专题 7.11　与三角形有关的角的四大类型解答

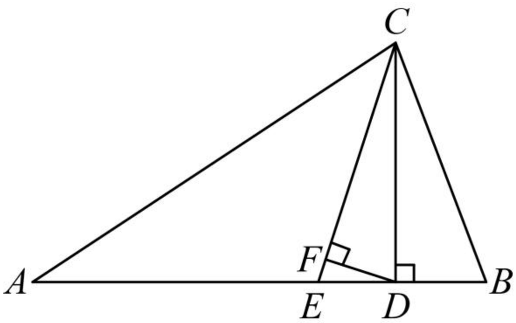
【苏科版】

考卷信息：

本套训练卷共 30 题，题型针对性较高，覆盖面广，选题有深度，可加强学生对与三角形有关的角的四大类型解答的理解！

【类型 1　与三角形有关的角的计算】

1．（2023 春·甘肃兰州·七年级兰州十一中校考期末）如图，$\triangle ABC$中，$\angle A=35°$，$\angle B=65°$，CE平分$\angle ACB$，$CD\perp AB$于D，$DF\perp CE$于F，求$\angle CDF$的度数．



【答案】75°

【分析】先由三角形内角和定理得到$\angle ACB=80$，再由角平分线的定义得到$\angle ACE=40$，进而利用三角形外角的性质得到$\angle CED=75°$，根据垂直的定义和三角形内角和定理求出$\angle EDF=15°$，进而根据垂直的定义求出$\angle CDF$的度数即可．

【详解】解：∵在$\triangle ABC$中，$\angle A=35°$，$\angle B=65°$，，

∴$\angle ACB=180°-\angle A-\angle B=80°$，

∵CE平分$\angle ACB$，

∴$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=40°$，

∴$\angle CED=\angle A+\angle ACE=75°$，

∵$DF\perp CE$，即$\angle DFE=90°$，

∴$\angle EDF=180°-\angle DEF-\angle DFE=15°$，

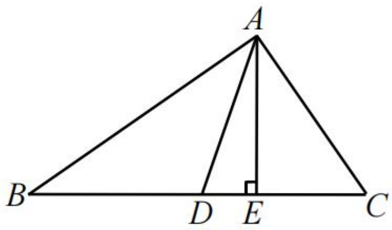
∵$CD\perp AB$，即$\angle ADC=90°$，

∴$\angle CDF=\angle ADC-\angle EDF=75°$．

【点睛】本题主要考查了三角形内角和定理，三角形外角的性质，角平分线的定义等等，熟知三角形内角和

为 180°是解题的关键．

2．（2023 春·四川达州·七年级校联考期中）如图，在$\triangle ABC$中，AE为BC边上的高，点D为BC边上的一点，连接AD．



(1)当AD为BC边上的中线时，若$AE=6$，$\triangle ABC$的面积为 30，求CD的长；

(2)当AD为$\angle BAC$的角平分线时，若$\angle C=66^{\circ}$，$\angle B=36^{\circ}$，求$\angle DAE$的度数．

【答案】(1)$CD=5$

(2)$\angle DAE=15^{\circ}$

【分析】（1）由中线平分三角形面积可得$\triangle ADC$的面积，再由面积公式即可求得CD的长；

（2）由三角形内角和可求得$\angle BAC$的度数，由角平分线的性质可求得$\angle ADE$，然后在 Rt$\triangle ADE$中即可求得结果．

【详解】（1）解：$\because AD$为BC边上的中线，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 30=15$，

$\because AE$为边BC上的高，$AE=6$，

$\therefore \frac{1}{2}CD\cdot AE=15$，

$\therefore CD=5$．

（2）解：$\because \angle BAC=180^{\circ}-\angle B-\angle C=78^{\circ}$，

$\because AD$为$\angle BAC$的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=39^{\circ}$，

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle BAD=36^{\circ}+39^{\circ}=75^{\circ}$，

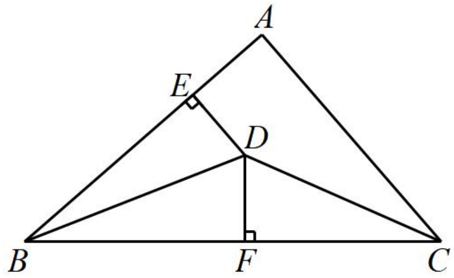
$\because AE\perp BC$，

$\therefore \angle AED=90^{\circ}$，

$\therefore \angle DAE=90^{\circ}-75^{\circ}=15^{\circ}$．

【点睛】本题考查了三角形中线、角平分线、三角形内角和及三角形外角的性质等知识，掌握这些知识是基础与关键.

3．（2023春·安徽淮北·七年级校考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$DE\perp AB$于点E，$DF\perp BC$于点F，且$DE=DF$，CD平分$\angle ACB$，$\angle BDC=135°$.



(1)求$\angle DBF+\angle DCF$的度数；

(2)求$\angle A$的度数.

【答案】(1)45°

(2)90°

【分析】（1）根据三角形的内角和定理，即可求解；

（2）先证明BD平分$\angle ABC$，再根据三角形的内角和即可求解.

【详解】（1）解：∵$\angle BDC=135°$，

∴$\angle DBF+\angle DCF=180°-135°=45°$；

（2）解：∵$DE\perp AB$，$DF\perp BC$，$DE=DF$，

∴BD平分$\angle ABC$，即$\angle ABD=\angle CBD$.

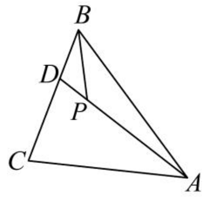
∵CD平分$\angle ACB$，

∴$\angle ACD=\angle BCD$.

∴$\angle A=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-2(\angle DBC+\angle DCB)=180°-2\times 45°=90°$.

【点睛】本题主要考查了三角形的内角和，角平分线的判定，解题的关键是掌握三角形的内角和为180°.

4．（2023春·湖北孝感·七年级统考期中）如图，点D为$\triangle ABC$的边BC上一点，$\angle BAD=\frac{1}{3}\angle BAC$，$BP$平分$\angle ABC$交$AD$于点$P$，$\angle C=70°$，$\angle ADB=110°$．求$\angle BPD$的度数.



【答案】45°

【分析】首先根据三角形的外角和求出$\angle CAD=40°$，由此可得$\angle BAD=20°$，再根据三角形的内角和和角平分线的性质求出$\angle BPD$的度数即可.

【详解】解：$\because \angle C+\angle CAD=\angle ADB$，

$\therefore 70°+\angle CAD=110°$.

$\therefore \angle CAD=40°$.

$\because \angle BAD=\frac{1}{3}\angle BAC$，

$\therefore \angle CAB=60°$，$\angle BAD=20°$.

在$\triangle ABC$中，$\angle C+\angle CAB+\angle ABC=180°$，

$\therefore 70°+60°+\angle ABC=180°$，

$\therefore \angle ABC=50°$.

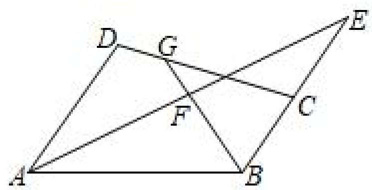
$\because BP$平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle ABP=\frac{1}{2}\angle ABC=25°$.

$\therefore \angle BPD=\angle ABP+\angle BAD=25°+20°=45°$.

【点睛】本题主要考查了三角形的内角和、外角和和角平分线的定义，属于基础题，要熟练掌握.

5．（2023春·辽宁鞍山·七年级统考期中）如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle DAB$的平分线交BC的延长线于点E，$BG\perp AE$，垂足为点F，交CD于点G.



(1)求证：BG平分$\angle ABE$.

(2)若$\angle DCE=105°$，$\angle DAB=60°$，求$\angle BGC$的度数.

【答案】(1)证明见详解

(2)35°

【分析】(1)根据平行线的性质得出$\angle DAE=\angle E$，再根据角平分线的性质得出$\angle DAE=\angle BAE$，从而得出$\angle E=\angle BAE$，最后根据等腰三角形的性质即可得出BG平分$\angle ABE$；

（2）根据$\angle DAB=60°$，$AD\parallel BC$，得出$\angle ABE=120°$，再根据角平分线的性质得出$\angle GBE=60°$，从而得出$\angle DCE=105°$，最后根据$\angle BGC=\angle DCE-\angle GBE$即可得出答案.

