



专题 7.17 平面图形的认识（二）章末十五大题型总结（培优篇）

【苏科版】

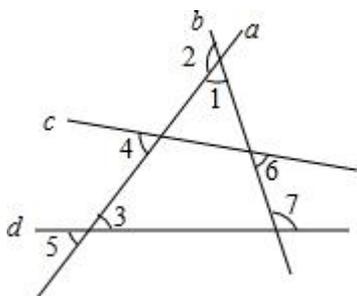
▶ 题型梳理

【题型 1 对顶角、邻补角的运用】	1
【题型 2 同位角、内错角、同旁内角的识别】	2
【题型 3 添加条件判定平行】	3
【题型 4 由平行线的性质求角度】	4
【题型 5 由平行线的判定与性质判断多结论问题】	5
【题型 6 在平行线中添加推理依据进行证明】	6
【题型 7 利用平行线的判定及性质求角度】	9
【题型 8 利用平行线的判定及性质进行证明】	11
【题型 9 确定第三边的取值范围】	12
【题型 10 三角形的三边关系的应用】	12
【题型 11 利用三角形的中线求长度】	13
【题型 12 三角形的高与面积有关的计算】	14
【题型 13 三角形的稳定性】	15
【题型 14 三角形中的角平分线、中线、高有关的综合计算】	16
【题型 15 三角形的内角和与外角有关的计算】	17

▶ 举一反三

【题型 1 对顶角、邻补角的运用】

【例 1】（2023 下·天津蓟州·七年级统考期中）如图，下列说法正确的是（ ）



- A. $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互为内错角
- B. $\angle 2$ 的同位角只有 $\angle 4$
- C. $\angle 6$ 和 $\angle 7$ 互补
- D. $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 互为邻补角

【变式 1-1】（2023 下·浙江·七年级统考期末）数学课上老师用双手表示了“三线八角”图形，如图所示（两大拇指代表被截直线，食指代表截线），从左至右依次表示（ ）

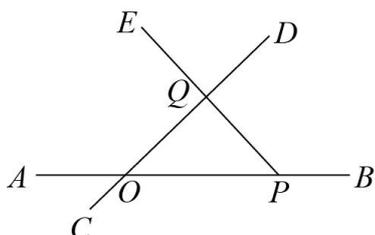


润禾托管



- A. 同旁内角、同位角、内错角
- B. 同位角、内错角、同旁内角
- C. 内错角、同旁内角、同位角
- D. 内错角、同位角、同旁内角

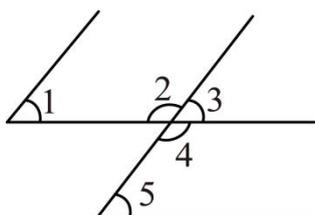
【变式 1-2】（2023 上·福建泉州·七年级统考期末）如图所示，图中同旁内角的数量共有（ ）



- A. 3 对
- B. 4 对
- C. 5 对
- D. 6 对

【变式 1-3】（2023 下·山东济宁·七年级统考期末）如图，下列说法正确的是（ ）

- ① $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是同位角；
- ② $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是同位角；
- ③ $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角；
- ④ $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是内错角

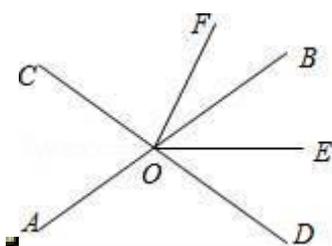


- A. ①②
- B. ②③
- C. ①③
- D. ②④

【题型 2 同位角、内错角、同旁内角的识别】

【例 2】（2023 下·山东济宁·七年级统考期末）如图，直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOD$ ，OF 平分 $\angle COE$.

- (1) 若 $\angle AOC = 76^\circ$ ，求 $\angle BOF$ 的度数；
- (2) 若 $\angle BOF = 36^\circ$ ，求 $\angle AOC$ 的度数；
- (3) 若 $|\angle AOC - \angle BOF| = \alpha^\circ$ ，请直接写出 $\angle AOC$ 和 $\angle BOF$ 的度数。（用含的代数式表示）



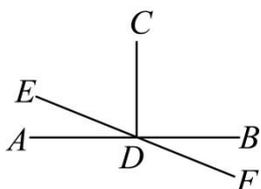
【变式 2-1】（2023 下·上海虹口·七年级上外附中校考期末）若 $\angle 1$ 的对顶角是 $\angle 2$ ， $\angle 2$ 的邻补角是 $\angle 3$ ， $\angle 3$



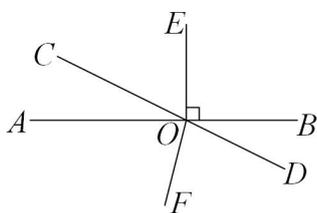
润禾托管

的余角是 $\angle 4$ ，若 $\angle 4 = 55^\circ$ ，则 $\angle 1 =$ _____°.

【变式 2-2】(2023 上·吉林长春·七年级吉林省第二实验学校校考期末)如图,直线 AB 、 EF 相交于点 D , $\angle ADC = 90^\circ$. 若 $\angle ADE$ 与 $\angle ADC$ 的度数之比为 1:3, 则 $\angle CDF$ 的度数是_____°.



【变式 2-3】(2023 上·江苏盐城·七年级统考期末)已知直线 AB 和 CD 交于点 O , $\angle AOC = \alpha$, $\angle BOE = 90^\circ$, OF 平分 $\angle AOD$.



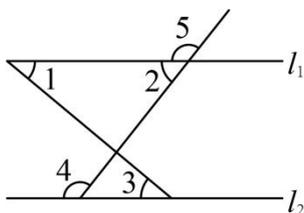
(1) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时, 则 $\angle EOC =$ _____°; $\angle FOD =$ _____°.

(2) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 射线 OE' 从 OE 开始以 $12^\circ/\text{秒}$ 的速度绕点 O 逆时针转动, 同时射线 OF' 从 OF 开始以 $8^\circ/\text{秒}$ 的速度绕点 O 顺时针转动, 当射线 OE' 转动一周时射线 OF' 也停止转动, 求经过多少秒射线 OE' 与射线 OF' 第一次重合?

(3) 在(2)的条件下, 射线 OE' 在转动一周的过程中, 当 $\angle E'OF' = 90^\circ$ 时, 请直接写出射线 OE' 转动的时间为_____秒.

