移的性质和平行线的性质是解题的关键。

【题型 8 利用平行线的判定及性质进行证明】

【例 8】（2023 下·陕西渭南·七年级统考期末）如图， $AB \parallel CD$ ，连接 BD ， E 是直线 FD 上的一点， $\angle ABC = 140^\circ$ ， $\angle CDF = 40^\circ$ 。



(1) 判断 BC 与 EF 平行吗？为什么？

(2) 若 $BD \parallel AE$ ， $\angle BAE = 110^\circ$ ，则 BD 是否平分 $\angle ABC$ ？请说明理由。

【答案】(1) $BC \parallel EF$ ，理由见解析

(2) BD 平分 $\angle ABC$ ，理由见解析

【分析】(1) 由 $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 140^\circ$ ，得到 $\angle BCD = 40^\circ$ ，则 $\angle BCD = \angle CDF$ ，即可证明 $BC \parallel EF$ ；

(2) $BD \parallel AE$ ， $\angle BAE = 110^\circ$ ，则 $\angle ABD = 180^\circ - \angle BAE = 70^\circ$ ，求出 $\angle CBD = 70^\circ$ ，则 $\angle ABD = \angle CBD$ ，即可证明 BD 平分 $\angle ABC$ 。

【详解】(1) $BC \parallel EF$ ，

理由如下： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 140^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ，

$\because \angle CDF = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle CDF$ ，



$\therefore BC \parallel EF$;

(2) BD 平分 $\angle ABC$, 理由如下:

$\because BD \parallel AE, \angle BAE = 110^\circ$,

$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$,

$\because \angle ABC = 140^\circ$,

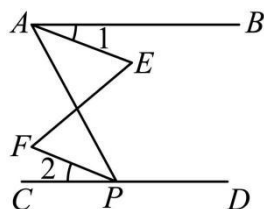
$\therefore \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 140^\circ - 70^\circ = 70^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

【点睛】此题主要考查了平行线的判定和性质, 熟练掌握利用平行线的判定和性质进行证明是解题的关键.

【变式 8-1】(2023 下·江苏镇江·七年级统考期末) 已知: 如图, $\angle BAP + \angle APD = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$. 求证: $AE \parallel PF$.



【答案】见解析

【分析】由 $\angle BAP + \angle APD = 180^\circ$ 可得 $AB \parallel CD$, 进而得到 $\angle BAP = \angle CPA$, 然后根据角的和差可得 $\angle EAP = \angle FPA$, 运用内错角相等、两直线平行证明即可.

【详解】证明: $\because \angle BAP + \angle APD = 180^\circ$

$\therefore AB \parallel CD$

$\therefore \angle BAP = \angle CPA$

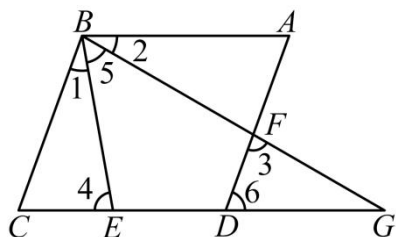
$\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle BAP - \angle 1 = \angle CPA - \angle 2$, 即 $\angle EAP = \angle FPA$

$\therefore AE \parallel PF$

【点睛】本题考查平行线的性质和判定, 解题的关键是灵活应用平行线的性质定理和判定定理.

【变式 8-2】(2023 下·黑龙江齐齐哈尔·七年级校考期末) 如图, 已知 $BC \parallel AD$, $\angle C = \angle A$, $\angle 3 = \angle 4$. 求证:



(1) $AB \parallel CD$

(2) $\angle 1 = \angle 2$

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】(1) 根据平行线的性质得出 $\angle C = \angle 6$ ，根据已知 $\angle C = \angle A$ ，可得 $\angle A = \angle 6$ ，进而可得 $AB \parallel CD$ ；

(2) 根据平行线的性质以及已知条件得出 $\angle ABE = \angle CBG$ ，进而结合图形，即可求解。

【详解】(1) 证明： $\because BC \parallel AD$ (已知)

$\therefore \angle C = \angle 6$ (两直线平行，同位角相等)

$\because \angle C = \angle A$ (已知)

$\therefore \angle A = \angle 6$ (等量代换)

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等，两直线平行)

(2) $\because AB \parallel CD$ (已知)

$\therefore \angle 4 = \angle ABE$ (两直线平行，内错角相等)

$\because BC \parallel AD$ (已知)

$\therefore \angle 3 = \angle CBG$ (两直线平行，同位角相等)

$\because \angle 3 = \angle 4$ (已知)

$\therefore \angle ABE = \angle CBG$ (等量代换)

$\because \angle ABE = \angle 2 + \angle 5$, $\angle CBG = \angle 1 + \angle 5$

$\therefore \angle 2 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 5$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (等式的性质)

【点睛】本题考查了平行线的性质与判定，熟练掌握平行线的性质与判定是解题的关键。

【变式 8-3】(2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨德强学校校考期中) 点 E 在射线 DA 上，点 F 、 G 为射线 BC 上两个动点，满足 $\angle DBF = \angle DEF$, $\angle BDG = \angle BGD$, DG 平分 $\angle BDE$ 。

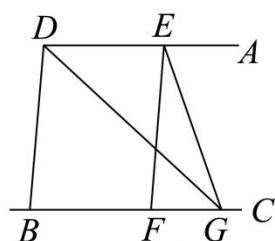


图1

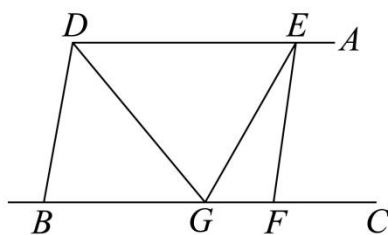


图2

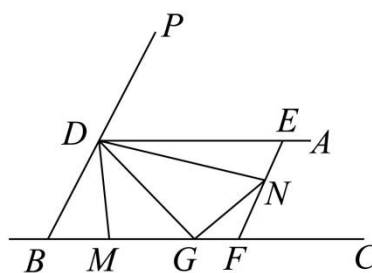


图3

(1)如图 1，当点G在F右侧时，求证： $BD \parallel EF$ ；

(2)如图 2，当点G在F左侧时，求证： $\angle DGE = \angle BDG + \angle FEG$ ；

(3)如图 3，在(2)的条件下，P为BD延长线上一点，DM平分 $\angle BDG$ ，交BC于点M，DN平分 $\angle PDM$ ，交EF于点N，连接NG，若 $DG \perp NG$ ， $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$ ，则 $\angle DBF$ 的度数是多少。

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

(3) 60°

【分析】(1)通过证明 $\angle DBF = \angle EFG$ ，利用同位角相等，两直线平行即可得出结论；

(2)过点E作 $GH \parallel BD$ ，交AD于点H，利用(1)的结论和平行线的性质即可得出结论；

(3)设 $\angle BDM = \angle MDG = \alpha$ ，则 $\angle BDG = \angle EDG = \angle DGB = 2\alpha$ ， $\angle PDE = 180^\circ - 4\alpha$ ， $\angle PDM = 180^\circ - \alpha$ ；利用已知条件用含 α 的式子表示 $\angle PDN$ ， $\angle EDN$ ， $\angle GDN$ ， $\angle DNG$ ，再利用 $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$ ，得到关于 α 的方程，解方程求得 α 的值，则 $\angle B = 180^\circ - 4\alpha$ ，结论可求。

【详解】(1)证明： $\because DG$ 平分 $\angle BDE$ ，

$$\therefore \angle BDG = \angle ADG,$$

$$\text{又} \because \angle BDG = \angle BGD,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle DGB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

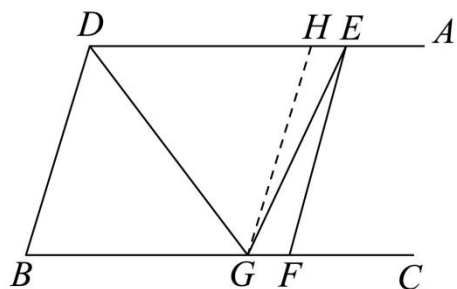
$$\therefore \angle DEF = \angle EFG,$$

$$\because \angle DBF = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle EFG,$$

$$\therefore BD \parallel EF;$$

(2)证明：过点G作 $GH \parallel BD$ ，交AD于点H，如图，



由(1)可知: $BD \parallel EF$,

$\therefore GH \parallel EF$,

$\therefore \angle BDG = \angle DGH, \angle GEF = \angle HGE$,

$\because \angle DGE = \angle DGH + \angle HGE$,

$\therefore \angle DGE = \angle BDG + \angle FEG$;