【详解】（1）证明：$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DAE=\angle E$，

$\because AE$平分$\angle DAB$，

$\therefore \angle DAE=\angle BAE$，

$\therefore \angle E=\angle BAE$，

$\therefore AB=BE$，

$\because BG\perp AE$，

$\therefore BG$平分$\angle ABE$；

（2）$\because \angle DAB=60°$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle ABE=120°$，

$\because BG$平分$\angle ABE$，

$\therefore \angle GBE=60°$，

$\because \angle DCE=105°$，

$\therefore \angle BGC=\angle DCE-\angle GBE=105°-60°=35°$.

【点睛】此题考查了多边形的内角与外角以及平行线的性质，熟记平行线的性质以及三角形的性质是解题的关键.

6．（2023春·浙江温州·七年级校联考期中）已知：如图1，在三角形ABC中，$\angle BAC=40°$，$\angle C=65°$，将线段AC沿直线AB平移得到线段DE，连接AE.

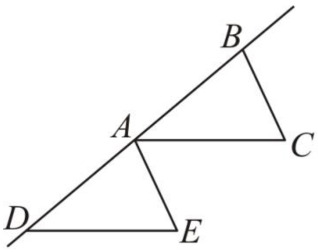


图1

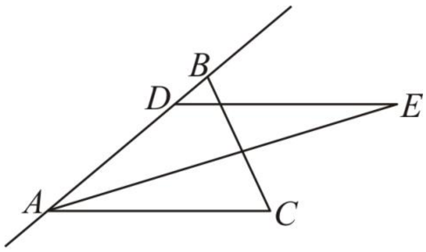


图2

(1)当$\angle E = 65°$时，请说明$AE \parallel BC$.

(2)如图 2，当DE在AC上方时，且$\angle E = 2\angle BAE - 29°$时，求$\angle BAE$与$\angle EAC$的度数.

(3)在整个运动中，当AE垂直三角形ABC中的一边时，求出所有满足条件的$\angle E$的度数.

【答案】(1)见解析

(2)$\angle BAE = 23°$，$\angle EAC = 17°$

(3)25°或 50°或 90°

【分析】（1）由平移的性质可得$AC \parallel DE$，可得$\angle CAE = \angle E = 65° = \angle C$，可得结论；

（2）由平行线的性质可得$\angle BAC = \angle BDE = 40°$，$\angle E = \angle EAC$，由外角的性质可得$\angle E + \angle BAE = 40°$，即可求解；

（3）分三种情况讨论，由平行线的性质以及三角形的内角和定理即可求解.

【详解】（1）证明：∵将线段AC沿直线AB平移得到线段DE，

$\therefore AC \parallel DE$，

$\therefore \angle CAE = \angle E = 65°$，

$\therefore \angle C = \angle CAE$，

$\therefore AE \parallel BC$；

（2）解：∵将线段AC沿直线AB平移得到线段DE，

$\therefore DE \parallel AC$，

$\therefore \angle BAC = \angle BDE = 40°$，$\angle E = \angle EAC$，

$\therefore \angle E + \angle BAE = 40°$，

$\because \angle E = 2\angle BAE - 29°$，

$\therefore \angle BAE = 23°$，$\angle E = 17°$，

$\therefore \angle EAC = 17°$；

（3）解：如图 2，当$DE \perp BC$时，

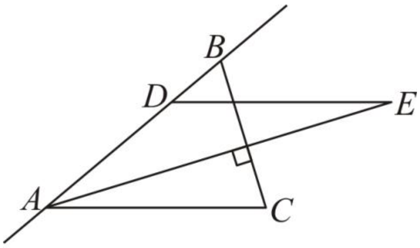


图2

$\because \angle BAC = 40°$，$\angle C = 65°$，

$\therefore \angle ABC = 75°$，

$\because AE \perp BC$，

$\therefore \angle BAE = 15°$，

$\because \angle BDE = 40°$，

$\therefore \angle E = 25°$；

如图 3，当$AE \perp AC$时，

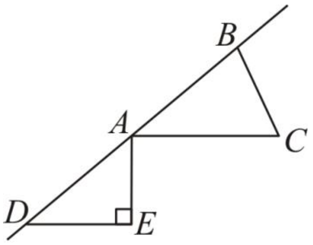


图3

$\because AC \parallel DE$，

$\therefore \angle E = \angle CAE = 90°$，

如图 4，当$AE \perp AB$时，

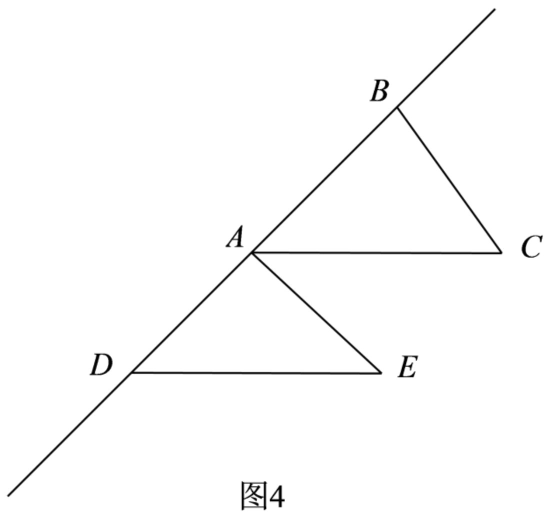


图4

∵$AC\parallel DE$，$\angle BAC=40°$

∴$\angle E=90°-\angle ADE=50°$

综上所述：$\angle E=25°$或$50°$或$90°$.

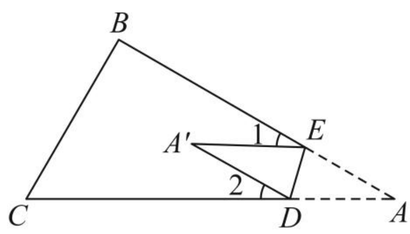
【点睛】本题是几何变换综合题，考查了平行线的性质，平移的性质，三角形的外角性质等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

7．（2023春·吉林长春·七年级长春外国语学校校考期中）将三角形纸片ABC沿直线DE折叠，使点A落在A'处.

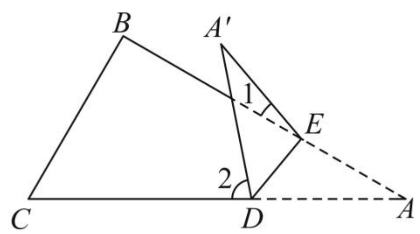
【感知】如果点A'落在边AB上，这时图①中的$\angle 1$变为0°，那么$\angle A'$与$\angle 2$之间的关系是__；

【探究】如果点A'落在四边形$BCDE$的内部(如图①)，那么$\angle A'$与$\angle 1$、$\angle 2$之间存在怎样的数量关系?并说明理由.

【拓展】如果点A'落在四边形$BCDE$的外部(如图②)，那么请直接写出$\angle A'$与$\angle 1$、$\angle 2$之间存在数量关系_.



①



②

【答案】感知：$\angle 2=2\angle A'$探究：$2\angle A'=\angle 1+\angle 2$ 拓展：$2\angle A'=\angle 2-\angle 1$

【分析】[感知]根据三角形外角性质得出$\angle 1=\angle A+\angle EA'D$，根据折叠性质得出$\angle EA'D=\angle A$，即可求出答案；

[探究]根据三角形内角和定理得出$\angle AED+\angle ADE=180°-\angle A$，$\angle A'ED+\angle A'DE=180°-\angle A'$，两式相加可得$\angle A'DA+\angle A'EA=360°-\left(\angle A+\angle A'\right)$，即$\angle A+\angle A'+\angle A'DA+\angle A'EA=360°$，根据平角的定义得出$\angle 1+\angle A'DA+\angle 2+\angle A'EA=360°$，可得出$\angle A'+\angle A=\angle 1+\angle 2$，根据折叠性质得出$\angle A'=\angle A$，即可得出 $2\angle A=\angle 1+\angle 2$；

[拓展]根据三角形外角性质得出$\angle DME=\angle A'+\angle 1$，$\angle 2=\angle A+\angle DME$，推出$\angle 2=\angle A+\angle A'+\angle 1$，即可得出答案.

【详解】解：[感知]：$\angle 2=2\angle A$.

理由如下：当点A'落在边AB上时，由折叠可得：$\angle EA'D=\angle A$；

$\because \angle 2=\angle A+\angle EA'D$，

$\therefore \angle 2=2\angle A$，

故答案为：$\angle 2=2\angle A$；

[探究]：$2\angle A=\angle 1+\angle 2$.