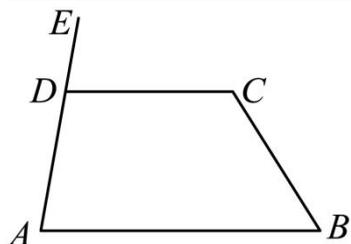
【题型 3 添加条件判定平行】

【例 3】(2023 下·湖北孝感·七年级统考期中)如图, 下列条件中, 不能判断直线 $l_1 \parallel l_2$ 的是 ()

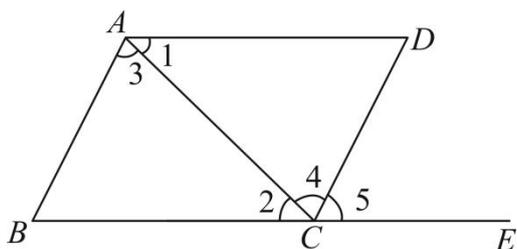


- A. $\angle 1 = \angle 3$ B. $\angle 2 = \angle 3$ C. $\angle 4 = \angle 5$ D. $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

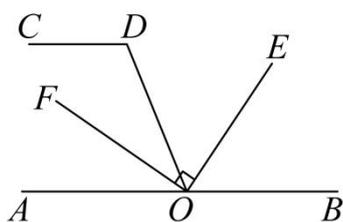
【变式 3-1】(2023 下·黑龙江双鸭山·七年级统考期末)如图, A, D, E 三点在同一条直线上, 在不添加辅助线的情况下, 请你添加一个条件_____, 使 $AB \parallel CD$ (填一个即可).



【变式 3-2】(2023 下·湖南益阳·七年级统考期末)如图,下列条件中:① $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$; ② $\angle 1 = \angle 2$; ③ $\angle 3 = \angle 4$; ④ $\angle B = \angle 5$; ⑤ $\angle D = \angle 5$, 则一定能判定 $AB \parallel CD$ 的条件有_____ (填写所有正确的序号).



【变式 3-3】(2023 下·山东烟台·六年级统考期末)如图, O 是直线 AB 上一点, OE 平分 $\angle BOD$, $OF \perp OE$, $\angle D = 120^\circ$, 添加一个条件, 仍不能判定 $AB \parallel CD$, 添加的条件可能是 ()

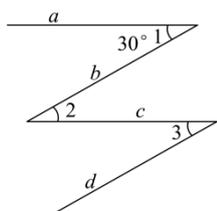


- A. $\angle BOE = 60^\circ$
- B. $\angle DOF = 30^\circ$
- C. $\angle AOF = 30^\circ$
- D. $\angle BOE + \angle AOF = 90^\circ$

【题型 4 由平行线的性质求角度】

【例 4】(2023 下·云南昆明·七年级统考期末)已知, 在同一平面内, $\angle ABC = 110^\circ$, $AD \parallel BC$, $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E , 那么 $\angle AEB$ 度数为_____.

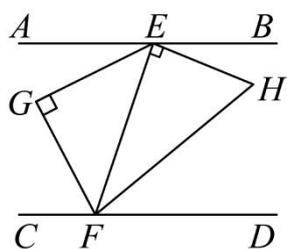
【变式 4-1】(2023 下·北京朝阳·七年级校考期末)如图, $a \parallel c, b \parallel d$, $\angle 1 = 30^\circ$, 求 $\angle 3$ 的度数.



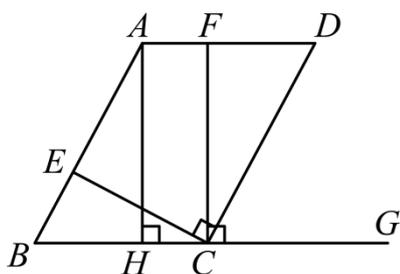
【变式 4-2】(2023 下·广东深圳·七年级统考期末)如图, $AB \parallel CD$, $\angle G = \angle FEH = 90^\circ$, $\angle GEF = 45^\circ$, $\angle H = 60^\circ$, 若 $\angle AEG = 26^\circ$, 则 $\angle DFH =$ _____.



润禾托管



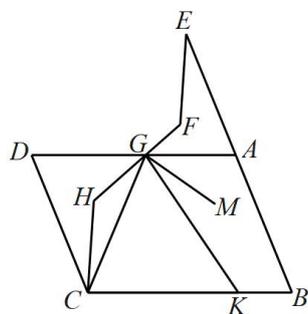
【变式 4-3】（2023 下·贵州黔南·七年级统考期末）如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle DCE = 90^\circ$ ，点 E 在线段 AB 上， $\angle FCG = 90^\circ$ ，点 F 在直线 AD 上， $\angle AHG = 90^\circ$ 。



- (1) 图中与 $\angle D$ 相等的角有 _____；
- (2) 若 $\angle ECF = 25^\circ$ ，求 $\angle BCD$ 的度数；
- (3) 在 (2) 的条件下，点 C （点 C 不与 B, H 两点重合）从点 B 出发，沿射线 BG 的方向运动，其他条件不变，求 $\angle BAF$ 的度数。

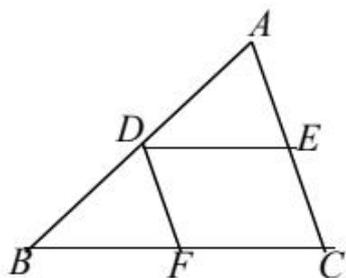
【题型 5 由平行线的判定与性质判断多结论问题】

【例 5】（2023 下·重庆云阳·七年级校联考期中）如图， E 在线段 BA 的延长线上， $\angle EAD = \angle D$ ， $\angle B = \angle D$ ， $EF \parallel HC$ ，连 FH 交 AD 于 G ， $\angle FGA$ 的余角比 $\angle DGH$ 大 16° ， K 为线段 BC 上一点，连 CG ，使 $\angle CKG = \angle CGK$ ，在 $\angle AGK$ 内部有射线 GM ， GM 平分 $\angle FGC$ 。则下列结论：① $AD \parallel BC$ ；② GK 平分 $\angle AGC$ ；③ $\angle FGA = 42^\circ$ ；④ $\angle MGK = 21^\circ$ 。其中正确结论的个数有（ ）