(3) 解: 设 $\angle BDM = \angle MDG = \alpha$,

则 $\angle BDG = \angle EDG = \angle DGB = 2\alpha, \angle PDE = 180^\circ - 4\alpha$,

$\therefore \angle PDM = 180^\circ - \alpha$,

$\because DN$ 平分 $\angle PDM$,

$\therefore \angle PDN = \angle MDN = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

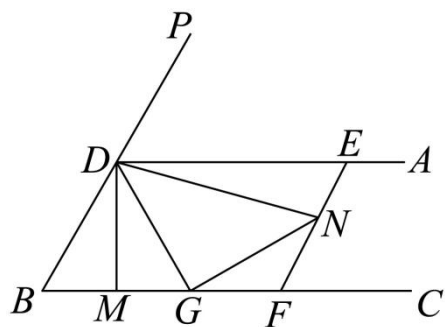
$\therefore \angle EDN = \angle PDN - \angle PDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - (180^\circ - 4\alpha) = \frac{7}{2}\alpha - 90^\circ$,

$\therefore \angle GDN = \angle MDN - \angle MDG = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \alpha = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$,

$\because DG \perp ON$,

$\therefore \angle DNG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DNG = 90^\circ - (90^\circ - \frac{3}{2}\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$,



$\because DE \parallel BF$,

$\therefore \angle DBF = \angle PDE = 180^\circ - 4\alpha$,



$$\therefore \angle DBF - \angle DNG = \angle EDN,$$

$$\therefore 180^\circ - 4\alpha - \frac{3}{2}\alpha = \frac{7}{2}\alpha - 90^\circ,$$

$$\text{解得: } \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF = 180^\circ - 4\alpha = 60^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质，角平分线的定义，利用平行线的性质和角平分线的定义得出角度的关系式是解题的关键。

【题型9 确定第三边的取值范围】

【例9】（2023春·江苏无锡·七年级统考期末）一个三角形的3边长分别是 $x\text{cm}$ 、 $(3x-3)\text{cm}$ 、 $(x+2)\text{cm}$ ，它的周长不超过 39cm 。则 x 的取值范围是（ ）

- A. $\frac{5}{3} < x < 5$ B. $5 < x \leq 8$ C. $\frac{5}{3} < x \leq 8$ D. $1 < x < 5$

【答案】A

【分析】根据三角形三边关系和周长不超过 39cm 可列出不等式组求解即可。

$$\text{【详解】解：根据题意，可得} \begin{cases} x + (3x - 3) > x + 2 \\ x + (x + 2) > 3x - 3 \\ (x + 2) + (3x - 3) > x \\ x + (3x - 3) + (x + 2) \leq 39 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{5}{3} < x < 5.$$

故选：A.

【点睛】此题主要考查了三角形的三边关系和解不等式组，根据条件列出不等式组求解是解题的关键。

【变式9-1】（2023春·江苏盐城·七年级统考期中）已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长， b, c 满足

$$|b-2| + (c-3)^2 = 0, \text{ 且 } a \text{ 为方程 } |a-5| = 1 \text{ 的解, 则 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】9

【分析】利用绝对值的性质以及偶次方的性质得出 $b=2$ 、 $c=3$ 的值，再解绝对值方程可得 $a=6$ 或 $a=4$ ，进而利用三角形三边关系得出 a 的值，进而求出 $\triangle ABC$ 的周长。

$$\text{【详解】解：} \because |b-2| + (c-3)^2 = 0,$$

$$\therefore b-2=0 \text{ 且 } c-3=0,$$

$$\therefore b=2, c=3,$$

$$\because a \text{ 为方程 } |a-5| = 1 \text{ 的解,}$$

$$\therefore a=6 \text{ 或 } a=4,$$



又 $2 + 3 < 6$,

$\therefore a = 4$,

则 $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + 3 + 4 = 9$,

故答案为: 9.

【点睛】此题主要考查了三角形三边关系以及绝对值的性质和偶次方的性质, 得出 a 的值是解题关键.

【变式 9-2】(2023 春·河南郑州·七年级郑州中学校联考期中) 有长度分别是 4cm、5cm、8cm 和 9cm 的小棒各一根, 任选其中三根首尾相接围成三角形, 可以围成不同形状的三角形的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【分析】根据三角形的三边关系逐一判断即可.

【详解】解: 若选取长度分别是 4cm、5cm、8cm 的小棒, $4 + 5 > 8$, 故能围成三角形;

若选取长度分别是 4cm、5cm、9cm 的小棒, $4 + 5 = 9$, 故不能围成三角形;

若选取长度分别是 5cm、8cm、9cm 的小棒, $5 + 8 > 9$, 故能围成三角形;

若选取长度分别是 4cm、8cm、9cm 的小棒, $4 + 8 > 9$, 故能围成三角形.

综上所述, 可以围成 3 种不同形状的三角形.

故选: D.

【点睛】此题主要考查了构成三角形的条件, 掌握三角形的三边关系是解决此题的关键.

【变式 9-3】(2023 春·河南周口·七年级统考期末) 三角形的三边长分别为 2, $2x - 1$, 5, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $2 < x < 4$

【分析】根据三角形三边关系: ①任意两边之和大于第三边; ②任意两边之差小于第三边, 即可得出第三边的取值范围, 进而求出 x 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 三角形的两边长分别为 2 和 5,

$\therefore$ 第三边 $2x - 1$ 的取值范围是: $5 - 2 < 2x - 1 < 5 + 2$,

解得: $2 < x < 4$.

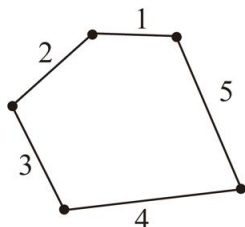
故答案为: $2 < x < 4$.

【点睛】此题主要考查了三角形三边关系和解不等式组, 熟练掌握三角形的三边关系定理是解决问题的关键.



【题型 10 三角形的三边关系的应用】

【例 10】（2023 春·广东深圳·七年级深圳中学校考期末）如图，用五个螺丝将五条不可弯曲的木条围成一个木框，不计螺丝大小，其中相邻两螺丝的距离依次为 1、2、3、4、5，且相邻两木条的夹角均可调整．若调整木条的夹角时不破坏此木框，则任两螺丝的距离之最大值为（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【答案】B

【分析】若两个螺丝的距离最大，则此时这个木框的形状为三角形，可根据三条线段的长来判断三角形的最长边时的组合，然后分别找出这些三角形的最长边即可．

【详解】解：相邻两螺丝的距离依次为 1、2、3、4、5；

①选 4 + 5 作为三角形的一边、另外的线段构成三角形另外两边，而 $1 + 2 + 3 = 6 < 4 + 5$ ，不能构成三角形；

②选 3 + 4 作为三角形的一边，另外的线段构成三角形另外两边为 2 和 6 或 3 和 5，

而 $1 + 2 + 5 = 8 > 3 + 4$ ， $6 - 2 < 7$ ， $5 - 3 < 7$ ，三角形均成立，

此时最大边长为 7；

综上所述，任两螺丝的距离之最大值为 7．

故选：B．

【点睛】此题实际考查的是三角形的三边关系定理，能够正确的判断出调整角度后三角形木框的组合方法是解答的关键．

【变式 10-1】（2023 春·山东济南·七年级统考期末）小明家和小亮家到学校的直线距离分别是 5km 和 3km，那么小明到小亮家的直线距离不可能是（ ）

- A. 1km B. 2km C. 3km D. 8km

【答案】A

【分析】根据小明家和小亮家与学校共线，小明家和小亮家与学校不共线，两种情况进行求解即可．

【详解】解：由题意知，当小明家和小亮家与学校共线，小明家和小亮家的直线距离为 $5 - 3 = 2$ （km）或 $5 + 3 = 8$ （km）；



润禾托管

当小明家和小亮家与学校不共线，

由三角形三边关系可知，小明家和小亮家的直线距离大于 2 km ，小于 8 km ，

综上，小明家和小亮家的直线距离不可能是 1 km ，

故选：A.

【点睛】本题考查了有理数加减运算的应用，三角形三边关系. 解题的关键在于对知识的熟练掌握.

【变式 10-2】（2023 秋·新疆和田·七年级统考期末）已经有两根木条，长分别是 2 cm 和 6 cm ，现要用 3 根木条组成三角形，还要从下面 4 根木条中选一根，可以是（ ）

A. 4 cm

B. 7 cm

C. 8 cm

D. 9 cm

【答案】B

【分析】设第三根木条的长度为 $x\text{ cm}$ ，根据三角形三边之间的关系列不等式组求出 x 的范围，然后选出满足条件的选项即可.