理由如下：$\because \angle AED+\angle ADE=180°-\angle A$，$\angle A'ED+\angle A'DE=180°-\angle A'$，

$\therefore \angle A'DA+\angle A'EA=360°-(\angle A+\angle A')$，

$\therefore \angle A+\angle A'+\angle A'DA+\angle A'EA=360°$，

$\because \angle 1+\angle A'DA+\angle 2+\angle A'EA=360°$，

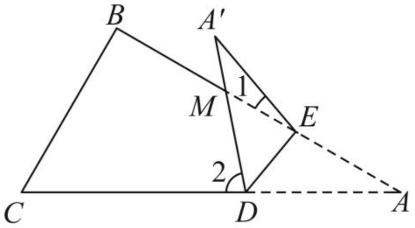
$\therefore \angle A'+\angle A=\angle 1+\angle 2$，

由折叠可得：$\angle A=\angle A'$，

$\therefore 2\angle A'=\angle 1+\angle 2$，

故答案为：$2\angle A'=\angle 1+\angle 2$；

[拓展]：如图②，



②

$\because \angle DME=\angle A'+\angle 1$，$\angle 2=\angle A+\angle DME$，

由折叠可得：$\angle A=\angle A'$，

$\therefore \angle 2 = \angle A + \angle A' + \angle 1 = 2\angle A + \angle 1$，

$\therefore 2\angle A = \angle 2 - \angle 1$，

$2\angle A' = \angle 2 - \angle 1$

故答案为：$2\angle A' = \angle 2 - \angle 1$.

【点睛】本题考查了折叠的性质，三角形外角性质，三角形内角和定理的应用，本题主要考查运用定理进行推理和计算的能力．解题的关键是结合图形运用外角的性质列等式求解．

8．（2023春·江西萍乡·七年级统考期末）已知点A在射线CE上，$\angle C = \angle ADB$.

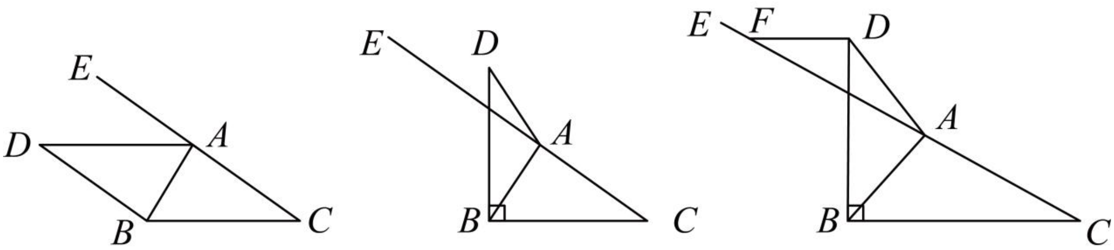


图1　　　　图2　　　　图3

(1)如图1，若$AD \parallel BC$，求证：$AC \parallel BD$；

(2)如图2，若$BD \perp BC$，垂足为B，BD交CE于点G，请探究$\angle DAE$与$\angle C$的数量关系，写出你的探究结论，并说明理由；

(3)如图3，在（2）的条件下，过点D作$DF \parallel BC$交射线CE于点F，当$\angle BAC = \angle BAD$，$\angle DFE = 8\angle DAE$时，求$\angle BAD$的度数．

【答案】(1)证明见解析

(2)$\angle DAE + 2\angle C = 90°$，理由见解析

(3)$99°$

【分析】（1）根据$AD \parallel BC$，可得$\angle DAE = \angle C$，再根据$\angle C = \angle ADB$，即可得到$\angle DAE = \angle ADB$，即可得证；

（2）$\angle DAE + 2\angle C = 90°$．根据三角形外角的性质，可得到$\angle CGB = \angle ADB + \angle DAE$，根据直角三角形两锐角互余，有$\angle CGB + \angle C = 90°$，再根据$\angle C = \angle ADB$即可得到$\angle DAE$与$\angle C$的数量关系；

（3）设$\angle DAE = \alpha$，则$\angle DFE = 8\alpha$，$\angle AFD = 180° - 8\alpha$，根据$DF \parallel BC$，即可得到$\angle C = \angle AFD = 180° - 8\alpha$，再根据$\angle DAE + 2\angle C = 90°$，即可得到$\alpha + 2(180° - 8\alpha) = 90°$，求得$\alpha$的值，即可运用三角形内角和定理得到$\angle BAD$的度数．

【详解】（1）证明：$\because AD \parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle C$，

又∵$\angle C=\angle ADB$，

∴$\angle DAE=\angle ADB$，

∴$AC\parallel BD$；

（2）解：$\angle DAE+2\angle C=90°$

理由如下：∵$\angle CGB$是$\triangle ADG$的外角，

∴$\angle CGB=\angle ADB+\angle DAE$，

∵$BD\perp BC$，

∴$\angle CBD=90°$，

∴在$\triangle BCG$中，$\angle CGB+\angle C=90°$，

∴$\angle ADB+\angle DAE+\angle C=90°$，

又∵$\angle C=\angle ADB$，

∴$\angle DAE+2\angle C=90°$；

（3）设$\angle DAE=\alpha$，则$\angle DFE=8\alpha$，

∴$\angle AFD=180°-8\alpha$，

∵$DF\parallel BC$，

∴$\angle C=\angle AFD=180°-8\alpha$，

又∵$\angle DAE+2\angle C=90°$，

∴$2(180°-8\alpha)+\alpha=90°$，

∴$\alpha=18°$

∴$\angle C=180°-8\times18°=36°$，

∴$\angle ADB=\angle C=36°$，

又∵$\angle BAC=\angle BAD$，

∴$\angle ABC=180°-\angle C-\angle BAC=180°-\angle ADB-\angle BAD=\angle ABD$，

∵$\angle CBD=90°$，

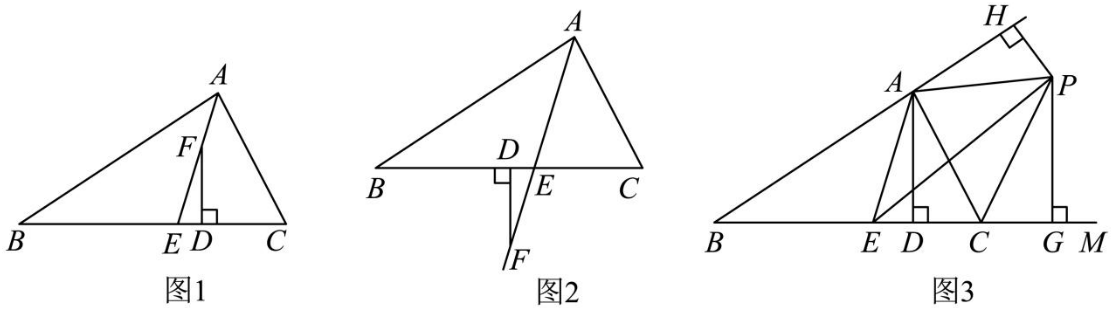
∴$\angle ABC=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle CBD=45°$，

∴在$\triangle ABD$中，$\angle BAD=180°-45°-36°=99°$，

∴$\angle BAD$的度数为$99°$.

【点睛】本题考查平行线的判定与性质，三角形内角和定理，三角形外角的性质，直角三角形两锐角互余．灵活运用三角形内角和定理是解题的关键．

9．（2023春·福建泉州·七年级统考期末）在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$，AE平分$\angle BAC$，点F为射线AE上一点（不与点E重合），且$FD\perp BC$于点D．



(1)如图1，如果点F在线段AE上，且$\angle C=50°$，$\angle B=30°$，则$\angle EFD=$______．

(2)如果点F在$\triangle ABC$的外部，分别作出$\angle CAE$和$\angle EDF$的角平分线，交于点K，请在图2中补全图形，探究$\angle AKD$、$\angle C$、$\angle B$三者之间的数量关系，并说明理由：

(3)如图3，若点F与点A重合，PE、PC分别平分$\angle AEC$和$\triangle ABC$的外角$\angle ACM$，连接PA，过点P作$PG\perp BC$交BC延长线于点G，$PH\perp AB$交BA的延长线于点H，若$\angle EAD=\angle CAD$，且$\angle CPG=\frac{7}{10}(\angle B+\angle CPE)$，求$\angle EPH$的度数．

【答案】(1)10°

(2)画图见解析，$\angle AKD=\frac{3\angle C-\angle B}{4}$，理由见解析

(3)95°

【分析】（1）先求出$\angle BAC=100°$，进而得到$\angle BAE=50°$，$\angle AEC=80°$，根据$FD\perp BC$得到$\angle FDE=90°$，即可求出$\angle EAD=90°-\angle AED=10°$；

