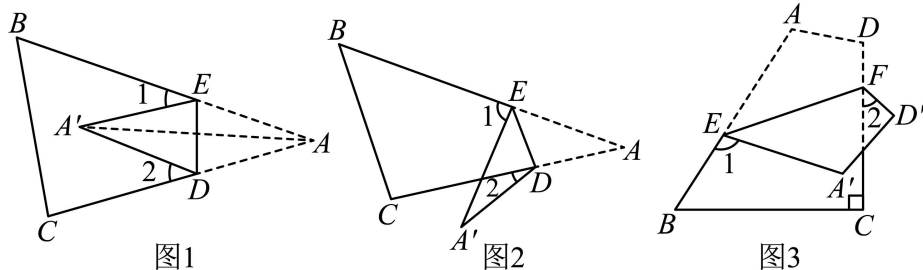


专题 06 三角形折叠中的角度问题

【例题讲解】

【原题再现】有这样一道题：



如图 1，将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠，使点 A 落在四边形 $BCDE$ 内点 A' 的位置．试探索 $\angle A$ 与 $\angle 1 + \angle 2$ 之间的数量关系，并说明理由．

(1) 小明提出一种正确的解题思路：

连接 AA' ，则 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 分别为 $\triangle AEA'$ 、 $\triangle ADA'$ 的外角，……

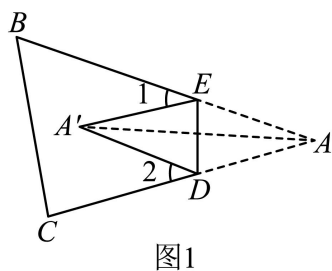
请你按照小明的思路解决上述问题．

(2) 【变式探究】如图 2，若将原题中“点 A 落在四边形 $BCDE$ 内点 A' 的位置”变为“点 A 落在四边形 $BCDE$ 外点 A' 的位置”，试猜想此时 $\angle A$ 与 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系，并说明理由．

(3) 【结论运用】将四边形纸片 $ABCD$ ($\angle C = 90^\circ$ ， AB 与 CD 不平行) 沿 EF 折叠成图 3 的形状，若 $\angle 1 = 110^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，直接写出 $\angle ABC$ 的度数．

解：(1) 图 1 中，结论： $2\angle BAC = \angle 1 + \angle 2$ ，

理由是：连接 AA' ．



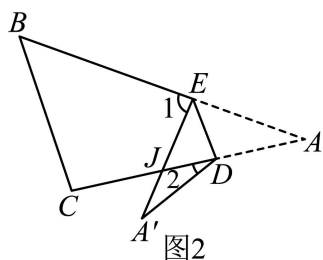
$\because$ 沿 DE 折叠 A 和 A' 重合，

$\therefore \angle DAE = \angle DA'E$ ， $\angle EA'A = \angle EAA'$ ， $\angle DA'A = \angle DAA'$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle EA'A + \angle EAA'$ ， $\angle 2 = \angle DA'A + \angle DAA'$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle EA'A + \angle EAA' + \angle DA'A + \angle DAA' = 2\angle BAC$ ；

(2) 如图 2，结论： $2\angle A = \angle 1 - \angle 2$ ．



理由：设 EA' 交 AC 于 J ．

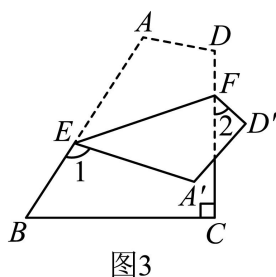
$\therefore \angle 1 = \angle EJA + \angle A$ ， $\angle EJA = \angle A' + \angle 2$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle A' + \angle A + \angle 2 = 2\angle A + \angle 2$ ，

$\therefore 2\angle A = \angle 1 - \angle 2$ ；

(2) 如图，

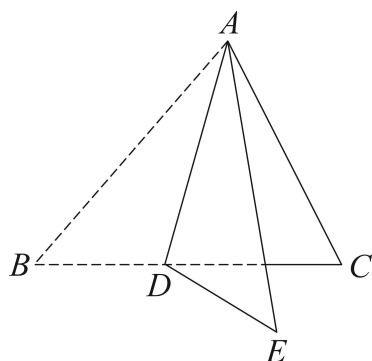
根据折叠知： $\angle AEF = \angle A'EF$ ， $\angle EFD = \angle EFD'$ ，



$\because \angle 1 = 110^\circ, \therefore \angle AEA' = 2\angle AEF = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$
 $\therefore \angle AEF = 35^\circ, \because \angle 2 = 40^\circ,$
 $\therefore 2\angle EFD = 180^\circ + \angle 2 = 220^\circ, \therefore \angle EFD = 110^\circ,$
 $\therefore \angle A + \angle D = 360^\circ - (\angle AEF + \angle EFD) = 215^\circ, \therefore \angle B = 360^\circ - (\angle A + \angle D) - \angle C = 55^\circ.$

【综合演练】

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 上的点, 将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折得到 $\triangle AED$, 若 $\angle B = \angle BAE = 50^\circ$, 则 $\angle CDE$ 的度数是 ()



- A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°

【答案】B

【分析】根据翻折的性质得到 $\angle BAD = \angle EAD = 25^\circ$, $\angle E = \angle B = 50^\circ$, 根据三角形内角和定理推出 $\angle ADE = \angle ADB = 105^\circ$, 进一步计算即可解答.

【详解】解: $\because \angle B = \angle BAE = 50^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折得到 $\triangle AED$,

$$\therefore \angle BAD = \angle EAD = 25^\circ, \angle E = \angle B = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADB = 180^\circ - 50^\circ - 25^\circ = 105^\circ,$$

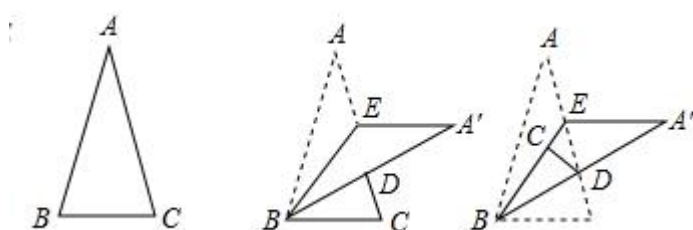
$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 105^\circ - 75^\circ = 30^\circ,$$

故选: B.

【点睛】此题考查翻折的性质, 三角形内角和定理, 关键是掌握翻折的性质.

2. 如图, $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 40^\circ$, E 是 AC 边上的点, 先将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 翻折, 翻折后 $\triangle ABE$ 的 AB 边交 AC 于点 D , 又将 $\triangle BCD$ 沿着 BD 翻折, 点 C 恰好落在 BE 上的点 G 处, 此时 $\angle BDC = 82^\circ$, 则原三角形的 $\angle B$ 的度数为 ()



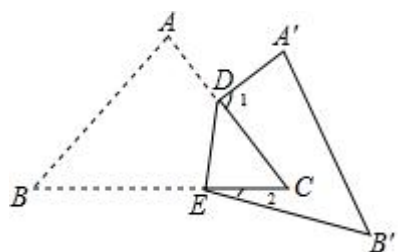
A. 57° B. 60° C. 63° D. 70° **【答案】C**

【分析】根据折叠的性质可知： $\angle BDG = \angle BDC = 82^\circ$ ， $\angle ABE = \angle A'BE = \angle A'BG = \angle A'BC$ ，根据三角形外角性质可得： $\angle DBA = \angle BDC - \angle A = 82^\circ - 40^\circ = 42^\circ$ ，进一步可求出 $\angle ABE = \angle A'BE = 21^\circ$ ， $\angle ABC = 3 \times 21^\circ = 63^\circ$ ，即原三角形的 $\angle B = 63^\circ$ 。

【详解】解：由折叠性质可得， $\angle BDG = \angle BDC = 82^\circ$ ， $\angle ABE = \angle A'BE = \angle A'BG = \angle A'BC$ ，
 $\because \angle BDC$ 是 $\triangle BDA$ 的外角，
 $\therefore \angle DBA = \angle BDC - \angle A = 82^\circ - 40^\circ = 42^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle A'BE = 21^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC = 3 \times 21^\circ = 63^\circ$ ，即原三角形的 $\angle B = 63^\circ$ ，
 故选：C。

【点睛】此题主要考查的是图形的折叠及三角形外角性质，能够根据折叠的性质发现 $\angle BDG = \angle BDC = 82^\circ$ ， $\angle ABE = \angle A'BE = \angle A'BG = \angle A'BC$ 是解答此题的关键。