【详解】设第三根木条的长度为 $x\text{ cm}$ ，则

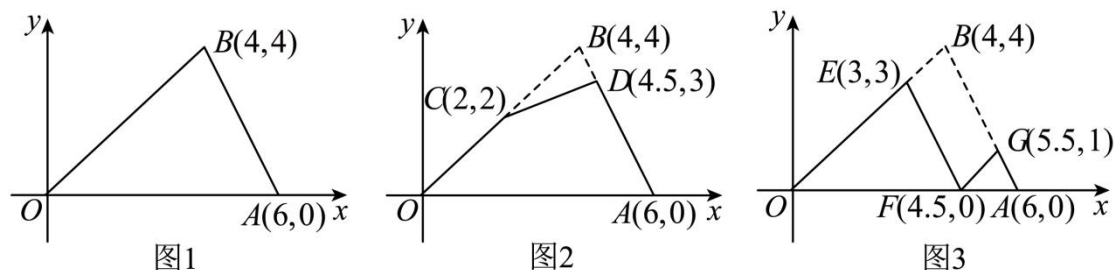
$$6 - 2 < x < 6 + 2,$$

解得 $4 < x < 8$.

故选：B.

【点睛】本题考查了三角形三边之间的关系，熟练掌握三角形三边之间的关系是解题的关键.

【变式 10-3】（2023 春·北京西城·七年级统考期末）以某公园西门 O 为原点建立平面直角坐标系，东门 A 和景点 B 的坐标分别是 $(6,0)$ 和 $(4,4)$. 如图 1，甲的游览路线是： $O \rightarrow B \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_1 . 如图 2，景点 C 和 D 分别在线段 OB, BA 上，乙的游览路线是： $O \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_2 . 如图 3，景点 E 和 G 分别在线段 OB, BA 上，景点 F 在线段 OA 上，丙的游览路线是： $O \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_3 . 下列 l_1, l_2, l_3 的大小关系正确的是（ ）



A. $l_1 = l_2 = l_3$

B. $l_1 < l_2$ 且 $l_2 = l_3$

C. $l_2 < l_1 < l_3$

D. $l_1 > l_2$ 且 $l_1 = l_3$

【答案】D

【分析】根据三角形三边关系即可证明 $l_1 > l_2$ ，根据平移的性质，即可证明 $l_1 = l_3$.



【详解】解：由题意可得： $l_1 = OB + AB$,

$$l_2 = OC + CD + AD < OC + CB + BD + AD = OB + AB,$$

$$\therefore l_1 > l_2;$$

将线段 EF 平移可得到线段 BG ，将线段 FG 平移可得到线段 BE ，

$$\therefore BE = FG, EF = BG,$$

$$\therefore l_3 = OE + EF + FG + AG = OE + BE + BG + AG = OB + BA = l_1,$$

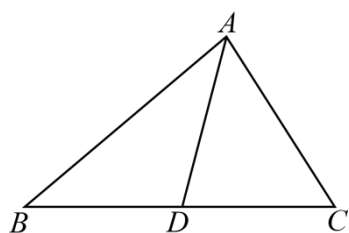
$$\therefore l_1 = l_3,$$

故选：D.

【点睛】本题考查了三角形三边关系，平移的性质，题目新颖，灵活运用所学知识是关键.

【题型 11 利用三角形的中线求长度】

【例 11】（2023 春·云南·七年级云南师大附中校考期末）已知，已知 $\triangle ABC$ 的周长为 33cm ， AD 是 BC 边上的中线， $AB = \frac{3}{2}AC$.



(1) 如图，当 $AC = 10\text{cm}$ 时，求 BD 的长.

(2) 若 $AC = 12\text{cm}$ ，能否求出 DC 的长？为什么？

【答案】(1) 4cm ；(2) 不能，理由见解析

【分析】(1) 根据三角形中线的性质解答即可；

(2) 根据三角形周长和边的关系解答即可.

【详解】(1) $\because AB = \frac{3}{2}AC$ ， $AC = 10\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = 15\text{cm},$$

又 $\because \triangle ABC$ 的周长是 33cm ，

$$\therefore BC = 8\text{cm},$$

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 4\text{cm};$$



(2) 不能, 理由如下:

$$\because AB = \frac{3}{2}AC, AC = 12cm,$$

$$\therefore AB = 18cm,$$

又 $\because \triangle ABC$ 的周长是 $33cm$,

$$\therefore BC = 3cm,$$

$$\because AC + BC = 15 < AB = 18,$$

$\therefore$ 不能构成三角形 ABC , 则不能求出 DC 的长.

【点睛】此题考查三角形的中线、高、角平分线, 关键是根据三角形中线的性质解答.

【变式 11-1】(2023 秋·全国·七年级期中) 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, $\triangle ADC$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长多 3, AB 与 AC 的和为 13, 则 AC 的长为 ()

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】B

【分析】根据三角形的中线的定义得到 $BD=DC$, 根据三角形的周长公式得到 $AC-AB=3$, 根据题意列出方程组, 解方程组得到答案.

【详解】解: $\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$$\therefore BD=DC,$$

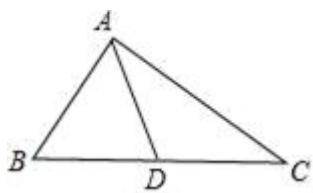
$$\text{由题意得, } (AC+CD+AD) - (AB+BD+AD) = 3,$$

$$\text{整理得, } AC - AB = 3,$$

$$\text{则} \begin{cases} AC - AB = 3 \\ AC + AB = 13 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} AC = 8 \\ AB = 5 \end{cases},$$

故选 B.

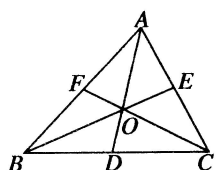


【点睛】此题考查三角形的中线的概念, 解题关键在于掌握三角形一边的中点与此边所对顶点的连线叫做三角形的中线.



润禾托管

【变式 11-2】（2023 秋·山东德州·七年级校考期中）如图， $\triangle ABC$ 的周长为 24 cm， AD ， BE 分别是 BC ， AC 边上的中线， AD ， BE 相交于点 O ， CO 的延长线交 AB 于点 F ，且 $BD=4$ cm， $AE=3.5$ cm，求 AF 的长。



【答案】 $AF=4.5$ (cm).

【分析】此题主要考查三角形的中线，利用三角形的周长求出 AB 的长度，然后利用中线便可解出答案。

【详解】 $\because AD$ ， BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore BC=2BD, AC=2AE, CF \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中线}, \therefore AF=\frac{1}{2}AB.$$

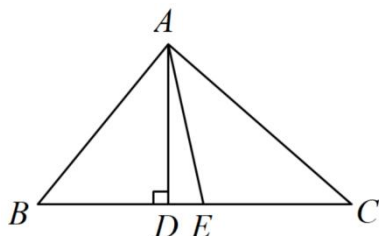
$$\because BD=4 \text{ cm}, AE=3.5 \text{ cm}, \therefore BC=8 \text{ cm}, AC=7 \text{ cm}.$$

$$\because \triangle ABC \text{ 的周长是 } 24 \text{ cm}, \therefore AB=24-(BC+AC)=24-(8+7)=9 \text{ (cm)},$$

$$\therefore AF=\frac{1}{2} \times 9=4.5 \text{ (cm)}.$$

【点睛】此题主要考查三角形的中线特点，需熟练运用三角形的各种定理来解题。

【变式 11-3】（2023 秋·黑龙江大庆·七年级校考期中）如图，已知 AD 、 AE 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线 $AB=9$ cm, $AC=12$ cm, $BC=15$ cm, $\angle BAC=90^\circ$. 试求：



(1) $\triangle ABE$ 的面积；

(2) AD 的长度；

(3) $\triangle ACE$ 与 $\triangle ABE$ 的周长的差。

【答案】(1) 27cm^2 ；

(2) $\frac{36}{5}\text{cm}$ ；

(3) 3cm 。

【分析】(1) 先根据三角形面积公式计算出 $S_{\triangle ABC}=54\text{cm}^2$ ，然后利用 AE 是边 BC 的中线，得到 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ；



(2) 利用面积法得到 $\frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC$, 即可求出 AD 的长;

(3) 由 $\triangle ACE$ 的周长 $-\triangle ABE$ 的周长 $= AC - AB$, 即可求得答案.

【详解】(1) 解: $\because \triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54(\text{cm}^2),$$

$\because AE$ 是 BC 上的中线,

$$\therefore BE = EC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 27\text{cm}^2;$$

(2) 解: $\because \angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 上的高,

$$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC,$$

$$\therefore AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{36}{5} \text{ cm};$$

(3) 解: $\because AE$ 是 BC 边上的中线,

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 的周长} - \triangle ABE \text{ 的周长} = AC + AE + CE - (AB + BE + AE) = AC - AB = 12 - 9 = 3(\text{cm}),$$

即 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABE$ 的周长差是 3cm .