（2）根据题意先画出图形，根据三角形内角和定理和角平分线的定义得到$\angle CDK=\frac{1}{2}\angle EDF=45°$，$\angle CAK=\frac{1}{2}\angle CAF=45°-\frac{1}{4}\angle B-\frac{1}{4}\angle C$，再由三角形内角和定理得到$\angle TAC+\angle C=\angle TDK+\angle AKD$，则$45°-\frac{1}{4}\angle B-\frac{1}{4}\angle C+\angle C=45°+\angle AKD$，据此即可得到答案；

（3）根据$\angle EAD=\angle CAD=2\alpha$得到$\angle BAE=\angle CAE=4\alpha$，得到$\angle BAD=6\alpha$，从而求出$\angle B=90°-6\alpha$，进而求出$\angle CPE=2\alpha$，结合$\angle CPG=\frac{7}{10}(\angle B+\angle CPE)$，得到$\angle CPG=63°-\frac{14}{5}\alpha$．根据$PG\perp BC$，得到$(45°+\alpha)+$

$\left(63^\circ - \frac{14}{5}\alpha\right) = 90^\circ$，求出$\alpha = 10^\circ$．从而分别求出$\angle B = 90^\circ - 6\alpha = 30^\circ$，$\angle PEM = 35^\circ$，$\angle BEP = 145^\circ$，再求出$\angle PHB = 90^\circ$，根据四边形内角和为$360^\circ$即可求出$\angle EPH = 95^\circ$．

【详解】（1）解：$\because \angle B = 30^\circ$，$\angle C = 50^\circ$，

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 100^\circ$，

$\because AE$是$\triangle ABC$的角平分线，

$\therefore \angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 50^\circ$，

$\therefore \angle AEC = \angle B + \angle BAE = 80^\circ$，

$\because DF \perp BC$，

$\therefore \angle FDE = 90^\circ$，

$\therefore \angle EFD = 90^\circ - \angle AED = 10^\circ$，

故答案为：10°；

（2）解：$\angle AKD = \frac{3\angle C - \angle B}{4}$，理由如下：

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C$，

$\because AE$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAF = \angle CAF = \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$，

$\because DF \perp BC$，

$\therefore \angle FDE = 90^\circ$，

$\because \angle CAE$和$\angle EDF$的角平分线交于点K，

$\therefore \angle CDK = \frac{1}{2}\angle EDF = 45^\circ$，$\angle CAK = \frac{1}{2}\angle CAF = 45^\circ - \frac{1}{4}\angle B - \frac{1}{4}\angle C$，

$\because \angle TAC + \angle C + \angle ATC = 180^\circ = \angle TDK + \angle AKD + \angle DTK$，$\angle DTK = \angle ATC$，

$\therefore \angle TAC + \angle C = \angle TDK + \angle AKD$，

$\therefore 45^\circ - \frac{1}{4}\angle B - \frac{1}{4}\angle C + \angle C = 45^\circ + \angle AKD$，

$\therefore \angle AKD = \frac{3}{4}\angle C - \frac{1}{4}\angle B = \frac{3\angle C - \angle B}{4}$；

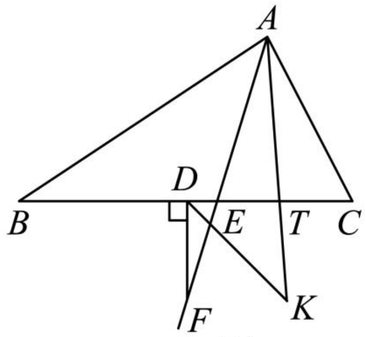


图2

（3）解：设$\angle EAD=\angle CAD=2\alpha$，

∵AE平分$\angle BAC$，

∴$\angle BAE=\angle CAE=\angle EAD+\angle CAD=4\alpha$，

∴$\angle BAD=6\alpha$，

∵$AD\perp BC$

∴$\angle ADE=90°$，

∴$\angle B=90°-\angle BAD=90°-6\alpha$，$\angle AED=90°-2\alpha$，

∴$\angle ACM=\angle B+\angle BAC=90°+2\alpha$，

∵PE、PC分别平分$\angle AEC$和$\triangle ABC$的外角$\angle ACM$，

∴$\angle PEC=\frac{1}{2}\angle AEC=45°-\alpha$，$\angle PCG=\frac{1}{2}\angle ACM=45°+\alpha$，

∴$\angle EPC=\angle PCG-\angle PEC=2\alpha$，

∴$\angle CPG=\frac{7}{10}(\angle B+\angle CPE)=\frac{7}{10}(90°-6\alpha+2\alpha)=63°-\frac{14\alpha}{5}$，

∵$PG\perp BC$，

∴$\angle PCG+\angle CPG=90°$，

即$(45°+\alpha)+\left(63°-\frac{14}{5}\alpha\right)=90°$，

∴$\alpha=10°$.

∴$\angle B=90°-6\alpha=30°$，$\angle PEC=35°$，

∴$\angle BEP=180°-\angle PEM=145°$，

∵$PH\perp AB$，

∴$\angle PHB=90°$，

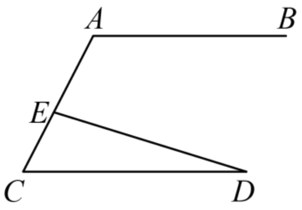
∴在四边形$BEPH$中，$\angle EPH=360°-\angle BEP-\angle B-\angle BHP=95°$（四边形内角和可以看做是两个三角形的

内角和）.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，三角形外角定理，三角形角平分线，综合性较强，第（3）步难度较大．熟知相关定理，并根据题意进行角的表示与代换是解题关键．

【类型 2 与三角形有关的角的证明】

1．（2023 春·安徽宿州·七年级统考期末）如图，$AB \parallel CD$，点 E 在AC上，求证：$\angle A=\angle CED+\angle D$．



【答案】证明见解析

【分析】首先根据平行线的性质得到$\angle A+\angle C=180°$，然后根据三角形内角和定理得到$\angle CED+\angle D+\angle C=180°$，进而可证明出$\angle A=\angle CED+\angle D$．

【详解】∵$AB \parallel CD$

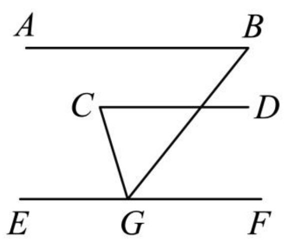
∴$\angle A+\angle C=180°$

∵在$\triangle CED$中，$\angle CED+\angle D+\angle C=180°$

∴$\angle A=\angle CED+\angle D$．

【点睛】本题考查平行线的性质以及三角形的内角和定理，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．

2．（2023 春·湖北武汉·七年级统考期末）如图，已知$AB \parallel CD$，$\angle B$=60°，点G在直线EF上且$\angle ABG=\angle FGB$．



(1)求证：$\angle C=\angle CGE$．

(2)若$\angle C=\angle CGB+20°$，求$\angle C$的度数．

【答案】(1)证明见解析；

(2)70°．

【分析】（1）根据平行线的判定及性质即可证明；

（2）先根据平行线的性质求得$\angle CMG=\angle B=60^{\circ}$，再利用三角形的内角和定理即可求解.

【详解】（1）证明：∵$\angle ABG=\angle FGB$，

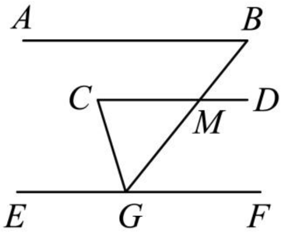
∴$AB\parallel EF$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$CD\parallel EF$，

∴$\angle C=\angle CGE$；

（2）解：如图，



∵$\angle C=\angle CGB+20^{\circ}$，

∴$\angle CGB=\angle C-20^{\circ}$，

∵$AB\parallel CD$，$\angle B$=60°，

∴$\angle CMG=\angle B=60^{\circ}$，

∵$\angle C+\angle CMG+\angle CGB=180^{\circ}$，

∴$\angle C+\angle C-20^{\circ}+60^{\circ}=180^{\circ}$，

∴$\angle C=70^{\circ}$.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定及性质以及三角形的内角和定理，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

3．（2023春·江苏南通·七年级统考期末）已知点D在$\angle ABC$内，E为射线BC上一点，连接DE，CD.