3. 将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 按如图的方式折叠. 若 $\angle C = 50^\circ$ ， $\angle 1 = 85^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数等于（ ）

A. 10° B. 15° C. 20° D. 25° **【答案】B**

【分析】由四边形的内角和及三角形内角和即可求得。

【详解】 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，且 $\angle C = 50^\circ$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 130^\circ$$

同理，在 $\triangle CDE$ 中， $\angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle C = 130^\circ$

由折叠性质得： $\angle A' = \angle A$ ， $\angle B' = \angle B$

$$\therefore \angle A' + \angle B' = 130^\circ$$

在四边形 $A'B'ED$ 中， $\angle A' + \angle B' + \angle A'DE + \angle DEB' = 360^\circ$

$$\therefore \angle A' + \angle B' + \angle 1 + \angle CDE + \angle CED + \angle 2 = 360^\circ$$

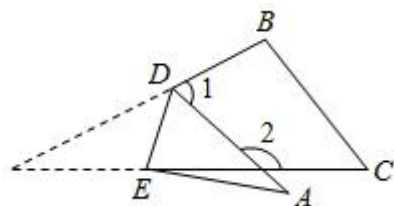
$$\therefore 130^\circ + 85^\circ + 130^\circ + \angle 2 = 360^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = 15^\circ$$

故选：B。

【点睛】本题考查了折叠的性质，多边形的内角和定理等知识，掌握多边形内角和定理及折叠的性质是关键。

4. 如图，将三角形纸片 ABC 沿 DE 折叠，当点 A 落在四边形 $BCDE$ 的外部时，测量得 $\angle 1 = 70^\circ$ ， $\angle 2 = 152^\circ$ ，则 $\angle A$ 为（ ）



- A. 40° B. 42° C. 30° D. 52°

【答案】B

【分析】利用四边形的内角和定理求出 $\angle B + \angle C$ ，再利用三角形的内角和定理可得结果.

【详解】解： $\because \angle 1 = 70^\circ$ ， $\angle 2 = 152^\circ$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C = 360^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 360^\circ - 70^\circ - 152^\circ = 138^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ,$$

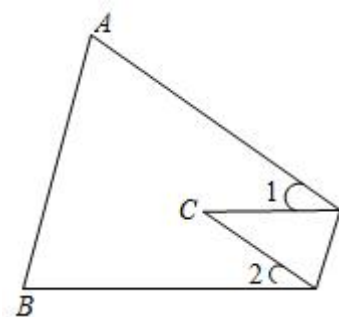
故选：B.

【点睛】此题考查了多边形内角与外角、三角形内角和定理，熟练掌握相关知识是解题的关键.

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

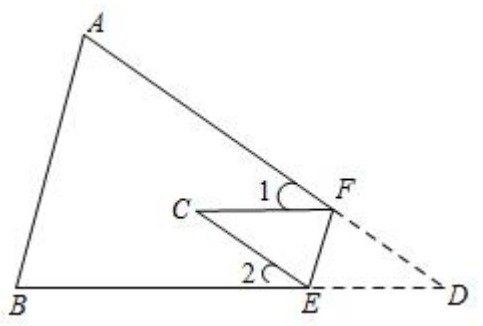
5. 如图，三角形纸片 ABC 中， $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$. 将三角形纸片的一角折叠，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 内，那么 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____ $^\circ$.



【答案】70

【分析】延长 AF 、 BE 交于点 D ，根据 $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，可得 $\angle D = 35^\circ$ ，由将纸片的一角折叠，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 内，可得 $\angle DFC + \angle DEC = 290^\circ$ ，即可得答案.

【详解】解：延长 AF 、 BE 交于点 D ，



$$\because \angle A = 70^\circ, \angle B = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle A - \angle B = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE + \angle DEF = 180^\circ - \angle D = 145^\circ,$$

$\because$ 将纸片的一角折叠，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 内，

$$\therefore \angle CFE = \angle DFE, \angle CEF = \angle DEF,$$

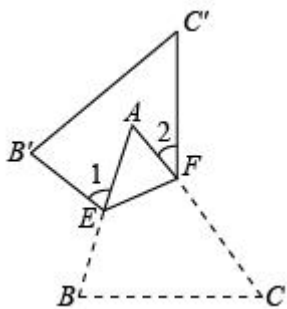
$$\therefore \angle DFC + \angle DEC = 2(\angle DFE + \angle DEF) = 290^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = (180^\circ - \angle DFC) + (180^\circ - \angle DEC) = 360^\circ - (\angle DFC + \angle DEC) = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ,$$

故答案为：70.

【点睛】本题考查三角形中的折叠问题，解题的根据是掌握折叠的性质，灵活应用三角形内角和定理.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，点 E 、 F 分别为边 AB 、 AC 上的点，把 $\triangle ABC$ 沿 EF 翻折，翻折后的图形如图所示. 若 $\angle 1 + \angle 2 = 110^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为_____.



【答案】 55°

【分析】如图，延长 $B'E$ 交 $C'F$ 的延长线于点 A' ，连接 AA' 。证明 $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle EAF$ ，可得结论.

【详解】解：如图，延长 $B'E$ 交 $C'F$ 的延长线于点 A' ，连接 AA' 。

$$\because \angle 1 = \angle EAA' + \angle EA'A, \angle 2 = \angle FAA' + \angle FA'A,$$

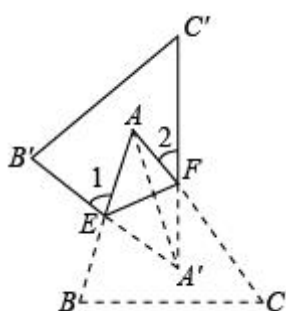
$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle EAF + \angle EA'F,$$

$$\because \angle EAF = \angle EA'F,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 2\angle EAF = 110^\circ,$$

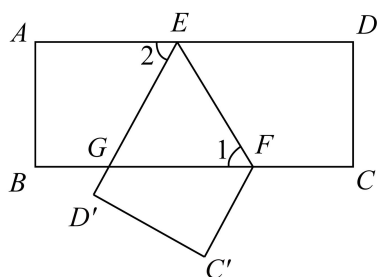
$\therefore \angle A = 55^\circ$.

故答案为： 55° .



【点睛】本题考查三角形内角和定理，翻折变换等知识，解题的关键是证明 $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle EAF$.

7. 如图，把一张长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠， $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____ $^\circ$.



【答案】70

【分析】根据长方形的对边平行知 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle DEF = \angle 1 = 55^\circ$ ，再根据折叠的性质知 $\angle GEF = \angle DEF = 55^\circ$ ，继而由 $\angle AEG = 180^\circ - \angle DEF - \angle GEF$ 可得答案.

【详解】解：由题意知 $AD \parallel BC$ ， $\angle 1 = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle DEF = \angle 1 = 55^\circ$ ，

根据折叠的性质知 $\angle GEF = \angle DEF = 55^\circ$ ，

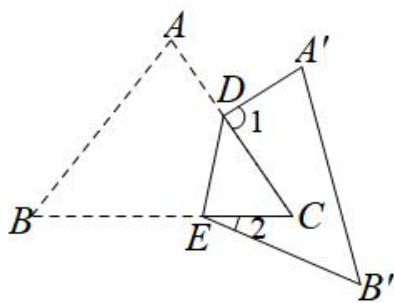
则 $\angle AEG = 180^\circ - \angle DEF - \angle GEF = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 70^\circ$ ，

故答案为：70.

【点睛】本题考查了平行线的性质和折叠的性质，解题的关键是掌握两直线平行内错角相等的性质、折叠的性质.

8. 将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 按如图的方式折叠. 若 $\angle C = 50^\circ$ ， $\angle 1 = 85^\circ$ ，则 $\angle 2$ 等于_____.