【点睛】本题考查了三角形的面积公式, 以及三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分, 熟练掌握相关的性质与公式是解决此题的关键.

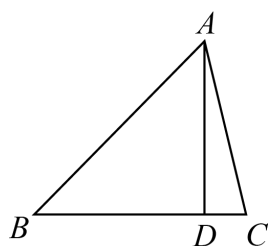
【题型 12 三角形的高与面积有关的计算】

【例 12】(2023 春·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨市虹桥初级中学学校校考期末) 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, $AD = 6$, $CD = 1$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 12, 则线段 BD 的长度为_____.

【答案】3 或 5

【分析】根据题意分 AD 在 $\triangle ABC$ 内部和 AD 在 $\triangle ABC$ 外部两种情况进行讨论, 根据三角形的面积公式求得 BC 长度, 再根据边之间的和差关系求解即可.

【详解】当 AD 在 $\triangle ABC$ 内部时, 如下图



根据题意可知： $S_{\triangle ABC} = 12$ ， $AD = 6$

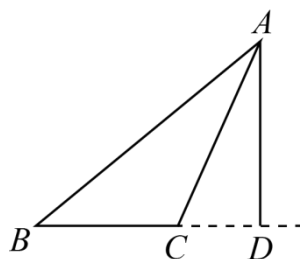
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = 12$$

解得： $BC = 4$

$$\therefore CD = 1$$

$$\therefore BD = BC - CD = 4 - 1 = 3$$

当 AD 在 $\triangle ABC$ 外部时，如下图



根据题意可知 $S_{\triangle ABC} = 12$ ， $AD = 6$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = 12$$

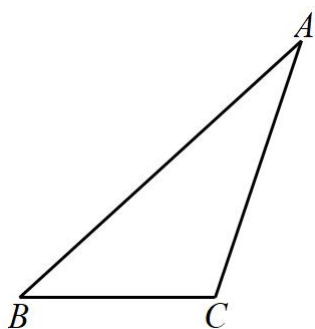
解得： $BC = 4$

$$\therefore BD = BC + CD = 4 + 1 = 5$$

故答案为：3 或 5.

【点睛】本题考查三角形的面积，解题的关键是根据题意作出相关的图形（ AD 在 $\triangle ABC$ 内部和外部），数形结合进行求解.

【变式 12-1】（2023 春·江苏常州·七年级统考期中）如图，已知 $\triangle ABC$.



(1)画出 $\triangle ABC$ 的三条高 AD 、 BE 、 CF （不写画法）；

(2)在（1）的条件下，若 $AB = 6$ ， $BC = 3$ ， $CF = 2$ ，则 $AD =$ _____.

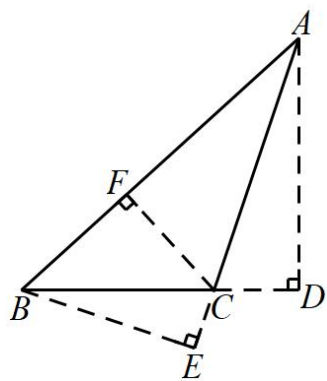
【答案】(1)见解析

(2)4

【分析】（1）根据三角形的高线的画法画出 AD 、 BE 、 CF 即可；

（2）根据面积相等可得出 $\frac{1}{2}AB \cdot CF = \frac{1}{2}BC \cdot AD$ ，代入相关数据计算即可得出 AD ．

【详解】（1）如图， AD 、 BE 、 CF 即为所画：



（2） $\because CF$ 是 AB 边上的高， AD 是 BC 边上的高，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$$

$$\because AB = 6, BC = 3, CF = 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = \frac{1}{2} \times 3 \cdot AD,$$

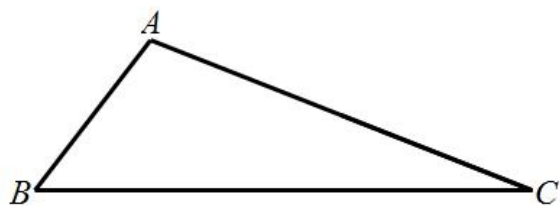
解得， $AD = 4$ ，

故答案为：4.

【点睛】本题主要考查了三角形高的画法以及与高有关的面积计算，正确识图是解答本题的关键.



【变式 12-2】（2023 春·上海宝山·七年级校考期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，按下列要求画图并填空：



(1)画 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CD ；

(2) E 在 CD 上，连接 BE ，使得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle EBC}$ ，请画出点 E ；

(3)已知 $BD = 3$ ， $CD = 4$ ， $DE = 1$ ，那么点 C 到直线 AB 的距离为_____， $\triangle ADC$ 的面积为_____.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)4, $\frac{3}{2}$

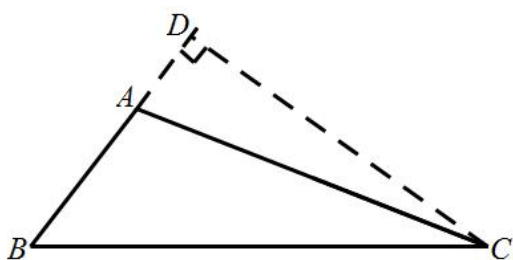
【分析】(1) 根据画高的方法作图即可；

(2) 根据平行线的性质只需要令 $AE \parallel BC$ 即可得到 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle EBC}$ ；

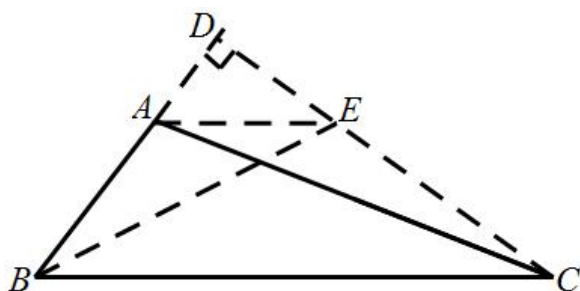
(3) 根据点到直线的距离的定义即可求出点 C 到直线 AB 的距离；先求出 $S_{\triangle BDE} = \frac{3}{2}$ ，根据平行线的性质得到

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCE}$ ，则 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BDE} = \frac{3}{2}$.

【详解】(1) 解：如图所示， CD 即为所求；



(2) 解：如图所示，点 E 即为所求；



(3) 解: $\because CD \perp AB, CD = 4,$

$\therefore$ 点 C 到直线 AB 的距离为 4;

$\because BD = 3, DE = 1,$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot DE = \frac{3}{2},$$

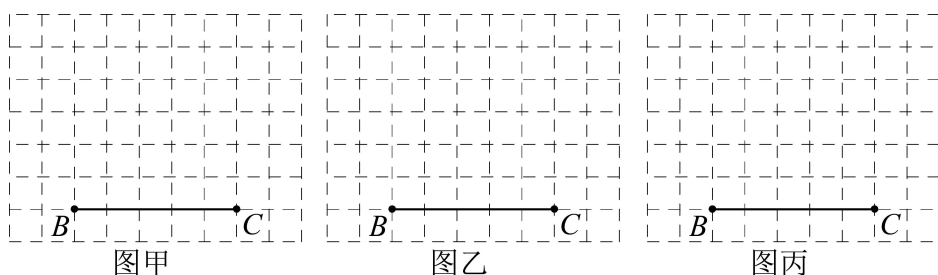
$\because AE \parallel BC,$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BDE} = \frac{3}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了画三角形的高，画平行线，三角形面积，平行线的性质等等，灵活运用所学知识是解题的关键.

【变式 12-3】(2023 春·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨市萧红中学校考期中) 如图是由边长都是 1 的小正方形组成的网格. 图中各点均在格点上, 请按以下要求画图. ①所画顶点必须在格点上; ②标清指定的字母; ③不得出格.