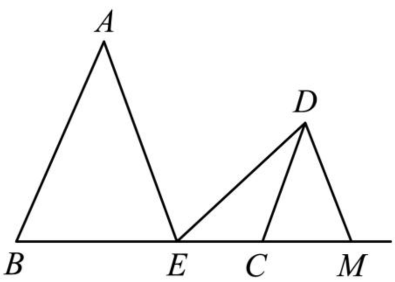


图1

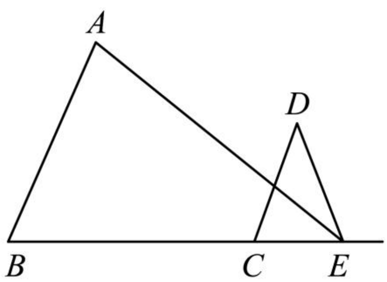


图2

(1)如图1所示，连接AE，若$\angle AED=\angle BAE+\angle CDE$.

①线段AB与CD有何位置关系？请说明理由；

②过点D作$DM \parallel AE$交直线BC于点M，求证：$\angle CDM = \angle BAE$；

(2)如图 2 所示，$\angle AED = \angle A - \angle D$，若$M$为平面内一动点，$MA \parallel ED$，请直接写出$\angle MAB$与$\angle CDE$的数量关系.

【答案】(1)①$AB \parallel CD$，理由见解析；②证明见解析

(2)$\angle MAB = \angle CDE$或$\angle MAB + \angle CDE$=180°

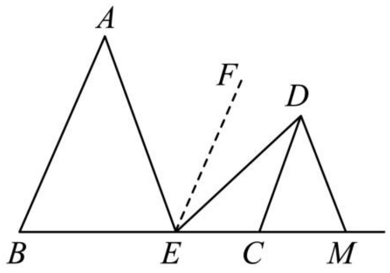
【分析】（1）①过点E作$EF \parallel AB$，则$\angle AEF = \angle BAE$，由$\angle AED = \angle BAE + \angle CDE$，$\angle AED = \angle AEF + \angle FED$得到$\angle CDE = \angle FED$，则$FE \parallel CD$，即可得到结论.

②由$DM \parallel AE$得到$\angle AED = \angle MDE$．$\angle CDE = \angle FED$，则$\angle MDC = \angle AEF$．由$\angle AEF = \angle BAE$即可得到$\angle CDM = \angle BAE$；

（2）分点M在直线AB的右侧和点M在直线AB的左侧两种情况，分别求出$\angle MAB$与$\angle CDE$的数量关系为：$\angle MAB = \angle CDE$或$\angle MAB + \angle CDE = 180°$.

【详解】（1）解：①$AB \parallel CD$.理由：

过点E作$EF \parallel AB$，如图，



则$\angle AEF = \angle BAE$，

$\because \angle AED = \angle BAE + \angle CDE$，$\angle AED = \angle AEF + \angle FED$，

$\therefore \angle CDE = \angle FED$，

$\therefore FE \parallel CD$，

$\because AB \parallel EF$，

$\therefore AB \parallel CD$.

② $\because DM \parallel AE$，

$\therefore \angle AED = \angle MDE$.

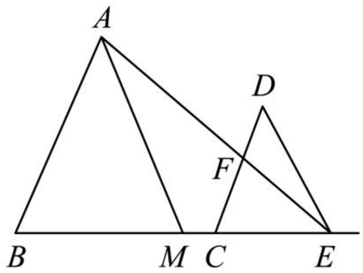
$\because \angle CDE = \angle FED$，

$\therefore \angle MDC = \angle AEF$.

$\because \angle AEF=\angle BAE$，

$\therefore \angle CDM=\angle BAE$.

（2）当点M在直线AB的右侧时，如下图，$\angle MAB=\angle CDE$，理由：



设AE与CD交于点F，

$\because \angle CFE=\angle D+\angle AED$，

$\therefore \angle AED=\angle CFE-\angle D$.

$\because \angle AED=\angle BAE-\angle D$，

$\therefore \angle BAE=\angle CFE$.

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore \angle ABC=\angle DCE$.

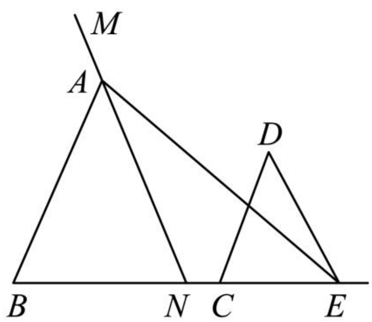
$\because AM\parallel DE$，

$\therefore \angle AMB=\angle DEC$.

$\because \angle MAB=180^\circ-\angle ABC-\angle AMB$，$\angle CDE=180^\circ-\angle DCE-\angle DEC$，

$\therefore \angle MAB=\angle CDE$，

②当点M在直线AB的左侧时，如图，$\angle MAB+\angle CDE=180^\circ$，理由：



由（2）①可知：$\angle BAN=\angle CDE$.

$\because \angle BAN+\angle BAM=180^\circ$，

$\therefore \angle MAB+\angle CDE=180^\circ$.

综上，$\angle MAB$与$\angle CDE$的数量关系为：$\angle MAB=\angle CDE$或$\angle MAB+\angle CDE=180°$.

【点睛】此题考查了平行线的性质、三角形内角和定理等知识，熟练掌握平行线的性质、三角形内角和定理灵活进行角的关系转换是解题的关键.

4．（2023春·黑龙江哈尔滨·七年级校考期中）射线OM、ON交于O点，OC平分$\angle MON$，$\angle MON=60°$，

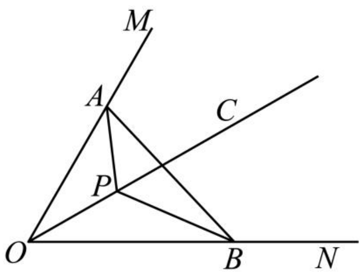


图1

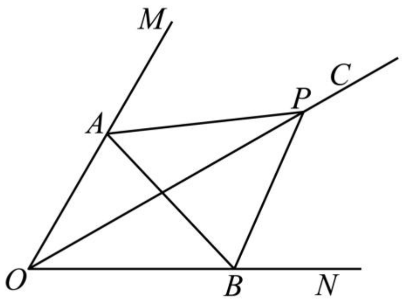


图2

(1)如图1，PA、PB分别平分$\angle OAB$、$\angle OBA$时，直接写出$\angle APB=$__________；

(2)如图2，PA、PB分别平分$\angle MAB$、$\angle NBA$时，求出$\angle APB$的度数；

(3)在（2）条件下，如图2中，求证$\angle PAB+\angle OPB=90°$.

【答案】(1)$120°$

(2)$60°$

(3)证明见解析

【分析】（1）由三角形内角和定理得$\angle OAB+\angle OBA=120°$，由角平分线的定义得$\angle PAB+\angle PBA=\frac{1}{2}\angle OAB+\frac{1}{2}\angle OBA=60°$，再利用三角形内角和定理进行计算即可；

（2）由三角形内角和定理得$\angle OAB+\angle OBA=120°$，由平角的定义得$\angle MAB+\angle MBA=240°$，由角平分线的定义得$\angle PAB+\angle PBA=120°$，再利用三角形内角和定理进行计算即可；

（3）由（2）可得$\angle PAB=\angle MAP=30°+\angle APO$，$\angle OPB=60°-\angle APO$，代入$\angle PAB+\angle OPB$化简即可.