【答案】 15°

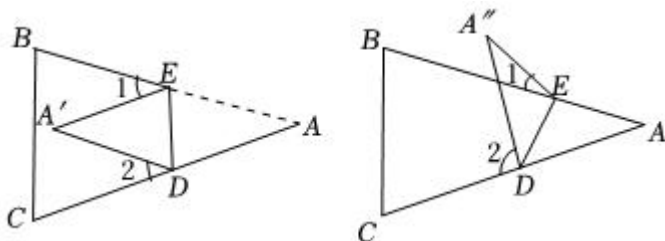
【分析】利用三角形的内角和定理以及折叠的性质，求出 $\angle CDE + \angle CED = 130^\circ$ ， $\angle A' + \angle B' = 130^\circ$ ，利用四边形内角和为 360° ，即可求出 $\angle 2$ 。

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 130^\circ$ ，
在 $\triangle CDE$ 中， $\angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle C = 130^\circ$ ，
由折叠性质可知： $\angle A' + \angle B' = \angle A + \angle B = 130^\circ$ ，
 $\therefore$ 四边形 $DEB'A'$ 的内角和为 360° ，
 $\therefore \angle A' + \angle B' + \angle A'DE + \angle B'ED = 360^\circ$ ，
 $\therefore \angle A'DE = \angle 1 + \angle CDE$ ， $\angle B'ED = \angle 2 + \angle CED$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + (\angle CDE + \angle CED) + \angle A' + \angle B' = 360^\circ$ ，
 $\therefore \angle CDE + \angle CED = 130^\circ$ ， $\angle A' + \angle B' = 130^\circ$ ，且 $\angle 1 = 85^\circ$ ，
 $\therefore \angle 2 = 15^\circ$ ，

故答案为： 15° 。

【点睛】本题主要是考查了三角形和四边形的内角和定理，熟练利用三角形内角和定理，求出两角之和，最后利用四边形的内角和求得某角的度数，这是解决该题的关键。

9. 如图，将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠，使点 A 落在四边形 $BCDE$ 内点 A' 的位置，



(1) 探索 $\angle A$ 与 $\angle 1 + \angle 2$ 之间的数量关系，并说明理由。

(2) 如果点 A 落在四边形 $BCDE$ 外点 A'' 的位置， $\angle A$ 与 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系有何变化，请说明理由。

【答案】 (1) $2\angle A = \angle 1 + \angle 2$ ，理由见解析

(2) $\angle A = \frac{1}{2}(\angle 2 - \angle 1)$ ，理由见解析

【分析】(1) 根据折叠性质得出 $\angle AED = \angle A'ED$, $\angle ADE = \angle A'DE$, 根据三角形内角和定理得出 $\angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A$, 代入 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ + 180^\circ - 2(\angle AED + \angle ADE)$ 求出即可;

(2) 先根据翻折的性质表示出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$, 再根据四边形的内角和定理列式整理即可得解.

(1)

$$2\angle A = \angle 1 + \angle 2,$$

理由是: $\because$ 沿 DE 折叠 A 和 A' 重合,

$$\therefore \angle AED = \angle A'ED, \angle ADE = \angle A'DE,$$

$$\because \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A, \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ + 180^\circ - 2(\angle AED + \angle ADE),$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle A) = 2\angle A.$$

(2)

$\because$ 沿 DE 折叠 A 和 A'' 重合,

$$\therefore \angle AED = \angle A''ED, \angle ADE = \angle A''DE,$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle A'ED - \angle BED = \angle AED - (180^\circ - \angle AED) = 2\angle AED - 180^\circ,$$

$$\angle 2 = 180^\circ - 2\angle ADE,$$

$$\angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \angle 1 + 90^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle 2 = 180^\circ - \angle A,$$

$$\text{即} \angle A = \frac{1}{2} (\angle 2 - \angle 1).$$

【点睛】本题考查了折叠的性质, 三角形外角性质, 三角形内角和定理及四边形内角和的应用, 主要考查学生运用定理进行推理和计算的能力.

10. 在我们苏科版义务教育教科书数学七下第 42 页曾经研究过双内角平分线的夹角和内外角平分线夹角问题. 聪聪在研究完上面的问题后, 对这类问题进行了深入的研究, 他的研究过程如下:

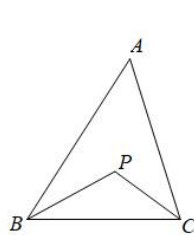


图1

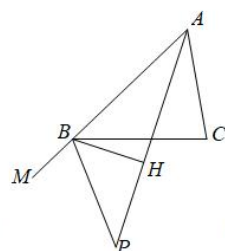


图2

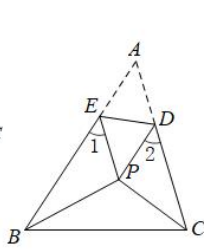


图3

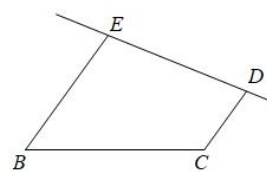


图4

(1) 【问题再现】

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线交于点 P , 若 $\angle A = 50^\circ$. 则 $\angle P =$ _____;

(2) 【问题推广】

如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBM$ 的角平分线交于点 P , 过

点 B 作 $BH \perp AP$ 于点 H , 若 $\angle ACB = 80^\circ$, 求 $\angle PBH$ 的度数.

(3) 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线交于点 P , 将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠使得点 A 与点 P 重合, 若 $\angle 1 + \angle 2 = 100^\circ$, 则 $\angle BPC =$ _____;

(4) 【拓展提升】

在四边形 $BCDE$ 中, $EB \parallel CD$, 点 F 在直线 ED 上运动 (点 F 不与 E, D 两点重合), 连接 BF, CF , $\angle EBF$ 、 $\angle DCF$ 的角平分线交于点 Q , 若 $\angle EBF = \alpha$, $\angle DCF = \beta$, 直接写出 $\angle Q$ 和 α, β 之间的数量关系.

【答案】(1) 115°

(2) $\angle PBH$ 的度数为 50°

(3) 115°

(4) F 在 E 左侧 $\angle Q = \frac{\beta - \alpha}{2}$; F 在 ED 中间 $\angle Q = \frac{\alpha + \beta}{2}$; F 在 D 右侧 $\angle Q = \frac{\alpha - \beta}{2}$

【分析】(1) 根据三角形内角和定理和角平分线的定义求解即可;

(2) 先由角平分线的定义得到 $\angle BAC = 2\angle BAP$, $\angle CBM = 2\angle CBP$, 再由三角形外角的性质得到 $\angle CBP = \angle BAP + 40^\circ$, 根据三角形内角和定理推出 $\angle P = 180^\circ - \angle BAP - \angle ABP = 40^\circ$, 再由垂线的定义得到 $\angle BHP = 90^\circ$, 则 $\angle PBH = 180^\circ - \angle P - \angle BHP = 50^\circ$;

(3) 先由折叠的性质和平角的定义得到 $\angle AED + \angle ADE = 130^\circ$, 进而求出 $\angle A = 50^\circ$, 同 (1) 即可得到答案;

(4) 分点 F 在点 E 左侧, 点 F 在 D, E 之间, 点 F 在点 D 右侧三种情况讨论求解即可.

(1)

解: $\because \angle A = 50^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 130^\circ$,

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$, CP 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ABC = 2\angle PBC$, $\angle ACB = 2\angle PCB$,

$\therefore 2\angle PBC + 2\angle PCB = 130^\circ$, 即 $\angle PBC + \angle PCB = 65^\circ$,

$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 115^\circ$,

故答案为: 115° ;

(2)

解: $\because AP$ 平分 $\angle BAC$, BP 平分 $\angle CBM$,

$\therefore \angle BAC = 2\angle BAP$, $\angle CBM = 2\angle CBP$,

$\because \angle CBM = \angle BAC + \angle ACB$,

$\therefore 2\angle CBP = 2\angle BAP + \angle ACB$,

$\therefore \angle CBP = \angle BAP + 40^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\because \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC, \\
&\therefore \angle ABC = 100^\circ - 2\angle BAP, \\
&\therefore \angle ABP = \angle ABC + \angle CBP = 140^\circ - \angle BAP, \\
&\therefore \angle P = 180^\circ - \angle BAP - \angle ABP = 40^\circ, \\
&\because BH \perp AP, \text{ 即 } \angle BHP = 90^\circ, \\
&\therefore \angle PBH = 180^\circ - \angle P - \angle BHP = 50^\circ;
\end{aligned}$$

(3)

解：由折叠的性质可得 $\angle AED = \angle PED$, $\angle ADE = \angle PDE$,

$$\because \angle 1 + \angle AEP = 180^\circ, \angle 2 + \angle ADP = 180^\circ, \angle 1 + \angle 2 = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP + \angle ADP = 260^\circ,$$

$$\therefore 2\angle AED + 2\angle ADE = 260^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle ADE = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle AED - \angle ADE = 50^\circ,$$

$$\therefore \text{同 (1) 原理可得 } \angle P = 115^\circ,$$

故答案为：115°；

(4)