(1) 在图甲中画出 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高 AD ;

(2) 在图乙中画出一个 $\text{Rt} \triangle EBC$, 且 $\triangle EBC$ 的面积是图甲中 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍;

(3) 在图丙中画出一个锐角三角形 $\triangle MBC$, 且面积为 15.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

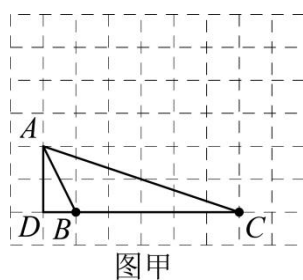


【分析】(1) 延长 CB ，过点 A 垂直 CB 的延长线的线段即所求；

(2) 根据 $S_{\triangle ABC} = 5$ ，可得 $S_{\triangle EBC} = 10$ ，即可求出 $\triangle EBC$ 中 BC 的高，即可确定点 E ，再分别连接 EB 、 EC 即所求；

(3) 根据锐角三角形 $\triangle MBC$ 的面积可求 $\triangle MBC$ 中 BC 上的高为 6 ，即可确定点 M ，再连接 MB 、 MC 即可。

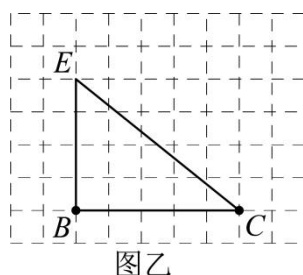
【详解】(1) 解：如图，线段 AD 即为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高；



(2) 解：由(1)可得： $S_{\triangle ABC} = 5$ ， $BC = 5$ ，

$\therefore \triangle EBC$ 的面积是图甲中 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍，

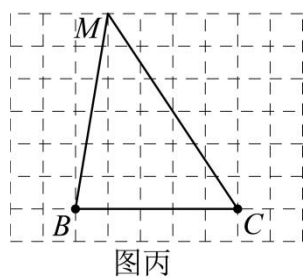
$\therefore S_{\triangle EBC} = 2 \times 5 = 10$ ，如图， $\triangle EBC$ 即所求；



(3) 解： $\therefore$ 锐角三角形 $\triangle MBC$ 的面积为 15 ， $BC = 5$ ，

$\therefore \triangle MBC$ 中 BC 上的高为： $\frac{15 \times 2}{5} = 6$ ，

$\therefore$ 点 M 距离 BC 边为 6 ，如图， $\triangle MBC$ 即所求。

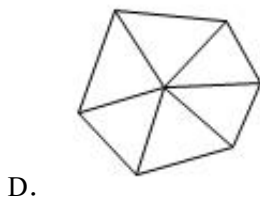
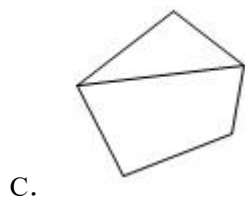
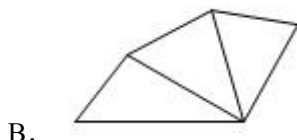
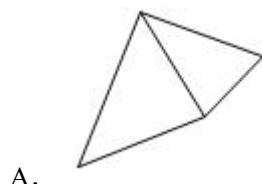


【点睛】本题考查网格画三角形的高，三角形高的有关计算及利用网格求三角形的面积，熟练掌握三角形面积求出三角形的高是解题的关键。



【题型 13 三角形的稳定性】

【例 13】（2023 秋·北京·七年级校考期中）下列图形中不具备稳定性的是（ ）



【答案】C

【分析】三角形具有稳定性，只要选项中的图形可以分解成三角形，则图形就有稳定性，据此即可确定。

【详解】解：A、可以看成两个三角形，而三角形具有稳定性，则这个图形一定具有稳定性，故本选项错误；

B、可以看成三个三角形，而三角形具有稳定性，则这个图形一定具有稳定性，故本选项错误；

C、可以看成是一个三角形和一个四边形，而四边形不具有稳定性，则这个图形一定不具有稳定性，故本选项正确；

D、可以看成 7 个三角形，而三角形具有稳定性，则这个图形一定具有稳定性，故本选项错误。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了三角形的稳定性，正确理解各个图形具有稳定性的条件是解题的关键。

【变式 13-1】（2023 秋·四川泸州·七年级四川省泸县第四中学校考期末）如图，某中学的电动伸缩校门利用的数学原理是（ ）



A. 三角形的稳定性

B. 两点之间，线段最短

C. 三角形两边之和大于第三边

D. 四边形的不稳定性

【答案】D

【分析】根据电动伸缩门的工作原理，结合四边形的不稳定性即可得到答案。



【详解】解：∵电动伸缩门的整体形状为四边形，且电动伸缩门的长度可以伸长和变短，

∴利用的是四边形的不稳定性，

故选 D.

【点睛】本题考查四边形的性质，熟练掌握四边形的相关知识的解本题的关键.

【变式 13-2】（2023 秋·广西南宁·七年级南宁市天桃实验学校校考期中）要使四边形木架不变形，至少要再钉几根木条（ ）

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3

【答案】C

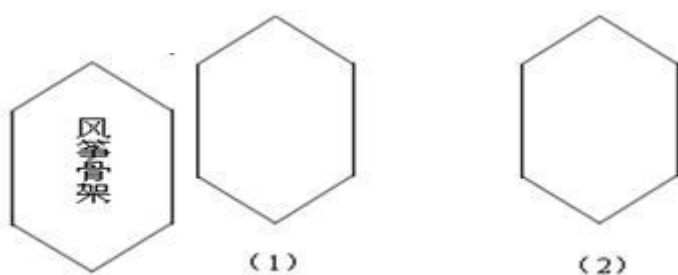
【分析】根据三角形具有稳定性可得：沿对角线钉上 1 根木条即可.

【详解】解：根据三角形的稳定性可得，至少要再钉上 1 根木条.

故选：C.

【点睛】此题主要考查了三角形具有稳定性，当三角形三边的长度确定后，三角形的形状和大小就能唯一确定下来，故三角形具有稳定性，而四边形不具有稳定性.

【变式 13-3】（2023 春·广东惠州·七年级统考期中）如图，是一个用六根竹条连接而成的凸六边形风筝骨架，考虑到骨架的稳固性、美观性、实用性等因素，需再加竹条与其顶点连接. 要求：



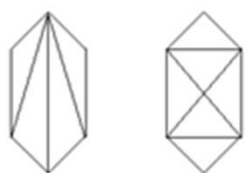
(1) 在图 (1)、(2) 中分别加适当根竹条，设计出两种不同的连接方案.

(2) 通过上面的设计，可以看出至少需再加 _ 根竹条，才能保证风筝骨架稳固、美观和实用.

(3) 在上面的方案设计过程中，你所应用的数学道理是.

【答案】(1) 答案见解析；(2) 三；(3) 三角形的稳定性.

【详解】解：(1) 如图所示（答案不唯一）





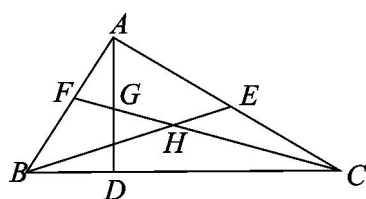
(2) 至少要三根

故答案为：三；

(3) 三角形的稳定性.

【题型 14 三角形中的角平分线、中线、高有关的综合计算】

【例 14】(2023 秋·湖北十堰·七年级统考期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=6$, $AC=8$, $BC=10$, AD 是高, BE 是中线, CF 是角平分线, CF 交 AD 于点 G , 交 BE 于点 H , 下面结论: ① $\triangle ABE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积; ② $\angle AFG = \angle AGF$; ③ $\angle FAG = 2\angle ACF$; ④ $AD=2.4$. 其中结论正确的是 ()



A. ①②

B. ①②④

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】C

【分析】根据三角形角平分线和高线的性质可确定角之间的数量关系; 根据三角形的中线和面积公式可确定 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCE$ 的面积关系以及求出 AD 的长度.

【详解】解: $\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线

$$\therefore AE=EC$$

$\therefore \triangle ABE$ 的面积等于 $\triangle BCE$ 的面积

故①正确;

$\because \angle BAC=90^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的高

$$\therefore \angle AFG + \angle ACG = 90^\circ, \angle DCG + \angle DGC = 90^\circ$$

$\because CF$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

$$\angle ACG = \angle DCG$$

$$\therefore \angle AFG = \angle DGC$$

$$\text{又} \because \angle DGC = \angle AGF$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AGF$$

故②正确;

$$\therefore \angle FAG + \angle DAC = \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FAG = \angle ACD$$



$$\because \angle ACD = \angle ACF + \angle DCF = 2\angle ACF$$

$$\therefore \angle FAG = 2\angle ACF$$

故③正确；

$$\because 2S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC = BC \cdot AD$$

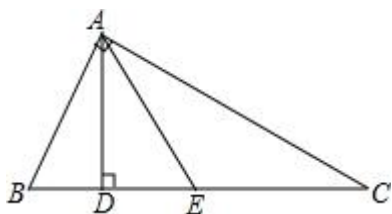
$$\therefore AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$$

故④错误；

故选：C

【点睛】本题考查了三角形的中线、高、角平分线，灵活运用三角形的中线、高、角平分线的性质是解决本题的关键。

【变式 14-1】(2023 秋·江西南昌·七年级校考期末)如图所示，已知 AD, AE 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线， $AB=3\text{cm}$ ， $AC=4\text{cm}$ ， $BC=5\text{cm}$ ， $\angle CAB=90^\circ$ 。