【详解】（1）解：∵$\angle MON=60°$，

∴$\angle OAB+\angle OBA=120°$

∵PA、PB分别平分$\angle OAB$、$\angle OBA$，

∴$\angle PAB=\frac{1}{2}\angle OAB$，$\angle PBA=\frac{1}{2}\angle OBA$，

∴$\angle PAB+\angle PBA=\frac{1}{2}\angle OAB+\frac{1}{2}\angle OBA=60°$

$\therefore \angle APB = 180° - (\angle PAB + \angle PBA) = 120°$，

故答案为：120°；

（2）解：$\because \angle MON = 60°$，

$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 120°$，

$\therefore \angle MAB + \angle MBA = 240°$，

$\because PA$、PB分别平分$\angle MAB$、$\angle NBA$，

$\therefore \angle PAB = \frac{1}{2}\angle MAB$，$\angle PBA = \frac{1}{2}\angle MBA$，

$\therefore \angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}\angle MAB + \frac{1}{2}\angle MBA = 120°$，

$\therefore \angle APB = 180° - (\angle PAB + \angle PBA) = 60°$；

（3）证明：$\because OC$平分$\angle MON$，$\angle MON = 60°$，

$\therefore \angle MOC = \frac{1}{2}\angle MON = 30°$，

$\because PA$平分$\angle MAB$，

$\therefore \angle PAB = \angle MAP = \angle MOP + \angle APO = 30° + \angle APO$，

$\because \angle APB = 60°$

$\therefore \angle OPB = 60° - \angle APO$

$\therefore \angle PAB + \angle OPB = (30° + \angle APO) + (60° - \angle APO) = 90°$

【点睛】本题考查了角的和差，角平分线的定义，三角形内角和定理以及三角形外角的性质等，准确识图是解题的关键，难点在于要注意整体思想的利用．

5．（2023春·河南南阳·七年级统考期末）请阅读下列材料，并完成相应任务．

在数学探究课上，老师出了这样一个题：如图1，锐角$\angle BAC$内部有一点D，在其两边AB和AC上各取任意一点E，F，连接DE，DF．

求证：$\angle BED + \angle DFC = \angle BAC + \angle EDF$．

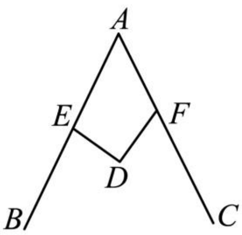


图1

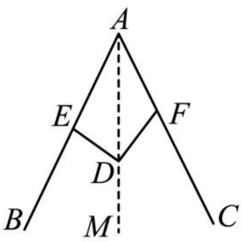


图2

小丽的证法	小红的证法
证明： 如图 2，连接AD并延长至点 M， $\angle BED=\angle BAD+\angle EDA$， $\angle DFC=\angle DAC+\angle ADF$（　依据　）， 又∵$\angle BAD+\angle DAC=\angle BAC$， $\angle EDA+\angle ADF=\angle EDF$， ∴$\angle BED+\angle DFC=\angle BAC+\angle EDF$.	证明： ∵$\angle BED=80°,\angle DFC=60°$， $\angle BAC=51°,\angle EDF=89°$（量角器测量所得）， ∴$\angle BED+\angle DFC=140°$， $\angle BAC+\angle EDF=140°$（计算所得）. ∴$\angle BED+\angle DFC=\angle BAC+\angle EDF$（等量代换）.

任务：

(1)小丽证明过程中的“依据”是指数学定理：________________________；

(2)下列说法正确的是____________.

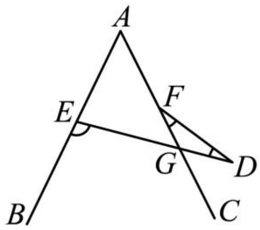
A．小丽的证法用严谨的推理证明了该定理

B．小丽的证法还需要改变$\angle BAC$的大小，再进行证明，该定理的证明才完整

C．小红的证法用特殊到一般的方法证明了该定理

D．小红的证法只要将点 D 在$\angle BAC$的内部任意移动 100 次，重新测量进行验证，就能证明该定理

(3)如图，若点 D 在锐角$\angle BAC$外部，ED与AC相交于点 G，其余条件不变，原题中结论还成立吗？若成立，请说明理由；若不成立，请探索$\angle BED$，$\angle DFC$，$\angle BAC$，$\angle EDF$之间的关系.



【答案】(1)三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和

(2)A

(3)不成立，$\angle BED=\angle BAC+\angle DFC+\angle EDF$

【分析】（1）连接AD并延长至点 M，根据三角形外角的性质解答即可；

（2）按照定理的证明的一般步骤，从已知出发经过量角器测量，计算，证明，即可得答案；

（3）根据三角形外角的性质得$\angle AGE=\angle DFC+\angle EDF$，$\angle BED=\angle BAC+\angle AGE$，整理可得答案

【详解】（1）解：小丽证明过程中的“依据”是指数学定理：三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和；

（2）根据定理证明的一般步骤，从已知出发经过量角器测量，计算，证明，故 A 正确；

（3）不成立，

$\because \angle AGE$是$\triangle GDF$的一个外角，

$\therefore \angle AGE=\angle DFC+\angle EDF$，

$\because \angle BED$为$\triangle AEG$的一个外角，

$\therefore \angle BED=\angle BAC+\angle AGE$，

$\therefore \angle BED=\angle BAC+\angle DFC+\angle EDF$（或$\angle BED-\angle DFC=\angle BAC+\angle EDF$）.

【点睛】本题考查了三角形的外角，解题的关键是掌握三角形外角的性质：三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

6．（2023春·北京大兴·七年级统考期末）如图，在直角三角形ABC中，$\angle ACB=90°$.

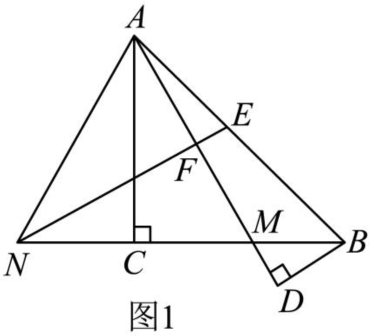


图1

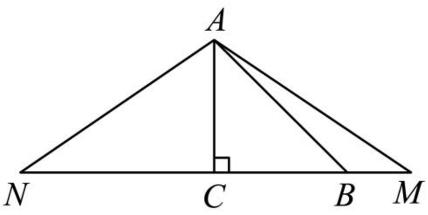


图2

(1)如图1，点M在线段CB上，在线段BC的延长线上取一点N，使得$\angle NAC=\angle MAC$．过点B作$BD\perp AM$，交AM延长线于点D，过点N作$NE\parallel BD$，交AB于点E，交AM于点F．判断$\angle ENB$与$\angle NAC$之间的数量关系，写出你的结论，并加以证明；

(2)如图2，点M在线段CB的延长线上，在线段BC的延长线上取一点N，使得$\angle NAC=\angle MAC$．过点B作$BD\perp AM$于点D，过点N作$NE\parallel BD$，交BA延长线于点E，交MA延长线于点F.

①依题意补全图形；

②若$\angle CAB=45°$，求证：$\angle NEA=\angle NAE$.

【答案】(1)$\angle ENB=\angle NAC$，理由见解析

(2)①见解析；②见解析

【分析】（1）依据$\angle NFD=\angle ADB=90°$，$\angle ACB=90°$，即可得到$\angle FAC+\angle AMC=\angle FNC+\angle AMC=90°$，进而得出$\angle MAC=\angle ENB$，再根据$\angle NAC=\angle MAC$，即可得到$\angle ENB=\angle NAC$；

(2)①过点 B 作$BD\perp AM$于点 D，过点 N 作$NE\parallel BD$，交BA延长线于点 E，交MA延长线于点 F；②依据$\angle ENB=\angle NAC$，$\angle NEA=135°-\angle ENB$，$\angle EAN=135°-\angle NAC$，即可得到$\angle NEA=\angle NAE$.

【详解】（1）解：$\angle ENB=\angle NAC$，

理由：$\because BD\perp AM$，

$\therefore\angle ADB=90°$，

$\because NE\parallel BD$，

$\therefore\angle NFD=\angle ADB=90°$，

$\because\angle ACB=90°$，

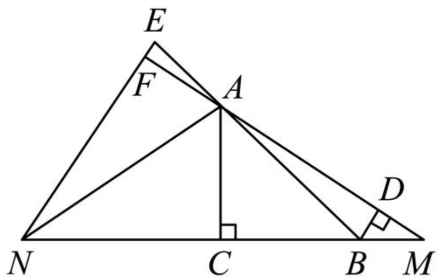
$\therefore\angle FAC+\angle AMC=\angle FNC+\angle AMC=90°$，

$\therefore\angle MAC=\angle ENB$，

又$\because\angle NAC=\angle MAC$，

$\therefore\angle ENB=\angle NAC$；

（2）解：①补全图形如图：



②同理可证$\angle ENB=\angle NAC$，

$\because$在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle CAB=45°$，

$\therefore\angle ABC=45°$，

$\therefore\angle ABM=135°$，

$\therefore\angle NEA=\angle ABM-\angle NEB=135°-\angle ENB$，

$\because\angle EAN=\angle EAB-\angle NAC-\angle CAB=135°-\angle NAC$，

$\therefore\angle NEA=\angle NAE$.

【点睛】本题主要考查了三角形内角和定理，平行线的性质的综合运用，解决问题的关键是利用三角形内角和是 180°进行推算.