解：当点 F 在点 E 左侧时，如图 4-1 所示，

$$\because BE \parallel CD,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because BQ \text{ 平分 } \angle EBF, CQ \text{ 平分 } \angle DCF,$$

$$\therefore \angle EBQ = \frac{1}{2}\angle EBF = \frac{\alpha}{2}, \angle QCF = \frac{1}{2}\angle DCF = \frac{\beta}{2},$$

$$\because \angle EBC + \angle FCB = 180^\circ - \angle DCF = 180^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle Q = 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB = 180^\circ - \angle QBE - \angle EBC - \angle FCB - \angle QCF = \frac{\beta - \alpha}{2};$$

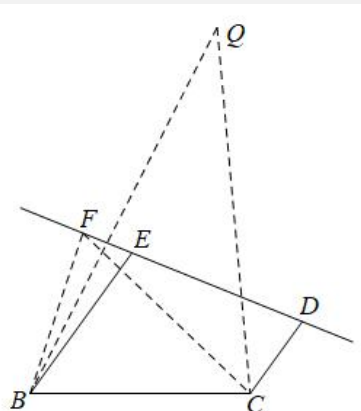


图4-1

当 F 在 D 、 E 之间时，如图 4-2 所示：

$$\text{同理可得 } \angle FBQ = \frac{1}{2} \angle EBF = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle QCF = \frac{1}{2} \angle DCF = \frac{\beta}{2},$$

$$\angle FBC + \angle FCB = 180^\circ - \angle DCF - \angle EBF = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\therefore \angle Q = 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB = 180^\circ - \angle QBF - \angle FBC - \angle FCB - \angle QCF = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

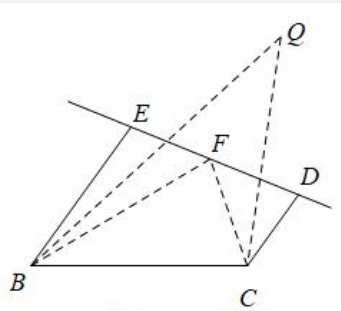


图4-2

当点 F 在 D 点右侧时，如图 4-3 所示：

$$\text{同理可得 } \angle Q = 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB = 180^\circ - \angle QBF - \angle FBC - \angle DCB - \angle QCD = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\text{综上所述, } F \text{ 在 } E \text{ 左侧 } \angle Q = \frac{\beta - \alpha}{2}; F \text{ 在 } ED \text{ 中间 } \angle Q = \frac{\alpha + \beta}{2}; F \text{ 在 } D \text{ 右侧 } \angle Q = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

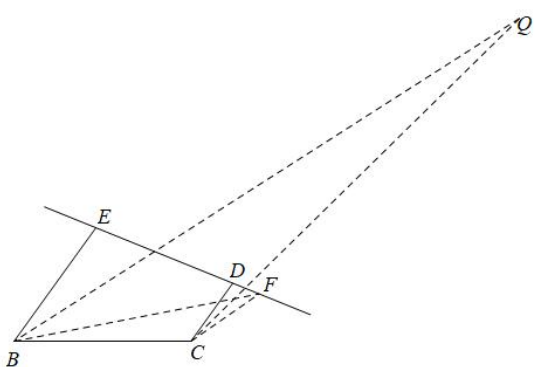
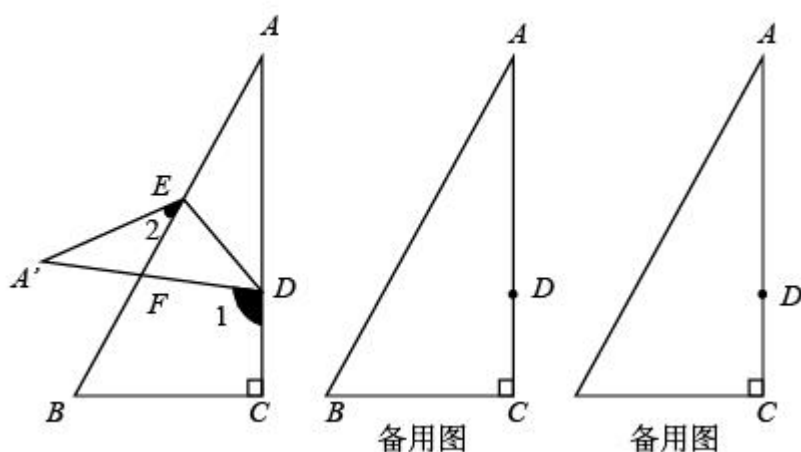


图4-3

【点睛】 本题主要考查了三角形内角和定理，角平分线的定义，三角形外角的性质，平行线的性质，垂线的定义，熟知相关知识是解题的关键。

11. 如图，将一张三角形纸片 ABC 的一角折叠，使得点 A 落在四边形 $BCDE$ 的外部 A' 的位置且 A' 与点 C 在直线 AB 的异侧，折痕为 DE ，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ 。



(1) 求 $\angle 1 - \angle 2$ 的度数;

(2) 若保持 $\triangle A'DE$ 的一边与 BC 平行, 求 $\angle ADE$ 的度数.

【答案】(1) 60° ; (2) 45° 或 30°

【分析】(1) 先求出 $\angle B$ 的度数, 在根据四边形内角和求出 $\angle 1 + \angle BFD$ 的度数, 由 $\angle BFD = \angle A'FE$ 和 $\angle A'$ 的度数可求出答案.

(2) 分 $EA' \parallel BC$ 和 $DA' \parallel BC$ 两种情况讨论. 当 $DA' \parallel BC$ 时, 先求出 $\angle A'DA = 90^\circ$, 再根据折叠可得出 $\angle ADE = 45^\circ$; 当 $EA' \parallel BC$ 时, 根据平行线的性质求出 $\angle 2 = \angle ABC = 60^\circ$, 由 (1) 得出 $\angle 1 = 120^\circ$, 再根据折叠可求出 $\angle ADE$ 的度数.

【详解】解: (1) 由折叠可知, $\angle A' = \angle A = 30^\circ$

在 $\triangle A'EF$ 中, $\angle A' + \angle 2 + \angle A'FE = 180^\circ$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle A' - \angle AFE = 150^\circ - \angle AFE$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 60^\circ$

在四边形 $BCDF$ 中, $\angle 1 + \angle C + \angle B + \angle BFD = 360^\circ$

$$\therefore \angle 1 = 360^\circ - \angle C - \angle B - \angle BFD = 210^\circ - \angle BFD$$

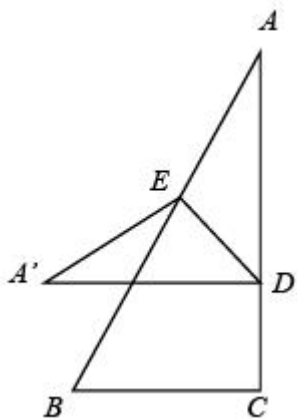
因为 $\angle BFD = \angle A'FE$

$$\therefore \angle 1 - \angle 2 = 210^\circ - 150^\circ = 60^\circ$$

(2) ①当 $DA' \parallel BC$ 时, $\angle ADA' = \angle ACB = 90^\circ$

$\triangle ADE$ 沿 DE 折叠 $\triangle A'DE$

$$\therefore \angle ADE = \angle A'DE = \frac{1}{2} \angle ADA' = 45^\circ$$



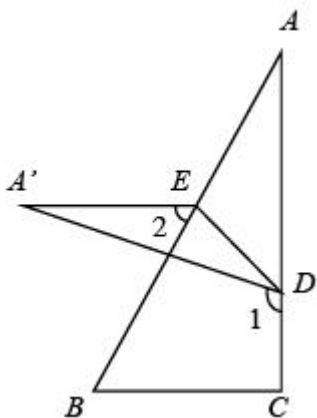
②当 $EA' \parallel BC$ 时, $\angle 2 = \angle ABC = 60^\circ$

由 (1) 知, $\angle 1 - \angle 2 = 60^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 + 60^\circ = 120^\circ$,

$\triangle ADE$ 沿 DE 折叠 $\triangle A'DE$

$\therefore \angle ADE = \angle A'DE = \frac{1}{2} \angle ADA' = (180^\circ - \angle 1) = 30^\circ$

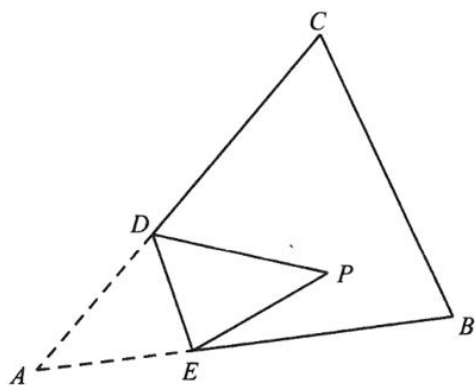


综上, $\angle ADE$ 的度数为: 45° 或 30° .