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

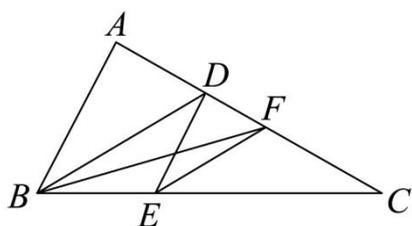
【变式 5-1】（2023 下·四川南充·七年级统考期末）如图，在三角形 ABC 中，点 D, E, F 分别在 AB, AC, BC 上， $DE \parallel BC$ ， $\angle C = \angle EDF$ ，则下列结论错误的是（ ）



- A. $\angle ADE = \angle B$ B. $DF \parallel AC$ C. $\angle BFD = \angle AED$ D. $\angle B + \angle CED = 180^\circ$

【变式 5-2】(2023 下·江苏扬州·七年级校考阶段练习) 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \parallel AB$, EF 是 $\triangle DEC$ 的角平分线, 有下列四个结论: ① $\angle BDE = \angle DBE$; ② $EF \parallel BD$; ③ $\angle CDE = \angle ABC$;

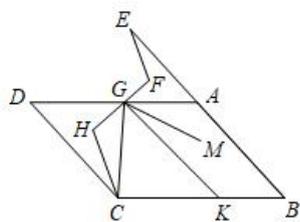
④ $S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ABF}$. 其中, 正确的是 ()



- A. ①② B. ①②③ C. ②③④ D. ①②④

【变式 5-3】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期中) 如图, E 在线段 BA 的延长线上, $\angle EAD = \angle D$, $\angle B = \angle D$, $EF \parallel HC$, 连 FH 交 AD 于 G , $\angle FGA$ 的余角比 $\angle DGH$ 大 16° , K 为线段 BC 上一点, 连 CG , 使 $\angle CKG = \angle CGK$, 在 $\angle AGK$ 内部有射线 GM , GM 平分 $\angle FGC$. 则下列结论: ① $AD \parallel BC$; ② GK 平分 $\angle AGC$;

③ $GK \parallel CD$; ④ $\angle MGK = 16^\circ$. 其中正确结论的个数有 ()



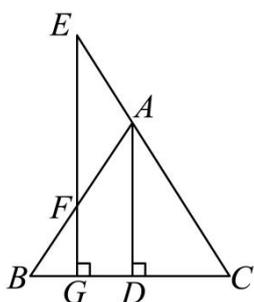
- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【题型 6 在平行线中添加推理依据进行证明】

【例 6】(2023 下·北京东城·七年级北京二中校考期末) 补全证明过程, 并在 () 内填写推理的依据.

已知: 如图, $AD \perp BC$ 于点 D , $EG \perp BC$ 于点 G , $\angle E = \angle 1$,

求证: AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线.



证明：∵ $AD \perp BC$ ， $EG \perp BC$

∴ $\angle EGD = \angle ADC = 90^\circ$ (①_____)

∴ $AD \parallel EG$ (②_____)

∴ $\angle E = \angle$ ③_____，

$\angle 1 = \angle BAD$ (④_____)

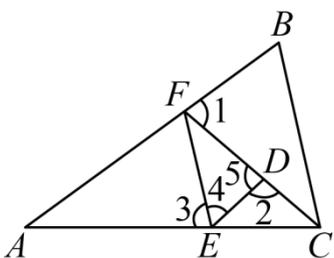
∴ $\angle E = \angle 1$

∴ $\angle CAD = \angle BAD$

∴ AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线 (⑤_____)

【变式 6-1】 (2023 下·山东临沂·七年级统考期末) 请在括号内完成证明过程和填写上推理依据.

如图，已知 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\angle B = \angle 4$ ，试判断 $\angle ACB$ 与 $\angle 3$ 的大小关系，并说明理由.



解： $\angle ACB = \angle 3$ ，理由如下：

∵ $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

又∵ (_____) + $\angle 2 = 180^\circ$ (邻补角定义)

∴ (_____) = $\angle 1$ (_____)

∴ (_____) $\parallel AB$ (_____)

∴ $\angle AFE = \angle 4$ (_____)

∵ $\angle B = \angle 4$ ，

∴ (_____) = $\angle B$ (_____)



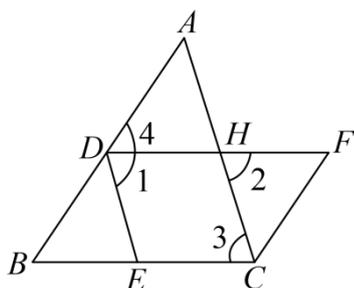
润禾托管

$$\therefore EF \parallel BC \text{ ()}$$

$$\therefore \angle ACB = \angle 3 \text{ ()}$$

【变式 6-2】(2023 下·重庆彭水·七年级校联考期末) 推理填空:

如图, 点 D, E, H 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, AC 上, 连接 DE , 过点 C 作 CF 交 DH 的延长线于点 F 且满足 $\angle B + \angle BCF = 180^\circ$; 若 $DE \parallel AC$, $\angle 1 = \angle 3$. 求证: $\angle B = \angle F$.



证明: $\because DE \parallel AC$ (已知)

$$\therefore \angle 1 = \text{_____} \text{ (两直线平行, 同位角相等)}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 \text{ ()}$$

$$\therefore DF \parallel BC \text{ ()}$$

$$\therefore \angle 4 = \angle B \text{ (两直线平行, 同位角相等)}$$

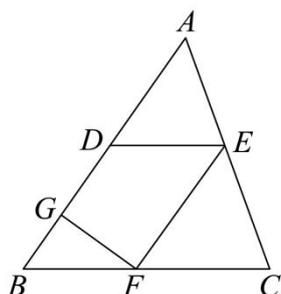
$$\therefore \angle B + \angle BCF = 180^\circ \text{ (已知)}$$

$$\therefore \text{_____} \parallel \text{_____} \text{ (同旁内角互补, 两直线平行)}$$

$$\therefore \angle 4 = \text{_____} \text{ (两直线平行, 内错角相等)}$$

$$\therefore \angle B = \angle F \text{ (等量代换)}$$

【变式 6-3】(2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级统考期末) 在下面的括号内, 填上推理的根据. 如图, 点 D, E 分别为三角形 ABC 的边 AB, AC 上的点, 点 F, G 分别在 BC, AB 上, $\angle AED = \angle C$, $\angle DEF = \angle B$, $\angle EFG = 90^\circ$. 求证 $FG \perp AB$.