7．（2023春·江苏扬州·七年级校考期末）【探究结论】

（1）如图1，$AB \parallel CD$，E为形内一点，连结AE、CE得到$\angle AEC$，则$\angle AEC$、$\angle A$、$\angle C$的关系是______（直接写出结论，不需要证明）：

【探究应用】利用（1）中结论解决下面问题：

（2）如图2，$AB \parallel CD$，直线MN分别交AB、CD于点E、F，EG_1和EG_2为$\angle BEF$内满足$\angle 1=\angle 2$的两条线，分别与$\angle EFD$的平分线交于点G_1和G_2，求证：$\angle FG_1E+\angle G_2=180°$.

（3）如图3，已知$AB \parallel CD$，F为CD上一点，$\angle EFD=60°$，$\angle AEC=3\angle CEF$，若$8°<\angle BAE<20°$，$\angle C$的度数为整数，则$\angle C$的度数为______.

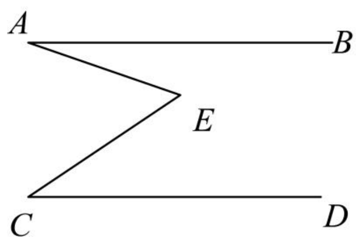


图1

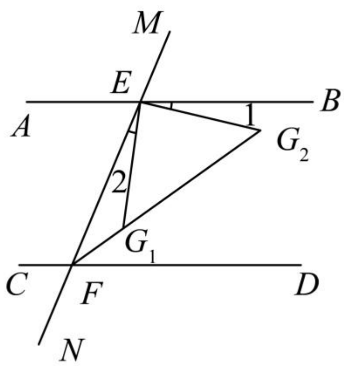


图2

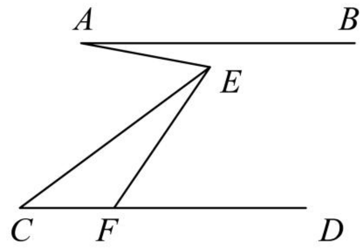


图3

【答案】（1）$\angle AEC=\angle A+\angle C$；（2）见解析；（3）42°或41°

【分析】（1）过点E作$EF \parallel AB$，根据平行线的性质可得$\angle A=\angle 1$，$\angle 2=\angle C$，由此即可得到结论；

（2）由（1）可知：$\angle EG_2F=\angle 1+\angle DFG_2$，由角平分线的定义结合$\angle 1=\angle 2$可得$\angle EG_2F=\angle 2+\angle EFG_2$，再根据三角形的内角和定理可证明结论；

（3）由（1）知：$\angle AEF=\angle BAE+\angle DFE$，设$\angle CEF=x$，则$\angle AEC=3x$，可求得$\angle BAE=4x-60°$，结合$\angle BAE$度数的取值范围可求解$x$的取值范围，再利用三角形外角的性质可求解.

【详解】解：（1）如图所示，过点E作$EF \parallel AB$，

$\therefore \angle A=\angle 1$，

$\because AB \parallel CD$，$EF \parallel AB$，

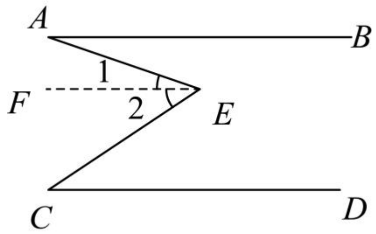
$\therefore EF \parallel CD$，

$\therefore \angle 2=\angle C$.

$\because \angle AEC=\angle 1+\angle 2$，

$\therefore \angle AEC=\angle A+\angle C$，

故答案为：$\angle AEC=\angle A+\angle C$；



（2）由（1）可知：$\angle EG_2F=\angle 1+\angle DFG_2$，

$\because FG_2$平分$\angle MFD$，

$\therefore \angle EFG_2=\angle DFG_2$，

$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle EG_2F=\angle 2+\angle EFG_2$，

$\because \angle EG_1F+\angle 2+\angle EFG_2=180°$，

$\therefore \angle FG_1E+\angle G_2=180°$；

（3）由（1）知：$\angle AEF=\angle BAE+\angle DFE$，

设$\angle CEF=x$，则$\angle AEC=3x$，

$\because \angle EFD=60°$，

$\therefore x+3x=\angle BAE+60°$，

$\therefore \angle BAE=4x-60°$，

又$\because 8°<\angle BAE<20°$，

$\therefore 8°<4x-60°<20°$，

解得 $17°<x<20°$，

又$\because \angle DFE$是$\triangle CEF$的外角，

$\therefore \angle C=\angle DFE-\angle CEF=\angle DFE-x$，

$\because \angle C$的度数为整数，

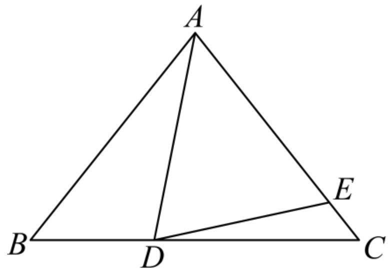
$\therefore x=18°$或 $19°$，

$\therefore \angle C=60°-18°=42°$或$\angle C=60°-19°=41°$，

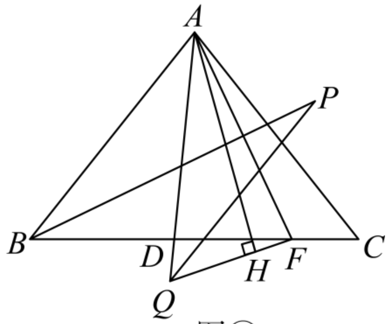
故答案为：$42°$或 $41°$.

【点睛】本题主要考查平行线的性质，角平分线的定义，三角形的内角和定理等知识的综合运用，灵活运用平行线的性质求解角的关系是解题的关键.

8．（2023春·福建泉州·七年级统考期末）在△ABC在中，$\angle B=\angle C$，点D在边BC上．



图①



图②

(1)如图①，点E在线段AC上，若$\angle ADE=\angle AED$，证明：$\angle BAD=2\angle CDE$；

(2)如图②，AH平分$\angle CAD$，点F在线段CD上，$FH\perp AH$交AD延长线于点Q，设$\angle ABC$与$\angle AQF$的角平分线交于点P，求$\angle P$与$\angle BFQ$的度数之比

【答案】(1)见解析．

(2)3: 2

【分析】(1)根据三角形的外角定理，$\angle ADC=\angle BAD+\angle B=\angle ADE+\angle CDE,\angle BAD=\angle ADE+\angle CDE-\angle B$，而$\angle ADE=\angle AED=\angle C+\angle CDE$，代入上面式子有：$\angle BAD=\angle C+\angle CDE+\angle CDE-\angle B$，而$\angle B=\angle C$，所以$\angle BAD=\angle C+\angle CDE+\angle CDE-\angle C=2\angle CDE$，证明了结论；

(2)如图，延长QF交AC于K，设$\angle P=x,\angle BFQ=y$；有$\angle AQK=\angle AKQ$，根据外角定理有，$\angle AKQ=\angle KFC+\angle C$，而$\angle C=2\angle 1$，$\angle KFC=y$，$2\angle 2=y+2\angle 1$，而$\angle 1+\angle P=\angle 2+\angle KFC$，即$\angle 1+x=\angle 2+y$，联立可以找到$x$、$y$的关系式，即可求解．

【详解】（1）证明：$\because\angle ADC=\angle BAD+\angle B=\angle ADE+\angle CDE$,

$\therefore\angle BAD=\angle ADE+\angle CDE-\angle B$

又$\because\angle ADE=\angle AED=\angle C+\angle CDE$

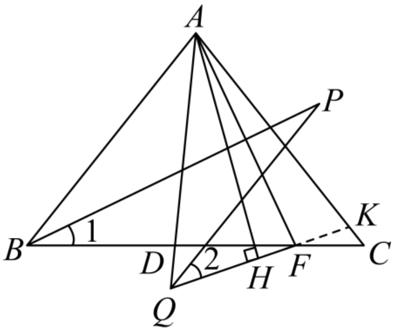
$\therefore\angle BAD=\angle C+\angle CDE+\angle CDE-\angle B$

$\because\angle B=\angle C$,

$\therefore\angle BAD=\angle C+\angle CDE+\angle CDE-\angle C=2\angle CDE$

即：$\angle BAD=2\angle CDE$．

（2）解：如图，延长QF交AC于K，设$\angle P=x,\angle BFQ=y$



$\because AH \perp QK$，$\angle HAQ = \angle HAK$

$\therefore \angle QAH + \angle AQH = 90°$，$\angle HAK + \angle AKQ = 90°$

$\therefore \angle AQK = \angle AKQ$

$\therefore 2\angle 2 = \angle KFC + \angle C = y + 2\angle 1.$

$\therefore \angle 2 - \angle 1 = \frac{1}{2}y$

$\because \angle 1 + x = \angle 2 + y$

$\therefore x = \frac{1}{2}y + y$

$\therefore 2x = 3y$

$\therefore x: y = 2: 3$

故：$\angle P$与$\angle BFQ$的度数之比为$2:3$.