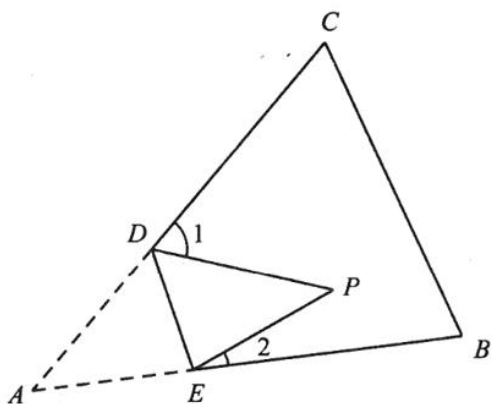
【点睛】本题考查了翻折变换的性质, 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和, 三角形的内角和等于 180° , 平行线的性质, 属于综合题, 但难度不大. 熟记性质准确识图是解题的关键.

12. 将 $\triangle ABC$ 纸片的一角 $\angle CAB$ 折叠, 使点 A 落在点 P 的位置, 折痕为 DE .

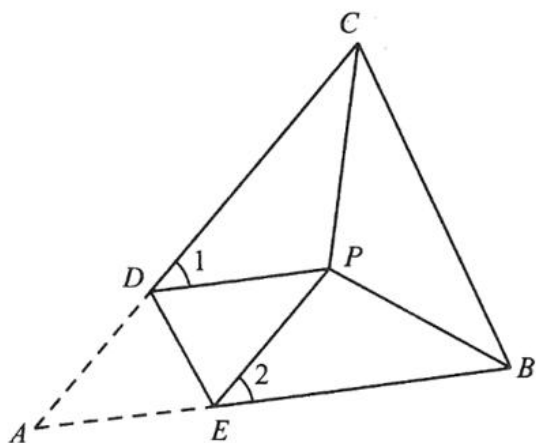
(1) 如图 1, 点 A 落在 $\triangle ABC$ 内的点 P 的位置.



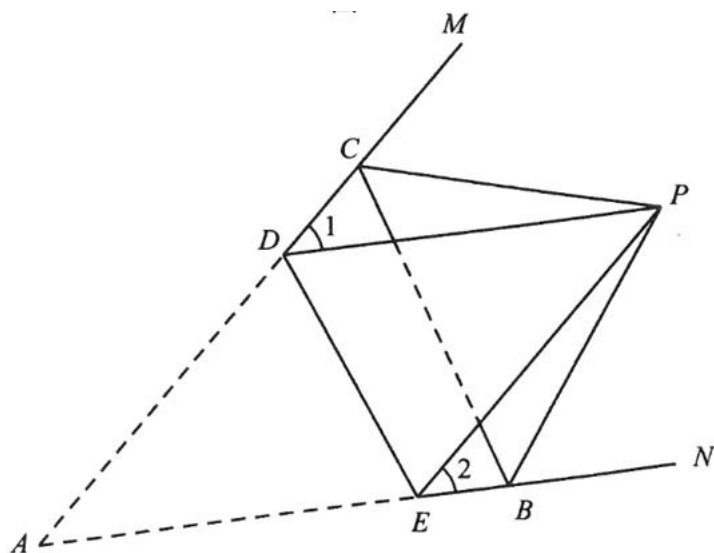
- ①若 $PE \parallel AC$ ，那么 PD 与 AB 有怎样的位置关系，请说明理由；
 ②如图 2， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 与 $\angle A$ 之间有怎样的数量关系？并说明理由；



- ③连接 CP 、 BP ，已知 CP 、 BP 恰好分别平分 $\angle ACB$ 、 $\angle ABC$ （如图 3）， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 与 $\angle CPB$ 之间有怎样的数量关系，并说明理由；



- (2) 如图 4，点 A 落在 $\triangle ABC$ 外的点 P 的位置．连接 CP 、 BP ，如果 CP 、 BP 恰好分别平分 $\triangle ABC$ 的两个外角 $\angle MCB$ ， $\angle NBC$ ，那么 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 与 $\angle CPB$ 之间的数量关系是_____．（请直接写出结果）



【答案】(1) ① $PD \parallel AB$ ，理由见解析；② $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$ ，理由见解析；

③ $\angle 1 + \angle 2 + 360^\circ = 4\angle CPB$ ，理由见解析；(2) $\angle 1 + \angle 2 + 4\angle CPB = 360^\circ$ ，理由见解析

【分析】(1) ①若 $PE \parallel AC$ ，则可推出 $\angle ADE = \angle DEP$ ，然后根据翻折的性质可推出

$\angle PDE = \angle DEA$ ，从而得出结论即可；②根据翻折的性质推出

$\angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 2(\angle ADE + \angle AED)$ ，然后结合三角形的内角和推出

$180^\circ - \angle A = \angle ADE + \angle AED$ ，从而代入替换得出结论即可；③根据 CP 、 BP 恰好分别平分

$\angle ACB$ 、 $\angle ABC$ ，可推出 $\angle PCB + \angle PBC = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC)$ ，然后结合②的结论进行变

形整理即可；

(2) 根据题意可推出 $\frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) = \angle CPB$ ，然后结合三角形的内角和以及(1)中

②的结论，综合整理求解即可。

【详解】(1) $PD \parallel AB$ ，理由如下：

$\because PE \parallel AC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle DEP$ ，

由翻折的性质可得： $\angle ADE = \angle PDE$ ， $\angle AED = \angle PED$ ，

$\therefore \angle PDE = \angle DEA$ ，

$\therefore PD \parallel AB$ ；

② $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$ ，理由如下：

由翻折的性质可得： $\angle ADE = \angle PDE$ ， $\angle AED = \angle PED$ ，

$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 2\angle ADE$ ， $\angle 2 = 180^\circ - 2\angle AED$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 2(\angle ADE + \angle AED)$ ，

在 $\triangle ADE$ 中， $180^\circ - \angle A = \angle ADE + \angle AED$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle A) = 2\angle A$ ，

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 2\angle A;$$

③ $\angle 1 + \angle 2 + 360^\circ = 4\angle CPB$ ，理由如下：

$\because CP、BP$ 恰好分别平分 $\angle ACB、\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB, \quad \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\therefore \angle PCB + \angle PBC = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC),$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle A$ ，

由②可知， $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$ ，

$$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2),$$

在 $\triangle PBC$ 中， $\angle PCB + \angle PBC = 180^\circ - \angle CPB$ ，

$$\therefore 180^\circ - \angle CPB = \frac{1}{2}\left[180^\circ - \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)\right],$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + 360^\circ = 4\angle CPB;$$

(2) $\angle 1 + \angle 2 + 4\angle CPB = 360^\circ$ ，理由如下：

$\because CP、BP$ 恰好分别平分 $\triangle ABC$ 的两个外角 $\angle MCB, \angle NBC$ ，

$$\therefore \angle PCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB), \quad \angle PBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC),$$

$\therefore$ 在 $\triangle PBC$ 中， $\angle PCB + \angle PBC = 180^\circ - \angle CPB$ ，

$$\text{即：} \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 180^\circ - \angle CPB,$$

$$\text{整理得：} \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) = \angle CPB,$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle A$ ，

由②可知， $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$ ，

$$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2),$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[180^\circ - \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)\right] = \angle CPB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + 4\angle CPB = 360^\circ.$$

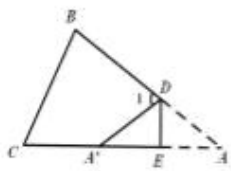
【点睛】本题考查三角形的翻折问题，内角和与外角定理，以及角平分线的定义等，掌握基本性质，熟练运用基本定理是解题关键。