润禾托管

证明: $\because \angle AED = \angle C$

$\therefore DE \parallel BC$ ()

$\therefore \angle DEF = \angle EFC$ ()

$\because \angle DEF = \angle B$

$\therefore \angle EFC = \angle B$

$\because \angle EFC + \angle EFB = 180^\circ$

$\therefore \angle B + \angle EFB = 180^\circ$ ()

$\therefore DB \parallel EF$ ()

$\therefore \angle AGF + \angle EFG = 180^\circ$ ()

$\because \angle EFG = 90^\circ$

$\therefore \angle AGF = 90^\circ$

$\therefore FG \perp AB$ ()

【题型 7 利用平行线的判定及性质求角度】

【例 7】(2023 下·浙江·七年级期末) 已知, $AB \parallel CD$, 点 E 在 CD 上, 点 G, F 在 AB 上, 点 H 在 AB, CD 之间, 连接 FE, EH, HG , $\angle AGH = \angle FED$, $FE \perp HE$, 垂足为 E .

(1) 如图 1, 求证: $HG \perp HE$;

(2) 如图 2, GM 平分 $\angle HGB$, EM 平分 $\angle HED$, GM, EM 交于点 M , 求证: $\angle GHE = 2\angle GME$;

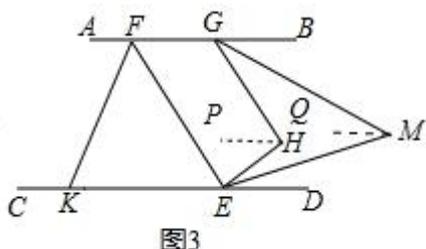


图3

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, FK 平分 $\angle AFE$ 交 CD 于点 K , 若 $\angle KFE : \angle MGH = 13 : 5$, 求 $\angle HED$ 的度数.

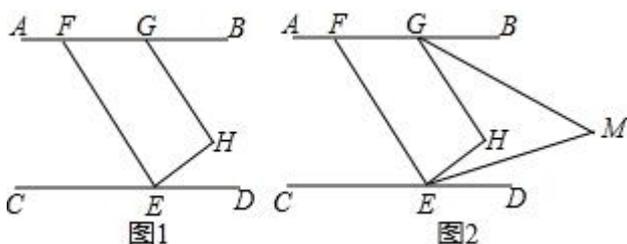


图1

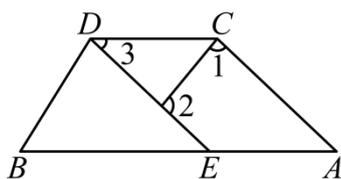
图2

图3

【变式 7-1】(2023 上·贵州贵阳·七年级统考期末) 如图, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle A = \angle 3$.



润禾托管



(1) 求证: $AB \parallel CD$;

(2) 若 $\angle B = 78^\circ, \angle BDE = 2\angle 3$, 求 $\angle DEA$ 的度数.

【变式 7-2】(2023 下·安徽六安·七年级校考期末) 如图 1, 已知点 B 和点 C 分别是 AF 和 DE 上的点, $\angle DAF = \angle BCD, \angle F = \angle ECF$.

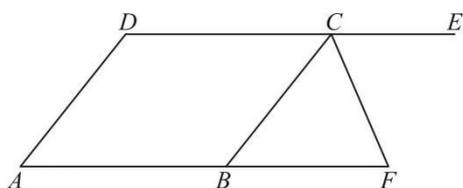


图1

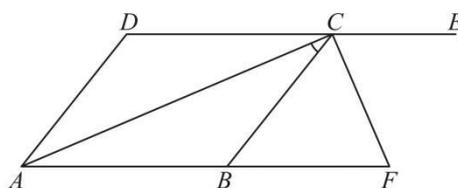


图2

(1) 试说明: $AD \parallel BC$;

(2) 如图 2, 连接 AC , 已知 $AC \perp CF, \angle ECF = m\angle BCF$.

① 当 $m = 1$ 时, $\angle DAF = 62^\circ$, 求 $\angle ACB$ 的度数;

② 若 $\angle ACD + \angle ABC = 150^\circ$, 则 $\angle D =$ _____ . (用含 m 的代数式表示)

【变式 7-3】(2023 下·浙江·七年级期末) 综合与实践课上, 同学们以“一个直角三角形和两条平行线”为背景开展数学活动, 如图, 已知两直线 a, b , 且 $a \parallel b, \triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle BCA = 90^\circ$, 操作发现:

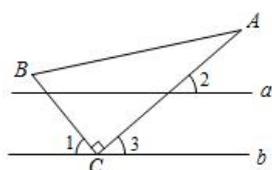


图1

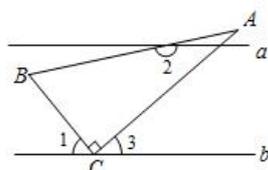


图2

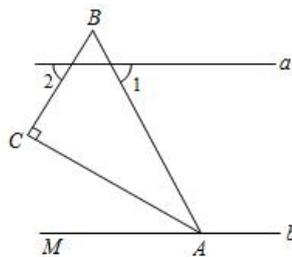


图3

(1) 如图 1. 若 $\angle 1 = 48^\circ$, 求 $\angle 2$ 的度数;

(2) 如图 2, 若 $\angle A = 30^\circ, \angle 1$ 的度数不确定, 同学们把直线 a 向上平移, 并把 $\angle 2$ 的位置改变, 发现 $\angle 2 - \angle 1 = 120^\circ$, 请说明理由.

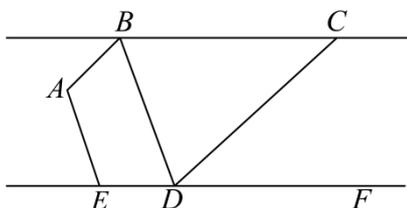
(3) 如图 3, 若 $\angle A = 30^\circ, AC$ 平分 $\angle BAM$, 此时发现 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 又存在新的数量关系, 请写出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的数量关系并说明理由.