(1)求 AD 的长。

(2)求 $\triangle ABE$ 的面积。

【答案】(1) $\frac{12}{5}\text{cm}$ ；(2) 3cm^2

【分析】(1) 利用“面积法”来求线段 AD 的长度；

(2) $\triangle AEC$ 与 $\triangle ABE$ 是等底同高的两个三角形，它们的面积相等

【详解】解： $\because \angle BAC=90^\circ$ ， AD 是边 BC 上的高，

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$$

$$\therefore AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} (\text{cm}), \text{ 即 } AD \text{ 的长度为 } \frac{12}{5}\text{cm};$$

(2) 如图， $\because \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=3\text{cm}$ ， $AC=4\text{cm}$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 (\text{cm}^2).$$

又 $\because AE$ 是边 BC 的中线，

$$\therefore BE=EC,$$



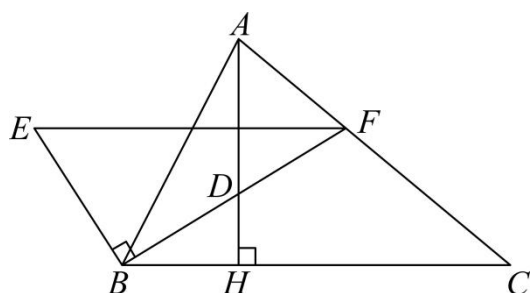
$$\therefore \frac{1}{2}BE \cdot AD = \frac{1}{2}EC \cdot AD, \text{ 即 } S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AEC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积是 } 3\text{cm}^2.$$

【点睛】本题考查了中线的性质．解题的关键是利用三角形面积的两个表达式相等，求出 AD ．

【变式 14-2】(2023 春·陕西商洛·七年级统考期末)如图,在三角形 ABC 中, $AH \perp BC$, BF 平分 $\angle ABC$, $BE \perp BF$, $EF \parallel BC$, 以下四个结论: ① $AH \perp EF$; ② $\angle ABF = \angle EFB$; ③ $AC \parallel BE$; ④ $\angle E = \angle ABE$. 其中正确的结论有 ()



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】B

【分析】根据平行线的性质、角平分线的定义、余角的性质等来判断即可．

【详解】解: $\because AH \perp BC$, $EF \parallel BC$,

$\therefore AH \perp EF$, 故①正确;

$\because BF$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABF = \angle CBF$,

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle EFB = \angle CBF$,

$\therefore \angle ABF = \angle EFB$, 故②正确;

$\because BE \perp BF$, 而 AC 与 BF 不一定垂直,

$\therefore BE \parallel AC$ 不一定成立, 故③错误;

$\because BE \perp BF$,

$\therefore \angle E$ 和 $\angle EFB$ 互余, $\angle ABE$ 和 $\angle ABF$ 互余, 而 $\angle EFB = \angle ABF$,

$\therefore \angle E = \angle ABE$, 故④正确.

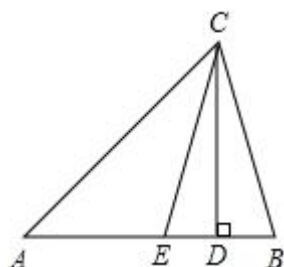
故选: B.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质, 角平分线的定义以及余角的性质等的运用, 解题时注意: 两直线平



行，内错角相等.

【变式 14-3】（2023 春·河南南阳·七年级统考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 是 AB 边上的高， CE 是 $\angle ACB$ 的平分线.



- (1) 若 $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle B = 76^\circ$ ，求 $\angle DCE$ 的度数；
- (2) 若 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \beta$ ，求 $\angle DCE$ 的度数（用含 α ， β 的式子表示）
- (3) 当线段 CD 沿 DA 方向平移时，平移后的线段与线段 CE 交于 G 点，与 AB 交于 H 点，若 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \beta$ ，求 $\angle HGE$ 与 α 、 β 的数量关系.

【答案】(1) $\angle DCE = 18^\circ$ ；； (2) $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ ； (3) $\angle HGE = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

【分析】(1) 根据三角形的内角和得到 $\angle ACB = 64^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle ECB = \frac{1}{2}\angle ACB = 32^\circ$ ，根据余角的定义得到 $\angle DCE = 90^\circ - \angle DEC = 18^\circ$ ，于是得出结论；

(2) 根据角平分线的定义得到 $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle ECB = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta)$ ，根据余角的定义得到 $\angle BCD = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \beta$ ，于是得出结论；

(3) 作出平移图，因为 $GH \parallel CD$ ，所以 $\angle HGE = \angle DCE$ ，由(2)得到 $\angle DCE = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ ，进而得到 $\angle HGE = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

【详解】解：(1) $\because \angle A = 40^\circ$ ， $\angle B = 76^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 40^\circ - 76^\circ = 64^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 64^\circ = 32^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle A + \angle ACE = 40^\circ + 32^\circ = 72^\circ,$$

$\because CD$ 是 AB 边上的高，

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ - \angle DEC = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ;$$



(2) $\because \angle A = \alpha, \angle B = \beta,$

$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \alpha - \beta,$

$\because CE$ 平分 $\angle ACB,$

$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta,$

$\therefore \angle DEC = \angle A + \angle ACE = \alpha + 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta,$

$\because CE$ 是 AB 边上的高,

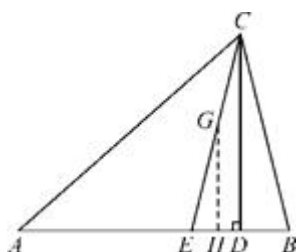
$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$

$\therefore \angle ECD = 90^\circ - \angle DEC$

$= 90^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta) = \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \alpha$

$= \frac{1}{2} (\beta - \alpha);$

(3) 如图, 由平移知 $GH \parallel CD$, 所以 $\angle HGE = \angle DCE,$



由 (2) 知 $\angle DCE = \frac{1}{2} (\beta - \alpha),$

所以 $\angle HGE = \angle DCE = \frac{1}{2} (\beta - \alpha),$

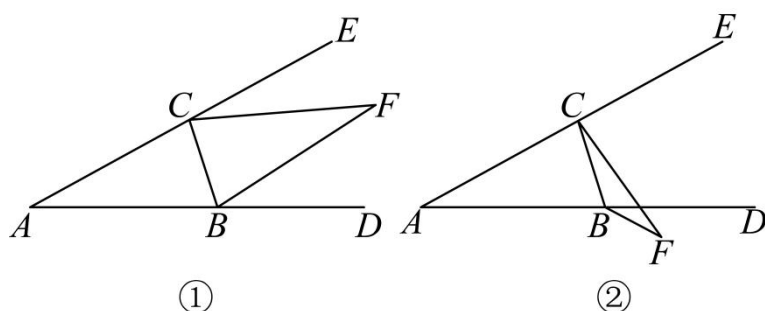
即 $\angle HGE$ 与 α, β 的数量关系

为 $\angle HGE = \frac{1}{2} (\beta - \alpha).$

【点睛】本题考查了三角形的内角和, 角平分线的定义, 熟练掌握三角形的内角和是解题的关键.

【题型 15 三角形的内角和与外角有关的计算】

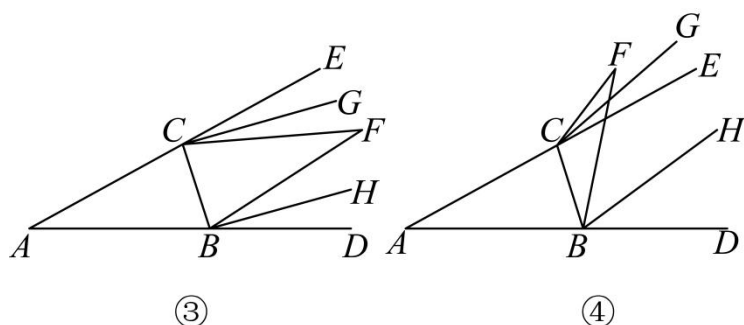
【例 15】(2023 春·江苏南京·七年级统考期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FBC$ 中, $\angle A \leq \angle F$. 点 F 与 A 位于线段 BC 所在直线的两侧, 分别延长 AB 、 AC 至点 D 、 E .