13. 问题 1：现有一张 $\triangle ABC$ 纸片，点 $D、E$ 分别是 $\triangle ABC$ 边上两点，若沿直线 DE 折叠。

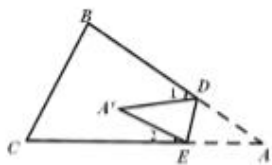
(1) 探究 1：如果折成图①的形状，使 A 点落在 CE 上，则 $\angle 1$ 与 $\angle A$ 的数量关系是_____；

(2) 探究 2：如果折成图②的形状，猜想 $\angle 1 + \angle 2$ 和 $\angle A$ 的数量关系是_____；

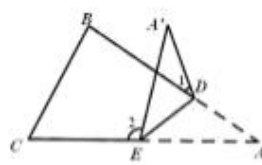
(3) 探究 3：如果折成图③的形状，猜想 $\angle 1、\angle 2$ 和 $\angle A$ 的数量关系，并说明理由。



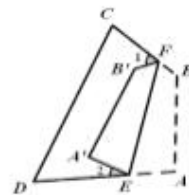
图①



图②



图③



图④

(4) 问题 2: 将问题 1 推广, 如图④, 将四边形 ABCD 纸片沿 EF 折叠, 使点 A、B 落在四边形 EFCD 的内部时, $\angle 1 + \angle 2$ 与 $\angle A$ 、 $\angle B$ 之间的数量关系是_____.

【答案】(1) $\angle 1 = 2\angle A$; (2) $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$; (3) 见解析; (4) $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A + 2\angle B - 360^\circ$

【分析】(1) 根据三角形外角性质可得;

(2) 在四边形 $A'EAD$ 中, 内角和为 360° , $\angle BDA = \angle CEA = 180^\circ$, 利用这两个条件, 进行角度转化可得关系式;

(3) 如下图, 根据 (1) 可得 $\angle 1 = 2\angle DAA'$, $\angle 2 = 2\angle EAA'$, 从而推导出关系式;

(4) 根据平角的定义以及四边形的内角和定理, 与 (2) 类似思路探讨, 可得关系式.

【详解】(1) $\because \triangle EDA'$ 是 $\triangle EDA$ 折叠得到

$$\therefore \angle A = \angle A'$$

$\because \angle 1$ 是 $\triangle ADA'$ 的外角

$$\therefore \angle 1 = \angle A + \angle A'$$

$$\therefore \angle 1 = 2\angle A;$$

(2) $\because$ 在四边形 $A'EAD$ 中, 内角和为 360°

$$\therefore \angle A + \angle A' + \angle A'DA + \angle A'EA = 360^\circ$$

同理, $\angle A = \angle A'$

$$\therefore 2\angle A + \angle A'DA + \angle A'EA = 360^\circ$$

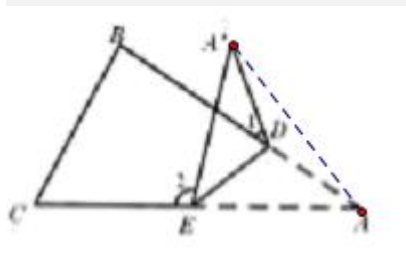
$$\because \angle BDA = \angle CEA = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle A'DA + \angle A'EA + \angle 2 = 360^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 2\angle A;$$

(3) 数量关系: $\angle 2 - \angle 1 = 2\angle A$

理由: 如下图, 连接 AA'



由 (1) 可知: $\angle 1 = 2\angle DAA'$, $\angle 2 = 2\angle EAA'$

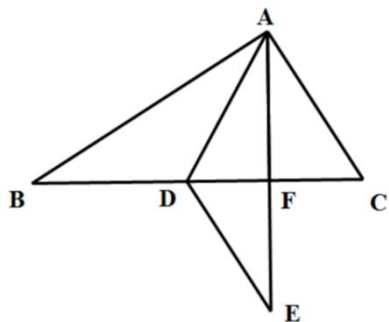
$$\therefore \angle 2 - \angle 1 = 2(\angle EAA' - \angle DAA') = 2\angle DAE ;$$

(4) 由折叠性质知: $\angle 2 = 180^\circ - 2\angle AEF$, $\angle 1 = 180^\circ - 2\angle BFE$

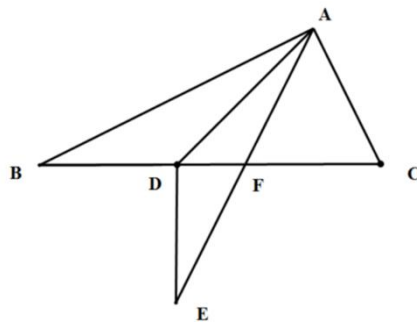
相加得: $\angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 2(360^\circ - \angle A - \angle B) = 2\angle A + 2\angle B - 360^\circ$.

【点睛】本题考查角度之间的关系,(4)问的解题思路是相同的,主要运用三角形的内角和定理和四边形的内角和定理进行角度转换.

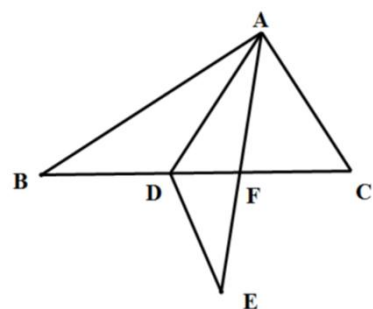
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点D是BC上一点, 将 $\triangle ABD$ 沿AD翻折后得到 $\triangle AED$, 边AE交射线BC于点F. (友情提醒: 翻折前后的两个三角形的对应边相等, 对应角相等.)



图①



图②



备用图

(1) 如图①, 当 $AE \perp BC$ 时, 求证: $DE \parallel AC$.

(2) 若 $\angle C - \angle B = 10^\circ$, $\angle BAD = x^\circ$.

①如图②, 当 $DE \perp BC$ 时, 求 x 的值;

②是否存在这样的 x 的值, 使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等. 若存在, 并求 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 见解析; (2) ① $x = 5$, ② 存在, $x = 15$ 或 30 .

【分析】(1) 根据折叠的性质得到 $\angle B = \angle E$, 根据平行线的判定定理证明;

(2) ①根据三角形内角和定理分别求出 $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 根据折叠的性质计算即可; ②分 $\angle EDF = \angle DFE$ 、 $\angle DFE = \angle E$ 、 $\angle EDF = \angle E$ 三种情况, 列方程解答即可.

【详解】(1) $\because AE \perp BC$

$$\therefore \angle EAC + \angle C = 90^\circ$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle EAC$$

$\because$ 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折后得到 $\triangle AED$

$$\therefore \angle B = \angle E$$

$$\therefore \angle EAC = \angle E$$

$$\therefore DE \parallel AC$$

$$(2) \textcircled{1} \because \angle B + \angle C = 90^\circ, \angle C - \angle B = 10^\circ$$

$$\therefore \angle B = 40^\circ, \angle C = 50^\circ$$

$$\because DE \perp BC$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ$$

$\because$ 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折后得到 $\triangle AED$

$$\therefore \angle B = \angle E = 40^\circ, \angle BAD = \angle EAD = x^\circ$$

$$\therefore \angle DFE = 50^\circ$$

$$\because \angle DFE = \angle B + \angle BAF$$

$$\therefore 2x + 40 = 50$$

$$\therefore x = 5$$

$$\textcircled{2} \text{ 由题意可得, } \angle ADC = 40 + x, \angle ABD = 140 - x,$$

$$\angle EDF = 140 - x - (40 + x) = 100 - 2x$$

$$\angle DFE = 40 + 2x$$

$$(i) \text{ 若 } \angle EDF = \angle DFE, \text{ 可得 } 100 - 2x = 40 + 2x, \text{ 解得 } x = 15$$

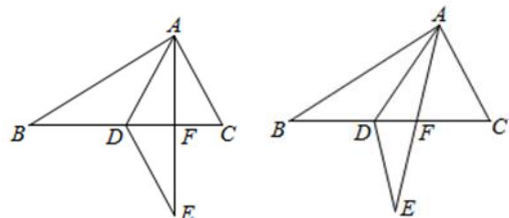
$$(ii) \text{ 若 } \angle EDF = \angle E, \text{ 可得 } 100 - 2x = 40 \text{ 解得 } x = 30$$

$$(iii) \text{ 若 } \angle DFE = \angle E, \text{ 可得 } 40 + 2x = 40 \text{ 解得 } x = 0 \text{ (舍去)}$$

综上可得 $x = 15$ 或 30 .