润禾托管

【题型 8 利用平行线的判定及性质进行证明】

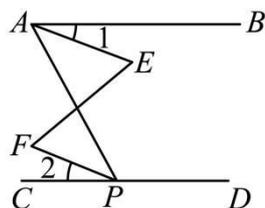
【例 8】（2023 下·陕西渭南·七年级统考期末）如图， $AB \parallel CD$ ，连接 BD ， E 是直线 FD 上的一点， $\angle ABC = 140^\circ$ ， $\angle CDF = 40^\circ$ 。



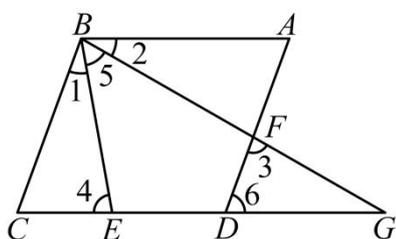
(1) 判断 BC 与 EF 平行吗？为什么？

(2) 若 $BD \parallel AE$ ， $\angle BAE = 110^\circ$ ，则 BD 是否平分 $\angle ABC$ ？请说明理由。

【变式 8-1】（2023 下·江苏镇江·七年级统考期末）已知：如图， $\angle BAP + \angle APD = 180^\circ$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证： $AE \parallel PF$ 。



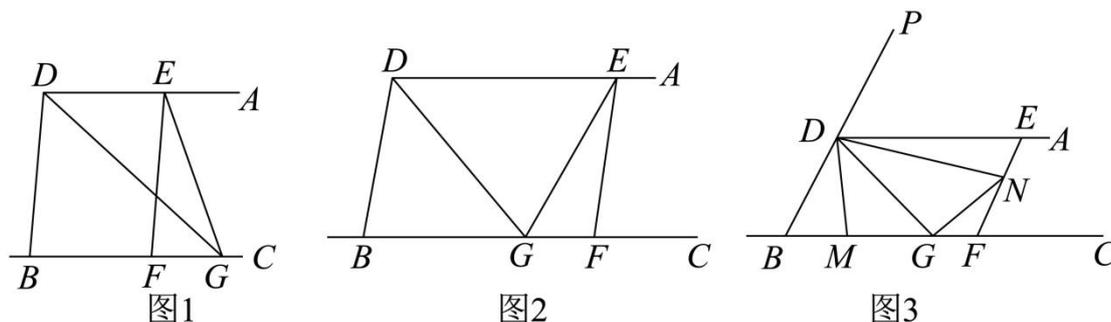
【变式 8-2】（2023 下·黑龙江齐齐哈尔·七年级校考期末）如图，已知 $BC \parallel AD$ ， $\angle C = \angle A$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。求证：



(1) $AB \parallel CD$

(2) $\angle 1 = \angle 2$

【变式 8-3】（2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨德强学校校考期中）点 E 在射线 DA 上，点 F 、 G 为射线 BC 上两个动点，满足 $\angle DBF = \angle DEF$ ， $\angle BDG = \angle BGD$ ， DG 平分 $\angle BDE$ 。





润禾托管

(1)如图 1, 当点 G 在 F 右侧时, 求证: $BD \parallel EF$;

(2)如图 2, 当点 G 在 F 左侧时, 求证: $\angle DGE = \angle BDG + \angle FEG$;

(3)如图 3, 在(2)的条件下, P 为 BD 延长线上一点, DM 平分 $\angle BDG$, 交 BC 于点 M , DN 平分 $\angle PDM$, 交 EF 于点 N , 连接 NG , 若 $DG \perp NG$, $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$, 则 $\angle DBF$ 的度数是多少.

【题型 9 确定第三边的取值范围】

【例 9】(2023 春·江苏无锡·七年级统考期末) 一个三角形的 3 边长分别是 x cm、 $(3x-3)$ cm、 $(x+2)$ cm, 它的周长不超过 39cm. 则 x 的取值范围是 ()

- A. $\frac{5}{3} < x < 5$ B. $5 < x \leq 8$ C. $\frac{5}{3} < x \leq 8$ D. $1 < x < 5$

【变式 9-1】(2023 春·江苏盐城·七年级统考期中) 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长, b, c 满足 $|b-2| + (c-3)^2 = 0$, 且 a 为方程 $|a-5| = 1$ 的解, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

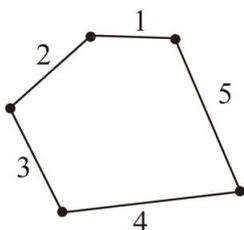
【变式 9-2】(2023 春·河南郑州·七年级郑州中学校联考期中) 有长度分别是 4cm、5cm、8cm 和 9cm 的小棒各一根, 任选其中三根首尾相接围成三角形, 可以围成不同形状的三角形的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【变式 9-3】(2023 春·河南周口·七年级统考期末) 三角形的三边长分别为 2, $2x-1$, 5, 则 x 的取值范围是_____.

【题型 10 三角形的三边关系的应用】

【例 10】(2023 春·广东深圳·七年级深圳中学校考期末) 如图, 用五个螺丝将五条不可弯曲的木条围成一个木框, 不计螺丝大小, 其中相邻两螺丝的距离依次为 1、2、3、4、5, 且相邻两木条的夹角均可调整. 若调整木条的夹角时不破坏此木框, 则任两螺丝的距离之最大值为 ()



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【变式 10-1】(2023 春·山东济南·七年级统考期末) 小明家和小亮家到学校的直线距离分别是 5km 和 3km, 那么小明到小亮家的直线距离不可能是 ()

- A. 1km B. 2km C. 3km D. 8km

【变式 10-2】(2023 秋·新疆和田·七年级统考期末) 已经有两根木条, 长分别是 2cm 和 6cm, 现要用 3 根木

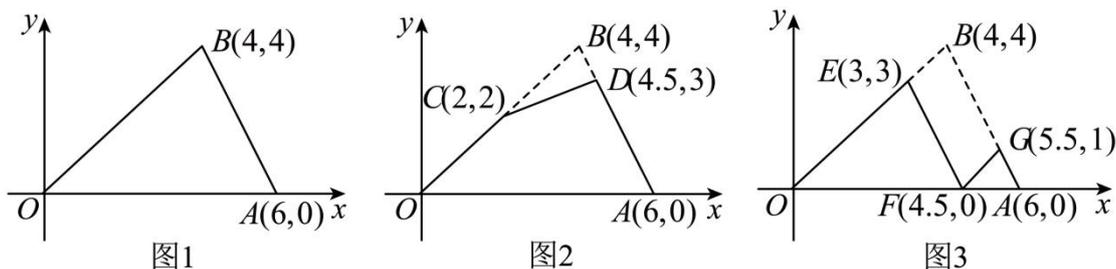


润禾托管

条组成三角形，还要从下面 4 根木条中选一根，可以是 ()