【特殊化思考】

若 $\angle A = \angle F$ 时，请尝试探究：

- (1) 当 F 在 $\angle A$ 内部时，请直接写出 $\angle ECF$ 、 $\angle DBF$ 与 $\angle A$ 的数量关系为_____；
- (2) 当 F 在 $\angle A$ 外部时，请直接写出 $\angle ECF$ 、 $\angle DBF$ 与 $\angle A$ 的数量关系为_____；
- (3) 若 CG 平分 $\angle ECF$ ， BH 平分 $\angle FBD$ 。无论点 F 在 $\angle A$ 内部（如图③）还是 $\angle A$ 外部（如图④）时，都有 $CG \parallel BH$ ，请选择一幅图进行证明；



【一般化探究】

若 $\angle A < \angle F$ 时，请尝试探究：

- (4) 若射线 CG 、 BH 分别是 $\angle ECF$ ， $\angle DBF$ 的 n 等分线（ n 为大于2的正整数），

且 $\angle ECG = \frac{1}{n} \angle ECF$ ， $\angle HBD = \frac{1}{n} \angle DBF$ 。当 $CG \parallel BH$ 时，直接写出 $\angle A$ 与 $\angle F$ 需满足的条件：_____。

【答案】（1） $\angle ECF + \angle DBF = 2\angle A$ ；（2） $\angle ECF - \angle DBF = 2\angle A$ ；（3）见解析；（4） $\angle F = (n-1)\angle A$

【分析】（1）根据三角形内角和定理及平角的定义得到 $\angle ECF + \angle DBF = \angle A + \angle F$ ，再根据 $\angle A = \angle F$ ，即可得出结论；

（2）根据三角形内角和定理及平角的定义得到 $\angle ECF - \angle DBF = \angle A + \angle F$ ，再根据 $\angle A = \angle F$ ，即可得出结论；

（3）选图3证明，根据角平分线的定义及（1）中的结论得出 $\angle GCF + \angle HBF = \angle F$ ，再根据平行线的性质与判定证明即可；

（4）先根据平行公理的推论得到 $FM \parallel BH$ ，再根据平行线的性质及角平分线的定义即可得出 $\angle A$ 与 $\angle F$ 的关系。



【详解】解：（1）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ ，

在 $\triangle FBC$ 中， $\angle F + \angle FBC + \angle FCB = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle FBC + \angle FCB = 360^\circ - (\angle A + \angle F),$$

$$\because \angle ECF + \angle ACB + \angle FCB = 180^\circ, \angle DBF + \angle ABC + \angle FBC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle FBC + \angle FCB = 360^\circ - (\angle ECF + \angle DBF),$$

$$\therefore \angle ECF + \angle DBF = \angle A + \angle F,$$

$$\because \angle A = \angle F,$$

$$\therefore \angle ECF + \angle DBF = 2\angle A,$$

故答案为： $\angle ECF + \angle DBF = 2\angle A$ ；

（2）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ ，

在 $\triangle FBC$ 中， $\angle F + \angle FBC + \angle FCB = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle FBC + \angle FCB = 360^\circ - (\angle A + \angle F),$$

$$\because \angle ECF + \angle ACB + \angle FCB = 180^\circ, \angle FBC - \angle DBF + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle FBC + \angle FCB = 360^\circ - (\angle ECF - \angle DBF),$$

$$\therefore \angle ECF - \angle DBF = \angle A + \angle F,$$

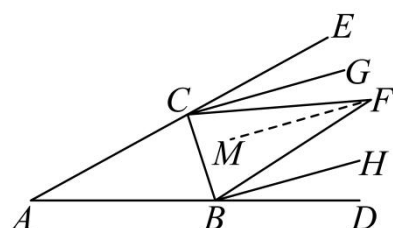
$$\because \angle A = \angle F,$$

$$\therefore \angle ECF - \angle DBF = 2\angle A,$$

故答案为： $\angle ECF - \angle DBF = 2\angle A$ ；

（3）选择图③，

证明：如图，



③

过点F作 $FM \parallel CG$ ，

$$\therefore \angle GCF = \angle CFM,$$

$\because CG$ 平分 $\angle ECF$ ， BH 平分 $\angle DBF$ ，



$$\therefore \angle GCF = \frac{1}{2}\angle ECF, \quad \angle HBF = \frac{1}{2}\angle DBF,$$

由(1)知 $\angle ECF + \angle DBF = 2\angle A = 2\angle F$,

$$\therefore \angle GCF + \angle HBF = \frac{1}{2}(\angle ECF + \angle DBF) = \angle F,$$

$$\therefore \angle CFM + \angle HBF = \angle F,$$

$$\because \angle CFM + \angle BFM = \angle F,$$

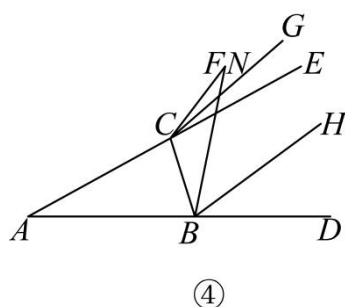
$$\therefore \angle HBF = \angle BFM,$$

$$\therefore FM \parallel BH,$$

$$\therefore CG \parallel BH;$$

选择图④,

证明: 如图, 设 BF 与 CG 交于点 N ,



$\because CG$ 平分 $\angle ECF$, BH 平分 $\angle DBF$,

$$\therefore \angle GCF = \frac{1}{2}\angle ECF, \quad \angle HBF = \frac{1}{2}\angle DBF,$$

同(2)可得: $\angle DBF - \angle ECF = 2\angle A$,

$$\because \angle A = \angle F,$$

$$\therefore \angle DBF - \angle ECF = 2\angle F,$$

$$\therefore \angle HBF - \angle GCF = \frac{1}{2}(\angle DBF - \angle ECF) = \angle F,$$

$\because \angle FNG$ 是 $\triangle FCN$ 的一个外角,

$$\therefore \angle FNG = \angle GCF + \angle F,$$

$$\text{即 } \angle FNG - \angle GCF = \angle F,$$

$$\therefore \angle FNG = \angle HBF,$$

$$\therefore CG \parallel BH;$$

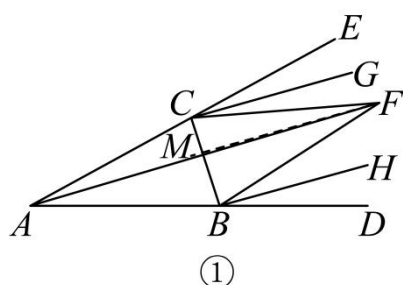
(4) 证明: $\because \angle A < \angle F$,



润禾托管

$\therefore F$ 只能在 $\angle A$ 内部,

如图, 过点 F 作 $FM \parallel CG$,



$\because CG \parallel BH$,

$\therefore FM \parallel BH$,

连接 AF ,

$\because FM \parallel CG$,

$\therefore \angle GCF = \angle CFM$,

又 $\because FM \parallel BH$,

$\therefore \angle HBF = \angle BFM$,

又 $\because \angle ECG = \frac{1}{n} \angle ECF$, $\angle HBD = \frac{1}{n} \angle DBF$,

$\therefore \angle GCF = \frac{n-1}{n} \angle ECF$, $\angle HBF = \frac{n-1}{n} \angle DBF$,

$\therefore \angle BFC = \angle CFM + \angle BFM$

$= \angle GCF + \angle HBF$

$= \frac{n-1}{n} \angle ECF + \frac{n-1}{n} \angle DBF$

$= \frac{n-1}{n} (\angle ECF + \angle DBF)$,

又 $\because \angle ECF = \angle CAF + \angle AFC$, $\angle DBF = \angle BAF + \angle AFB$,

$\therefore \angle ECF + \angle DBF = \angle CAF + \angle AFC + \angle BAF + \angle AFB = \angle BAC + \angle BFC$,

$\therefore \angle BFC = \frac{n-1}{n} (\angle BAC + \angle BFC)$,

$\therefore \frac{1}{n} \angle BFC = \frac{n-1}{n} \angle BAC$,

$\therefore \angle BFC = (n-1) \angle BAC$,

即 $\angle F = (n-1) \angle A$.

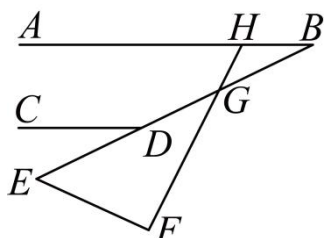
故答案为: $\angle F = (n-1) \angle A$.