【点睛】本题考查了三角形折叠中的角度问题，熟知折叠的性质，平行的判定定理是解题的关键.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 上一点, 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折后得到 $\triangle AED$, 边 AE 交 BC 于点 F .



图①

(备用图)

(1) 如图①, 当 $AE \perp BC$ 时, 写出图中所有与 $\angle B$ 相等的角: _____; 所有与 $\angle C$ 相等的角: _____.

(2) 若 $\angle C - \angle B = 50^\circ$, $\angle BAD = x^\circ (0 < x \leq 45)$.

① 求 $\angle B$ 的度数;

② 是否存在这样的 x 的值,使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等.若存在,并求 x 的值;若不存在,请说明理由.

【答案】(1) $\angle E$ 、 $\angle CAF$; $\angle CDE$ 、 $\angle BAF$; (2)① 20° ; ② 30

【分析】(1) 由翻折的性质和平行线的性质即可得与 $\angle B$ 相等的角;由等角代换即可得与 $\angle C$ 相等的角;

(2) ① 由三角形内角和定理可得 $\angle B + \angle C = 90^\circ$,再由 $\angle C - \angle B = 50^\circ$ 根据角的和差计算即可得 $\angle C$ 的度数,进而得 $\angle B$ 的度数.

② 根据翻折的性质和三角形外角及三角形内角和定理,用含 x 的代数式表示出 $\angle FDE$ 、 $\angle DFE$ 的度数,分三种情况讨论求出符合题意的 x 值即可.

【详解】(1) 由翻折的性质可得: $\angle E = \angle B$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AE \perp BC$,

$\therefore \angle DFE = 90^\circ$,

$\therefore 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle DFE = 90^\circ$,

即: $\angle B + \angle C = \angle E + \angle FDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle FDE$,

$\therefore AC \parallel DE$,

$\therefore \angle CAF = \angle E$,

$\therefore \angle CAF = \angle E = \angle B$

故与 $\angle B$ 相等的角有 $\angle CAF$ 和 $\angle E$;

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AE \perp BC$,

$\therefore \angle BAF + \angle CAF = 90^\circ$, $\angle CFA = 180^\circ - (\angle CAF + \angle C) = 90^\circ$

$\therefore \angle BAF + \angle CAF = \angle CAF + \angle C = 90^\circ$

$\therefore \angle BAF = \angle C$

又 $AC \parallel DE$,

$\therefore \angle C = \angle CDE$,

$\therefore$ 故与 $\angle C$ 相等的角有 $\angle CDE$ 、 $\angle BAF$;

(2) ① $\because \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$

又 $\because \angle C - \angle B = 50^\circ$,

$\therefore \angle C = 70^\circ$, $\angle B = 20^\circ$;

② $\because \angle BAD = x^\circ$, $\angle B = 20^\circ$ 则 $\angle ADB = 160^\circ - x^\circ$, $\angle ADF = 20^\circ + x^\circ$,

由翻折可知: $\because \angle ADE = \angle ADB = 160^\circ - x^\circ$, $\angle E = \angle B = 20^\circ$,

$\therefore \angle FDE = 140^\circ - 2x^\circ$, $\angle DFE = 20^\circ + 2x^\circ$,

当 $\angle FDE = \angle DFE$ 时, $140^\circ - 2x^\circ = 20^\circ + 2x^\circ$, 解得: $x^\circ = 30^\circ$;

当 $\angle FDE = \angle E$ 时, $140^\circ - 2x^\circ = 20^\circ$, 解得: $x^\circ = 60^\circ$ (因为 $0 < x \leq 45$, 故舍去);

当 $\angle DFE = \angle E$ 时, $20^\circ + 2x^\circ = 20^\circ$, 解得: $x^\circ = 0$ (因为 $0 < x \leq 45$, 故舍去);

综上所述, 存在这样的 x 的值, 使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等, 且 $x = 30$.

【点睛】本题考查图形的翻折、三角形内角和定理、平行线的判定及其性质、三角形外角的性质、等角代换, 解题的关键是熟知图形翻折的性质及综合运用所学知识.

16. 如图 1, 将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠, 使点 C 落在四边形 $ABDE$ 内点 C' 的位置,

(1) ①若 $\angle 1 = 20^\circ, \angle 2 = 50^\circ$, 则 $\angle C =$ _____;

②若 $\angle C = 42^\circ$, 则 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____;

③探索 $\angle C$ 、 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之间的数量关系, 并说明理由;

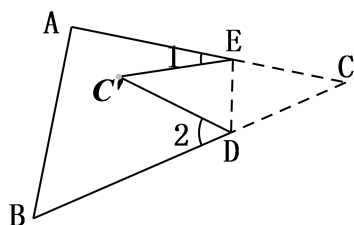
(2) 直接按照所得结论, 填空:

①如图中, 将 $\triangle ABC$ 纸片再沿 FG 、 MN 折叠, 使点 A 、 B 分别落在 $\triangle ABC$ 内点 A' 、 B' 的位置, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 =$ _____;

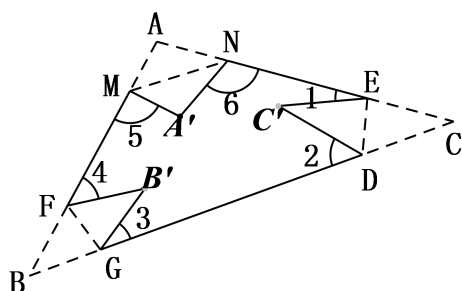
②如图中, 将四边形 $ABCD$ 按照上面方式折叠, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 8 =$ _____;

③若将 n 边形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 也按照上面方式折叠, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 2n =$ _____;

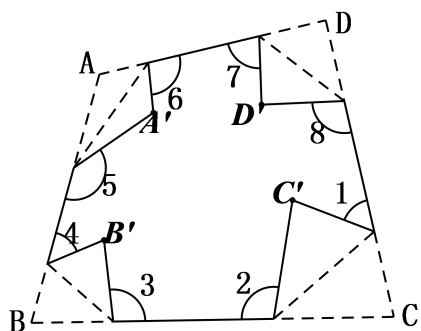
(3) 如图, 将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠, 使点 C 落在 $\triangle ABC$ 边 AC 上方点 C' 的位置, 探索 $\angle C$ 、 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之间的数量关系, 并说明理由.



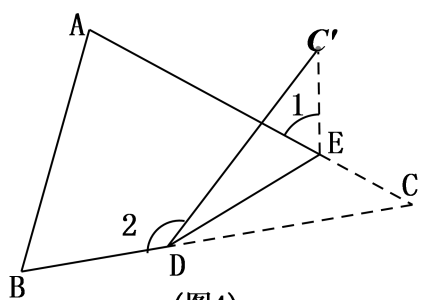
(图1)



(图2)



(图3)



(图4)

【答案】(1) ① 35° ；② 84° ；③ $2\angle C = \angle 1 + \angle 2$ ；(2) ① 360° ；② 720° ；③ $360^\circ(n-2)$ ；
(3) $2\angle C = \angle 2 - \angle 1$

【分析】(1) ①由邻补角的定义可知 $\angle CEC' = 160^\circ$ ， $\angle CDC' = 130^\circ$ ，根据折叠的性质可求出 $\angle CED = 80^\circ$ ， $\angle CDE = 65^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理求解即可；

②由三角形内角和可求出 $\angle CED + \angle CDE = 138^\circ$ ，再由折叠的性质可知 $\angle CEC' + \angle CDC' = 276^\circ$ ，然后根据邻补角的定义可求出 $\angle 1 + \angle 2 = 84^\circ$ ；

③由邻补角定义可知 $\angle 1 + \angle CEC' = 180^\circ$ ，从而 $\angle 2 + \angle CDC' = 180^\circ$ ，所以， $\angle 1 + \angle CEC' + \angle 2 + \angle CDC' = 360^\circ$ ，结合 $\angle C + \angle CEC' + \angle C' + \angle CDC' = 360^\circ$ ，可求出 $2\angle C = \angle 1 + \angle 2$ ；

(2) ①由(1)得 $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle C$ ， $\angle 3 + \angle 4 = 2\angle B$ ， $\angle 5 + \angle 6 = 2\angle A$ ，从而 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$ ，结合三角形内角和求解即可；

②由①可知， $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 8 = 2(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$ ，结合四边形内角和求解即可；