- A. 4cm B. 7cm C. 8cm D. 9cm

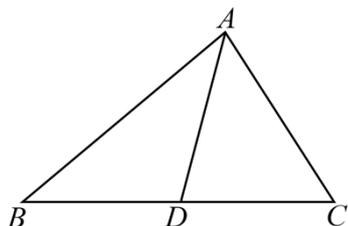
【变式 10-3】 (2023 春·北京西城·七年级统考期末) 以某公园西门 O 为原点建立平面直角坐标系，东门 A 和景点 B 的坐标分别是 $(6,0)$ 和 $(4,4)$ 。如图 1，甲的游览路线是： $O \rightarrow B \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_1 。如图 2，景点 C 和 D 分别在线段 OB, BA 上，乙的游览路线是： $O \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_2 。如图 3，景点 E 和 G 分别在线段 OB, BA 上，景点 F 在线段 OA 上，丙的游览路线是： $O \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow A$ ，其折线段的路程总长记为 l_3 。下列 l_1, l_2, l_3 的大小关系正确的是 ()



- A. $l_1 = l_2 = l_3$ B. $l_1 < l_2$ 且 $l_2 = l_3$ C. $l_2 < l_1 < l_3$ D. $l_1 > l_2$ 且 $l_1 = l_3$

【题型 11 利用三角形的中线求长度】

【例 11】 (2023 春·云南·七年级云南师大附中校考期末) 已知，已知 $\triangle ABC$ 的周长为 33cm ， AD 是 BC 边上的中线， $AB = \frac{3}{2}AC$ 。

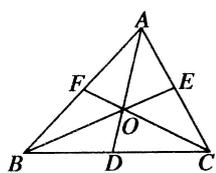


- (1) 如图，当 $AC = 10\text{cm}$ 时，求 BD 的长。
 (2) 若 $AC = 12\text{cm}$ ，能否求出 DC 的长？为什么？

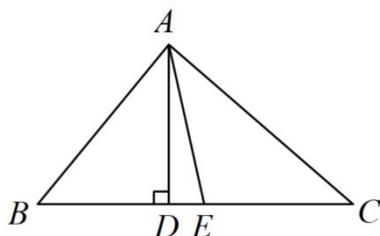
【变式 11-1】 (2023 秋·全国·七年级期中) 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， $\triangle ADC$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长多 3， AB 与 AC 的和为 13，则 AC 的长为 ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【变式 11-2】 (2023 秋·山东德州·七年级校考期中) 如图， $\triangle ABC$ 的周长为 24cm ， AD, BE 分别是 BC, AC 边上的中线， AD, BE 相交于点 O ， CO 的延长线交 AB 于点 F ，且 $BD = 4\text{cm}$ ， $AE = 3.5\text{cm}$ ，求 AF 的长。



【变式 11-3】（2023 秋·黑龙江大庆·七年级校考期中）如图，已知 AD 、 AE 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线 $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$, $\angle BAC = 90^\circ$. 试求：

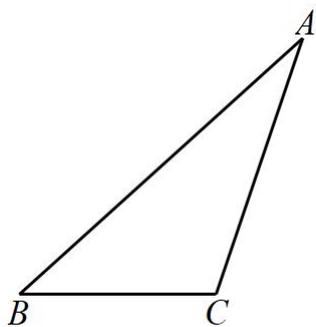


- (1) $\triangle ABE$ 的面积；
- (2) AD 的长度；
- (3) $\triangle ACE$ 与 $\triangle ABE$ 的周长的差.

【题型 12 三角形的高与面积有关的计算】

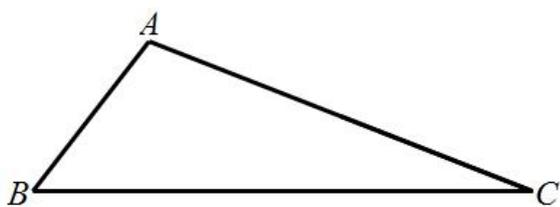
【例 12】（2023 春·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨市虹桥初级中学校校考期末）在 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， $AD = 6$, $CD = 1$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 12, 则线段 BD 的长度为_____.

【变式 12-1】（2023 春·江苏常州·七年级统考期中）如图，已知 $\triangle ABC$.



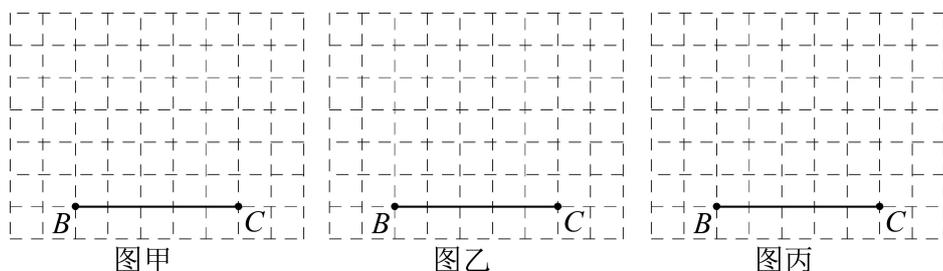
- (1) 画出 $\triangle ABC$ 的三条高 AD 、 BE 、 CF （不写画法）；
- (2) 在（1）的条件下，若 $AB = 6$, $BC = 3$, $CF = 2$, 则 $AD =$ _____.

【变式 12-2】（2023 春·上海宝山·七年级校考期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，按下列要求画图并填空：



- (1)画 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CD ;
- (2) E 在 CD 上, 连接 BE , 使得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle EBC}$, 请画出点 E ;
- (3)已知 $BD = 3, CD = 4, DE = 1$, 那么点 C 到直线 AB 的距离为_____, $\triangle ADC$ 的面积为_____.