润禾托管

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，平行线的性质及角平分线的定义，熟记三角形内角和是 180° 是解题的关键，同时应熟练掌握平行线的性质与判定及角平分线的定义。

【变式 15-1】(2023 秋·辽宁沈阳·七年级统考期末)如图，已知 $CD \parallel AB$ ，点 E 在 BD 延长线上，且 $\angle BEF = 70^\circ$ ，点 H 在 AB 上， HF 交 BD 于 G 点。



(1) 求证: $\angle AHF > \angle CDE$;

(2) 若 $\angle AHF - \angle CDE = 30^\circ$ ，求 $\angle F$ 的度数

【答案】(1) 见解析

(2) 80°

【分析】(1) 根据平行线的性质可得 $\angle B = \angle CDE$ ，根据三角形的外角性质可得 $\angle AHF > \angle B$ ，即可推得 $\angle AHF > \angle CDE$ ；

(2) 根据平行线的性质可得 $\angle B = \angle CDE$ ，结合题意可得 $\angle AHF - \angle B = 30^\circ$ ，根据三角形的外角性质可得 $\angle HGB = 30^\circ$ ，根据对顶角的性质可得 $\angle EGF = 30^\circ$ ，根据三角形内角和定理可得 $\angle F = 80^\circ$ 。

【详解】(1) 证明: $\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \angle B = \angle CDE,$$

$\because \angle AHF$ 是 $\triangle BHG$ 的一个外角,

$$\therefore \angle AHF > \angle B,$$

$$\therefore \angle AHF > \angle CDE.$$

(2) 解: $\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \angle B = \angle CDE,$$

$$\because \angle AHF - \angle CDE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AHF - \angle B = 30^\circ,$$

$\because \angle AHF$ 是 $\triangle BHG$ 的一个外角,

$$\therefore \angle AHF = \angle B + \angle HGB,$$



$$\therefore \angle HGB = \angle AHF - \angle B = 30^\circ,$$

$$\because \angle HGB = \angle EGF,$$

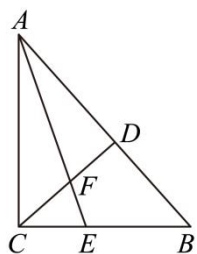
$$\therefore \angle EGF = 30^\circ,$$

$$\because \angle BEF = 70^\circ, \angle BEF + \angle EGF + \angle F = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 180^\circ - \angle BEF - \angle EGF = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ.$$

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形的外角性质，对顶角的性质，三角形内角和定理，熟练掌握以上性质是解题的关键。

【变式 15-2】(2023 春·江苏苏州·七年级苏州中学校考期中)已知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = \angle CDB = m^\circ (0 < m < 180)$ ， AE 是角平分线， D 是 AB 上的点， AE 、 CD 相交于点 F 。



(1) 若 $m = 90$ 时，如图所示，求证： $\angle CFE = \angle CEF$ ；

(2) 若 $m \neq 90$ 时，试问 $\angle CFE = \angle CEF$ 还成立吗？若成立说明理由；若不成立，请比较 $\angle CFE$ 和 $\angle CEF$ 的大小，并说明理由。

【答案】(1) 见解析；

(2) 不成立；当 $m > 90$ 时， $\angle CFE > \angle CEF$ ；当 $m < 90$ 时， $\angle CFE < \angle CEF$ ；理由见解析。

【分析】(1) 证明 $\angle CAE = \angle BAE$ ，由 $\angle ACB = \angle CDB = 90^\circ$ ，证明 $\angle ACD = \angle B$ ，由三角形的外角的性质可得 $\angle CFE = \angle ACD + \angle CAE$ ， $\angle CEF = \angle B + \angle BAE$ ，从而可得结论。

(2) 证明 $\angle CFE - \angle CEF = \angle ACF - \angle B$ ，结合三角形的内角和定理可得 $\angle CFE - \angle CEF = m - \angle BCD - (180 - m - \angle BCD) = 2m - 180$ ，再分两种情况可得结论。

【详解】(1) 证明： $\because AE$ 是角平分线，

$$\therefore \angle CAE = \angle BAE,$$

$$\because \angle ACB = \angle CDB = m^\circ (0 < m < 180), m = 90,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ = \angle BCD + \angle B,$$



$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$$\because \angle CFE = \angle ACD + \angle CAE, \angle CEF = \angle B + \angle BAE,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF.$$

(2) 不成立. 理由如下:

$$\because \angle CFE = \angle CAF + \angle ACF, \angle CEF = \angle B + \angle EAB, \angle CAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle CFE - \angle CEF = \angle ACF - \angle B,$$

$$\because \angle ACB = \angle CDB = m^\circ (0 < m < 180),$$

$$\therefore \angle CFE - \angle CEF = m - \angle BCD - (180 - m - \angle BCD) = 2m - 180$$

$$\text{当 } m > 90 \text{ 时, } \angle CFE - \angle CEF = 2m - 180 > 0,$$

$$\therefore \angle CFE > \angle CEF;$$

$$\text{当 } m < 90 \text{ 时, } \angle CFE - \angle CEF = 2m - 180 < 0,$$

$$\therefore \angle CFE < \angle CEF.$$

【点睛】 本题考查的是三角形的角平分线是含义，三角形的内角和定理的应用，三角形的外角的性质，不等式的性质，熟记三角形的外角的性质是解本题的关键.

【变式 15-3】 (2023 春·江苏无锡·七年级统考期中) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 上一点, 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折后得到 $\triangle AED$, 边 AE 交射线 BC 于点 F .

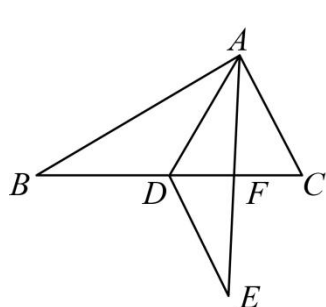


图 1

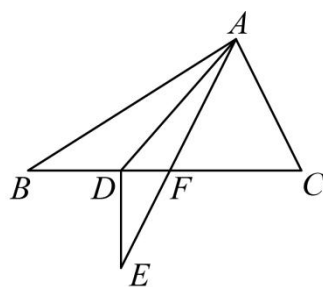
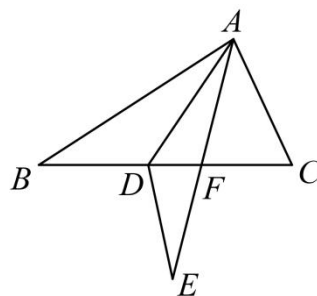


图 2



备用图

(1) 如图 1, 当 $DE \parallel AC$ 时, 求证: $AE \perp BC$

(2) 若 $\angle C = \angle B + 10^\circ$, $\angle BAD = x^\circ$ ($0 < x < 50$)

① 如图 2, 当 $DE \perp BC$ 时, 求 x 的值.

② 是否存在这样的 x 的值, 使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等. 若存在, 求 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 详见解析

(2) ① 5° ; ② 存在这样的 x 的值, 使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等, 且 $x = 15$ 或 30



【分析】(1) 根据平行线和翻折的性质, 推出 $\angle EAC = \angle B$, 进而推出 $\angle EAC + \angle C = 90^\circ$, 即 $\angle AFC = 90^\circ$, 即可得证;

(2) ①根据三角形的内角和定理, 求出 $\angle B, \angle C$ 的度数, 翻折得到 $\angle E = \angle B = 40^\circ$, 进而求出 $\angle BFE$ 的度数, 根据三角形外角的性质, 求出 $\angle BAF$ 的度数, 再根据翻折即可得出结果; ②分 $\angle EDF = \angle DFE$, $\angle EDF = \angle E = 40^\circ$, $\angle DFE = \angle E = 40^\circ$ 三种情况讨论求解即可.

【详解】(1) $\because DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle E = \angle EAC.$$

$\because$ 翻折,

$$\therefore \angle E = \angle B,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle B$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ \text{ 即 } AE \perp BC$$

$$(2) \text{ ① } \because \angle C = \angle B + 10^\circ, \angle C + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 50^\circ, \angle B = 40^\circ$$

$$\because DE \perp BC, \angle E = \angle B = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = 50^\circ.$$

$$\because \angle BFE = \angle B + \angle BAF,$$

$$\therefore \angle BAF = 10^\circ,$$

由翻折可知, $x = \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAF = 5^\circ$;

$$\text{② } \angle BAD = x^\circ, \text{ 则 } \angle FDE = \angle ADE - \angle ADC = 140^\circ - x - (40^\circ + x) = (100 - 2x)^\circ, \angle DFE = (2x + 40)^\circ$$

当 $\angle EDF = \angle DFE$ 时, $100 - 2x = 2x + 40$, 解得, $x = 15$,

当 $\angle EDF = \angle E = 40^\circ$, $100 - 2x = 40$, 解得, $x = 30$,

当 $\angle DFE = \angle E = 40^\circ$ 时, $2x + 40 = 40$, 解得, $x = 0$, $\because 0 < x < 50$,

$\therefore$ 不合题意, 舍去,

综上所述, 存在这样的 x 的值, 使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等, 且 $x = 15$ 或 30 .



润禾托管

【点睛】 本题考查与折叠有关的三角形的内角和问题，以及三角形的外角的性质，熟练掌握折叠的性质，三角形的内角和定理，以及三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角和，是解题的关键.