③由①可知， $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 2n = 2 \times 180^\circ \times (n-2) = 360^\circ \times (n-2)$ ；

(3) 由外角的性质可知 $\angle 2 = \angle 3 + \angle C$ ， $\angle 3 = \angle 1 + \angle C$ ，整理可得 $2\angle C = \angle 2 - \angle 1$ 。

【详解】解：(1) ① $\because \angle 1 = 20^\circ, \angle 2 = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle CEC' = 160^\circ, \angle CDC' = 130^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = 80^\circ, \angle CDE = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle C = 180^\circ - 80^\circ - 65^\circ = 35^\circ$ ；

② $\because \angle C = 42^\circ$ ，

$\therefore \angle CED + \angle CDE = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$ ，

$$\therefore \angle CEC' + \angle CDC' = 276^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 276^\circ = 84^\circ;$$

$$\textcircled{3} 2\angle C = \angle 1 + \angle 2,$$

$$\text{因为 } \angle 1 + \angle CEC' = 180^\circ, \angle 2 + \angle CDC' = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle CEC' + \angle 2 + \angle CDC' = 360^\circ,$$

$$\text{因为在四边形 } CEC'D \text{ 中, } \angle C + \angle CEC' + \angle C' + \angle CDC' = 360^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle 2 = \angle C + \angle C',$$

$$\text{因为 } \angle C = \angle C',$$

$$\text{所以 } 2\angle C = \angle 1 + \angle 2.$$

(2) ① 由①得

$$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle C, \angle 3 + \angle 4 = 2\angle B, \angle 5 + \angle 6 = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 360^\circ;$$

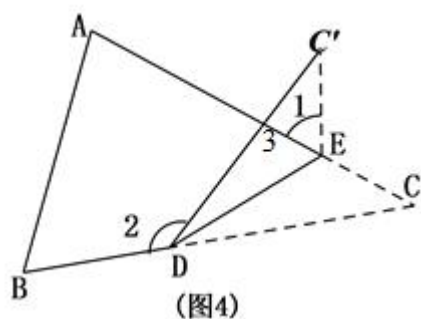
$$\textcircled{2} \because \angle 1 + \angle 2 = 2\angle C, \angle 3 + \angle 4 = 2\angle B, \angle 5 + \angle 6 = 2\angle A, \angle 7 + \angle 8 = 2\angle D,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 8 = 2(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 2 \times 360^\circ = 720^\circ;$$

$$\textcircled{3} \because n \text{ 边形内角和是 } 180^\circ \times (n-2),$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle 2n = 2 \times 180^\circ \times (n-2) = 360^\circ \times (n-2);$$

$$\textcircled{3} 2\angle C = \angle 2 - \angle 1.$$



$$\because \angle 2 = \angle 3 + \angle C,$$

$$\angle 3 = \angle 1 + \angle C' = \angle 1 + \angle C,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle C + \angle C = \angle 1 + 2\angle C,$$

$$\therefore 2\angle C = \angle 2 - \angle 1.$$

【点睛】本题考查了折叠性质，三角形内角和定理，多边形的内角和定理，三角形外角的性质及图形类的规律与探究.熟练掌握折叠的性质和三角形内角和定理是解(1)的关键，利用(1)中规律是解(2)的关键，熟练掌握三角形外角的性质是解(3)的关键.

17. 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于 O, 点 A 在射线 OP 上运动, 点 B 在射线 OM 上运动, 连接 AB,

(1) 如图, 已知 AC、BC 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 角的平分线,

①点 A、B 在运动的过程中， $\angle ACB$ 的大小是否发生变化？若发生变化，请说明理由；若不发生变化，试求出 $\angle ACB$ 的大小.

②如图，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 PQ 上，记作点 C' ，则 $\angle ABO = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；
如图，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 MN 上，记作点 C'' ，则 $\angle ABO = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

(2) 如图，延长 BA 至 G，已知 $\angle BAO$ 、 $\angle OAG$ 的角平分线与 $\angle BOQ$ 的角平分线及其延长线交于 E、F，在 $\triangle AEF$ 中，如果有一个角是另一个角的 $\frac{3}{2}$ 倍，求 $\angle ABO$ 的度数.

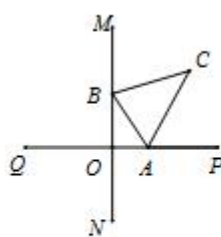


图 1

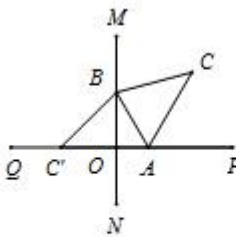


图 2

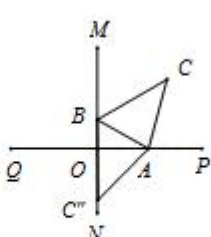


图 3

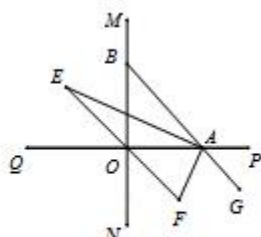


图 4

【答案】(1) ① $\angle ACB$ 的大小不变， $\angle ACB = 45^\circ$ ；② 30° ， 60° ；(2) $\angle ABO$ 为 60° 或 72° .

【分析】(1) ①由直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于 O，得到 $\angle AOB = 90^\circ$ ，根据三角形的外角的性质得到 $\angle PAB + \angle ABM = 270^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle PAB$ ， $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle ABM$ ，于是得到结论；

②由于将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 PQ 上，得到 $\angle CAB = \angle BAQ$ ，由角平分线的定义得到 $\angle PAC = \angle CAB$ ，根据三角形的内角和即可得到结论；根据将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 MN 上，得到 $\angle ABC = \angle ABN$ ，由于 BC 平分 $\angle ABM$ ，得到 $\angle ABC = \angle MBC$ ，于是得到结论；

(2) 由 $\angle BAO$ 与 $\angle BOQ$ 的角平分线相交于 E 可知 $\angle EAO = \frac{1}{2} \angle BAO$ ， $\angle EOQ = \frac{1}{2} \angle BOQ$ ，进而得出 $\angle E$ 的度数，由 AE、AF 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle OAG$ 的角平分线可知 $\angle EAF = 90^\circ$ ，在 $\triangle AEF$ 中，由一个角是另一个角的 $\frac{3}{2}$ 倍分两种情况进行分类讨论.

【详解】解：(1) ① $\angle ACB$ 的大小不变，

$\because$ 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于 O，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PAB + \angle ABM = 270^\circ$ ，

$\because$ AC、BC 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 角的平分线，

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle PAB$ ， $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle ABM$ ，

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = \frac{1}{2} (\angle PAB + \angle ABM) = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ;$$

② $\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 PQ 上，

$$\therefore \angle CAB = \angle BAQ,$$

$\because AC$ 平分 $\angle PAB$,

$$\therefore \angle PAC = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle PAC = \angle CAB = \angle BAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 折叠，若点 C 落在直线 MN 上，

$$\therefore \angle ABC = \angle ABN,$$

$\because BC$ 平分 $\angle ABM$,

$$\therefore \angle ABC = \angle MBC,$$

$$\therefore \angle MBC = \angle ABC = \angle ABN,$$

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ,$$

故答案为 30° , 60° ;

(2) $\because \angle BAO$ 与 $\angle BOQ$ 的角平分线相交于 E ,

$$\therefore \angle EAO = \frac{1}{2} \angle BAO, \quad \angle EOQ = \frac{1}{2} \angle BOQ,$$

$$\therefore \angle E = \angle EOQ - \angle EAO = \frac{1}{2} (\angle BOQ - \angle BAO) = \frac{1}{2} \angle ABO,$$

$\because AE$ 、 AF 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle OAG$ 的角平分线，

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ.$$

在 $\triangle AEF$ 中， $\because$ 有一个角是另一个角的 $\frac{3}{2}$ 倍，故有：

$$\textcircled{1} \angle EAF = \frac{3}{2} \angle F, \quad \angle E = 30^\circ, \quad \angle ABO = 60^\circ;$$

$$\textcircled{2} \angle F = \frac{3}{2} \angle E, \quad \angle E = 36^\circ, \quad \angle ABO = 72^\circ;$$

$$\therefore \angle ABO \text{ 为 } 60^\circ \text{ 或 } 72^\circ.$$

【点睛】本题考查翻折变换-折叠问题，三角形内角和定理，熟知三角形内角和是 180° 是解答此题的关键。