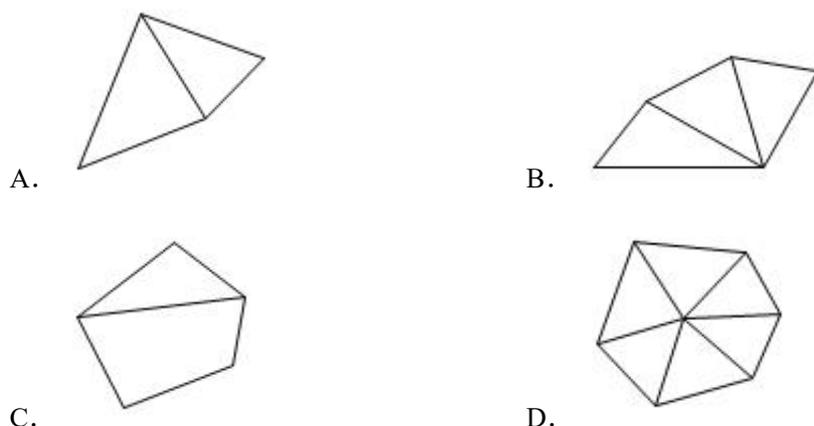
【变式 12-3】 (2023 春·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨市萧红中学校考期中) 如图是由边长都是 1 的小正方形组成的网格. 图中各点均在格点上, 请按以下要求画图. ①所画顶点必须在格点上; ②标清指定的字母; ③不得出格.



- (1)在图甲中画出 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高 AD ;
- (2)在图乙中画出一个 $\text{Rt} \triangle EBC$, 且 $\triangle EBC$ 的面积是图甲中 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍;
- (3)在图丙中画出一个锐角三角形 $\triangle MBC$, 且面积为 15.

【题型 13 三角形的稳定性】

【例 13】 (2023 秋·北京·七年级校考期中) 下列图形中不具备稳定性的是 ()



【变式 13-1】 (2023 秋·四川泸州·七年级四川省泸县第四中学校考期末) 如图, 某中学的电动伸缩校门利用



润禾托管

的数学原理是 ()

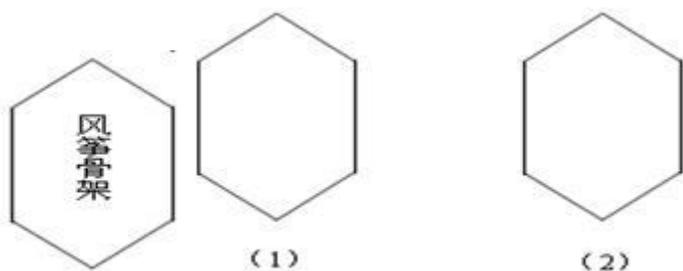


- A. 三角形的稳定性
- B. 两点之间，线段最短
- C. 三角形两边之和大于第三边
- D. 四边形的不稳定性

【变式 13-2】(2023 秋·广西南宁·七年级南宁市天桃实验学校校考期中) 要使四边形木架不变形，至少要再钉几根木条 ()

- A. 4
- B. 2
- C. 1
- D. 3

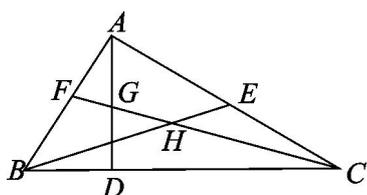
【变式 13-3】(2023 春·广东惠州·七年级统考期中) 如图，是一个用六根竹条连接而成的凸六边形风筝骨架，考虑到骨架的稳固性、美观性、实用性等因素，需再加竹条与其顶点连接。要求：



- (1) 在图 (1)、(2) 中分别加适当根竹条，设计出两种不同的连接方案。
- (2) 通过上面的设计，可以看出至少需再加 根竹条，才能保证风筝骨架稳固、美观和实用。
- (3) 在上面的方案设计过程中，你所应用的数学道理是。

【题型 14 三角形中的角平分线、中线、高有关的综合计算】

【例 14】(2023 秋·湖北十堰·七年级统考期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=6$ ， $AC=8$ ， $BC=10$ ， AD 是高， BE 是中线， CF 是角平分线， CF 交 AD 于点 G ，交 BE 于点 H ，下面结论：① $\triangle ABE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积；② $\angle AFG = \angle AGF$ ；③ $\angle FAG = 2\angle ACF$ ；④ $AD=2.4$ 。其中结论正确的是 ()

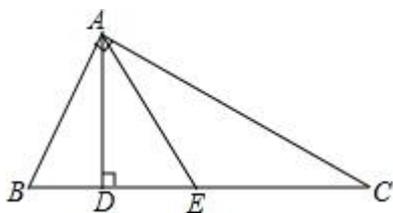


- A. ①②
- B. ①②④
- C. ①②③
- D. ①②③④



润禾托管

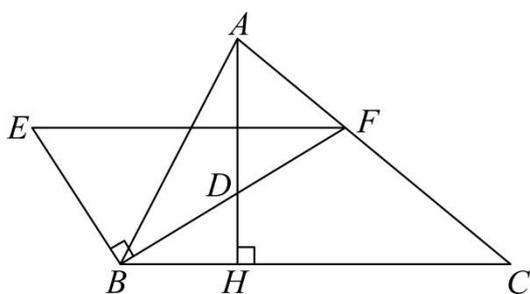
【变式 14-1】(2023 秋·江西南昌·七年级校考期末)如图所示,已知 AD, AE 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线, $AB=3\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $\angle CAB=90^\circ$.



(1)求 AD 的长.

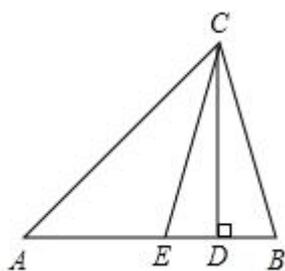
(2)求 $\triangle ABE$ 的面积.

【变式 14-2】(2023 春·陕西商洛·七年级统考期末)如图,在三角形 ABC 中, $AH \perp BC$, BF 平分 $\angle ABC$, $BE \perp BF$, $EF \parallel BC$, 以下四个结论: ① $AH \perp EF$; ② $\angle ABF = \angle EFB$; ③ $AC \parallel BE$; ④ $\angle E = \angle ABE$. 其中正确的结论有 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【变式 14-3】(2023 春·河南南阳·七年级统考期末)如图,在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的高, CE 是 $\angle ACB$ 的平分线.



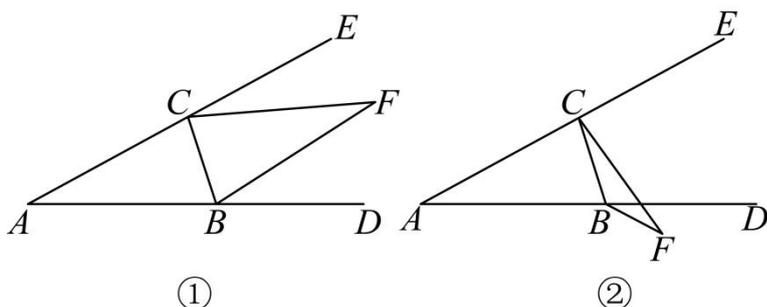
(1)若 $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 76^\circ$, 求 $\angle DCE$ 的度数;

(2)若 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, 求 $\angle DCE$ 的度数 (用含 α, β 的式子表示)

(3)当线段 CD 沿 DA 方向平移时, 平移后的线段与线段 CE 交于 G 点, 与 AB 交于 H 点, 若 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, 求 $\angle HGE$ 与 α, β 的数量关系.

【题型 15 三角形的内角和与外角有关的计算】

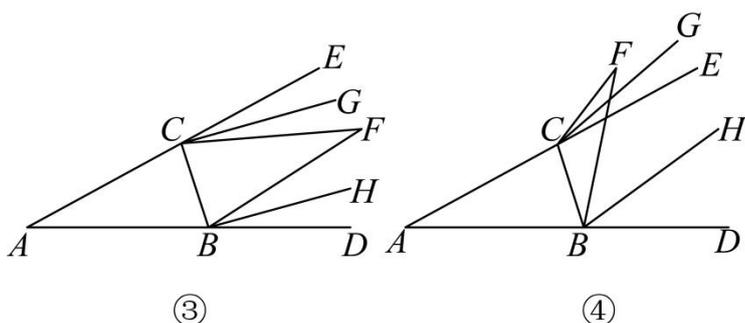
【例 15】(2023 春·江苏南京·七年级统考期中)如图,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FBC$ 中, $\angle A \leq \angle F$. 点 F 与 A 位于线段 BC 所在直线的两侧, 分别延长 AB, AC 至点 D, E .



【特殊化思考】

若 $\angle A = \angle F$ 时，请尝试探究：

- (1) 当 F 在 $\angle A$ 内部时，请直接写出 $\angle ECF$ 、 $\angle DBF$ 与 $\angle A$ 的数量关系为_____；
- (2) 当 F 在 $\angle A$ 外部时，请直接写出 $\angle ECF$ 、 $\angle DBF$ 与 $\angle A$ 的数量关系为_____；
- (3) 若 CG 平分 $\angle ECF$ ， BH 平分 $\angle FBD$ 。无论点 F 在 $\angle A$ 内部（如图③）还是 $\angle A$ 外部（如图④）时，都有 $CG \parallel BH$ ，请选择一幅图进行证明；

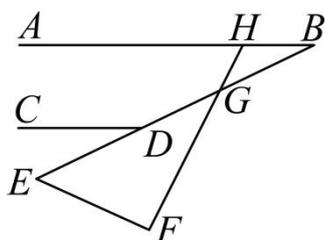


【一般化探究】

若 $\angle A < \angle F$ 时，请尝试探究：

- (4) 若射线 CG 、 BH 分别是 $\angle ECF$ ， $\angle DBF$ 的 n 等分线（ n 为大于2的正整数），且 $\angle ECG = \frac{1}{n}\angle ECF$ ， $\angle HBD = \frac{1}{n}\angle DBF$ 。当 $CG \parallel BH$ 时，直接写出 $\angle A$ 与 $\angle F$ 需满足的条件：_____。

【变式 15-1】（2023 秋·辽宁沈阳·七年级统考期末）如图，已知 $CD \parallel AB$ ，点 E 在 BD 延长线上，且 $\angle BEF = 70^\circ$ ，点 H 在 AB 上， HF 交 BD 于 G 点。



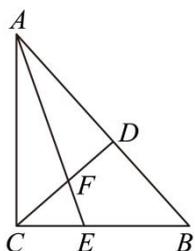
(1) 求证： $\angle AHF > \angle CDE$ ；



润禾托管

(2)若 $\angle AHF - \angle CDE = 30^\circ$ ，求 $\angle F$ 的度数

【变式 15-2】(2023 春·江苏苏州·七年级苏州中学校考期中)已知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = \angle CDB = m^\circ (0 < m < 180)$ ， AE 是角平分线， D 是 AB 上的点， AE 、 CD 相交于点 F 。



(1)若 $m = 90$ 时，如图所示，求证： $\angle CFE = \angle CEF$ ；

(2)若 $m \neq 90$ 时，试问 $\angle CFE = \angle CEF$ 还成立吗？若成立说明理由；若不成立，请比较 $\angle CFE$ 和 $\angle CEF$ 的大小，并说明理由。

【变式 15-3】(2023 春·江苏无锡·七年级统考期中)在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 是 BC 上一点，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折后得到 $\triangle AED$ ，边 AE 交射线 BC 于点 F 。

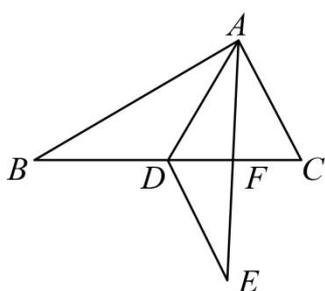


图 1

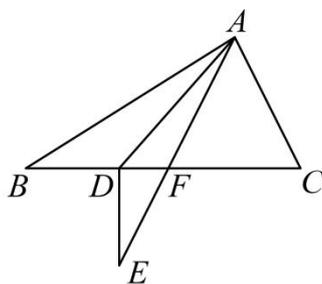
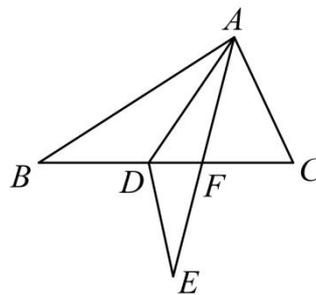


图 2



备用图

(1)如图 1，当 $DE \parallel AC$ 时，求证： $AE \perp BC$

(2)若 $\angle C = \angle B + 10^\circ$ ， $\angle BAD = x^\circ (0 < x < 50)$

①如图 2，当 $DE \perp BC$ 时，求 x 的值。

②是否存在这样的 x 的值，使得 $\triangle DEF$ 中有两个角相等。若存在，求 x 的值；若不存在，请说明理由。