【点睛】本题主要考查了三角形外角定理、直角三角形性质、角平分线的定义等知识，熟练运用外角定理，找到相应的等量关系，并通过等量代换找到角之间的关系是求解的关键.

【类型 3　与三角形有关的角的挖空题】

1．（2023 春·江苏扬州·七年级统考期末）如图，四边形$ABCD$中，作点$AC \perp AD$，设BD分别与AC、CE交于点F、G．若BD平分$\angle ABC$，且$\angle 2 = \angle 3$，求证：$\angle CFG = \angle CGF$.

完成下面的证明过程：

证明：$\because AC \perp AD$＿（已知）＿.

$\therefore \angle CAD = 90°$＿（垂直的定义）．＿

$\because BD$平分$\angle ABC$＿（已知）＿

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ＿（ ）＿

$\because \angle 2 = \angle 3$ ＿（已知）＿

$\therefore \angle 1 =$＿（等量代换）＿

∴ $AD//BC$ ＿（ ）＿

∴ ＿$= \angle CAD = 90°$（两直线平行，内错角相等）

∴ $\angle 1 = \angle CAD = 90°$（直角三角形的两个锐角互余）

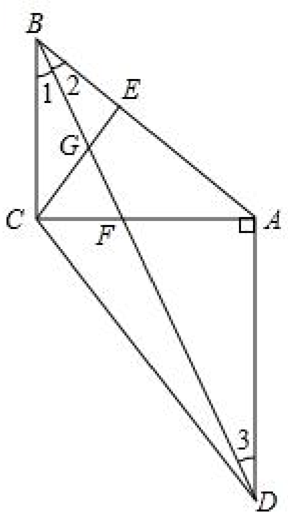
同理由$CE \perp AB$，

可得$\angle 2 + \angle BGE = 90°$

∴ $\angle CFG = \angle BGE$＿（ ）＿

又∵ $\angle BGE = \angle CGF$＿（对顶角相等 ）

∴ $\angle CFG = \angle CGF$（等量代换）



【答案】角平分线定义；$\angle 3$；内错角相等，两直线平行；$\angle ACB$；等角的余角相等

【分析】根据垂直的定义可得$\angle CAD = 90°$，然后根据角平分线定义可得$\angle 1 = \angle 2$，根据等量代换可得$\angle 1 = \angle 3$，再根据内错角相等，两直线平行可证$AD//BC$，从而得出$\angle ACB = \angle CAD = 90°$，再根据等角的余角相等可得$\angle CFG = \angle BGE$，最后根据对顶角相等和等量代换即可证出结论.

【详解】证明：∵ $AC \perp AD$＿（已知）＿.

∴ $\angle CAD = 90°$（垂直的定义）.

∵ BD平分$\angle ABC$＿（已知）＿

∴ $\angle 1 = \angle 2$（角平分线定义）

∵ $\angle 2 = \angle 3$ ＿（已知）＿

∴ $\angle 1 = \angle 3$（等量代换）

∴ $AD//BC$（内错角相等，两直线平行）

∴ $\angle ACB = \angle CAD = 90°$（两直线平行，内错角相等）

$\therefore \angle 1 = \angle CAD = 90°$（直角三角形的两个锐角互余）

同理由$CE \perp AB$，

可得$\angle 2 + \angle BGE = 90°$

$\therefore \angle CFG = \angle BGE$（等角的余角相等）

又$\because \angle BGE = \angle CGF$（对顶角相等）

$\therefore \angle CFG = \angle CGF$（等量代换）

故答案为：角平分线定义；$\angle 3$；内错角相等，两直线平行；$\angle ACB$；等角的余角相等.

【点睛】此题考查的是垂直定义、角平分线的定义、直角三角形的性质和平行线的判定及性质，掌握垂直定义、角平分线的定义、直角三角形的性质和平行线的判定及性质是解题关键.

2．（2023春·黑龙江大庆·七年级统考期末）如图，$AB\parallel CD$，$\angle BMN$与$\angle DNM$的平分线相交于点G，完成下面的证明：

$\because MG$平分$\angle BMN$，

$\therefore \angle GMN=\frac{1}{2}\angle BMN$（_），

同理$\angle GNM=\frac{1}{2}\angle DNM$.

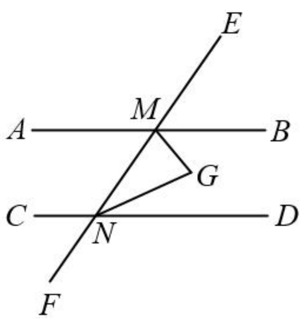
$\because AB\parallel CD$

$\therefore \angle BMN+\angle DNM=$________（_）.

$\therefore \angle GMN+\angle GNM=$________.

$\because \angle GMN+\angle GNM+\angle G=$________，

$\therefore \angle G=$________.



【答案】角分线的定义；180°；两直线平行，同旁内角互补；90°；180°；90°

【分析】根据角平分线的定义，可得$\angle GMN=\frac{1}{2}\angle BMN$，$\angle GNM=\frac{1}{2}\angle DNM$. 再由$AB\parallel CD$，可得$\angle BMN+\angle DNM=180°$，从而得到$\angle GMN+\angle GNM=90°$．然后根据三角形的内角和定理，即可求解.

【详解】证明：∵MG 平分$\angle BMN$，

∴$\angle GMN=\frac{1}{2}\angle BMN$（角分线的定义），

同理$\angle GNM=\frac{1}{2}\angle DNM$.

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle BMN+\angle DNM=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

∴$\angle GMN+\angle GNM=90°$.

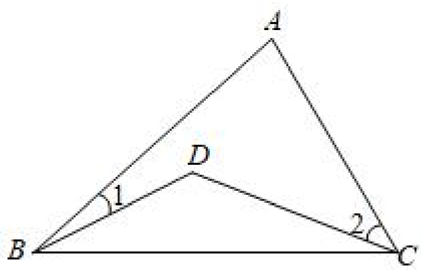
∵$\angle GMN+\angle GNM+\angle G=180°$，

∴$\angle G=90°$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，三角形的内角和定理，角平分线的定义，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

3．（2023春·江苏盐城·七年级校考期中）互动学生课堂上，某小组同学对一个课题展开了探究.

小亮：已知，如图，三角形 ABC，点 D 是三角形 ABC 内一点，连接 BD，CD，试探究$\angle BDC$ 与$\angle A$、$\angle 1$、$\angle 2$ 之间的关系.



小明：可以用三角形内角和定理去解决.

小丽：用外角的相关结论也能解决.

（1）请你在横线上补全小明的探究过程：

∵$\angle BDC+\angle DBC+\angle BCD=180°$，（_____）

∴$\angle BDC=180°-\angle DBC-\angle BCD$，（等式性质）

∵$\angle A+\angle 1+$_____$+\angle DBC+\angle BCD=180°$，

∴$\angle A+\angle 1+\angle 2=180°-$_____$-\angle BCD$，

∴$\angle BDC=\angle A+\angle 1+\angle 2$．（_____）

（2）请你按照小丽的思路完成探究过程.

【答案】（1）三角形内角和定理；$\angle 2$；$\angle DBC$；等量代换；（2）见解析.

【分析】（1）根据三角形内角和定理、等式的性质解答；

（2）延长 BD 交 AC 于 E，根据三角形的外角性质证明结论．

【详解】（1）∵$\angle BDC+\angle DBC+\angle BCD=180°$，（三角形内角和定理）

∴$\angle BDC=180°-\angle DBC-\angle BCD$，（等式性质）

∵$\angle A+\angle 1+\angle 2+\angle DBC+\angle BCD=180°$，

∴$\angle A+\angle 1+\angle 2=180°-\angle DBC-\angle BCD$，

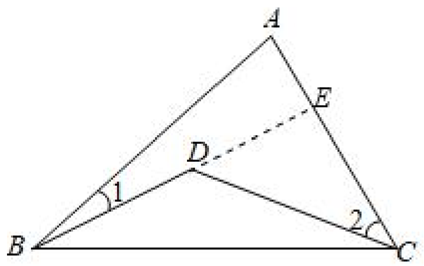
∴$\angle BDC=\angle A+\angle 1+\angle 2$（等量代换），

故答案为：三角形内角和定理；$\angle 2$；$\angle BDC$；等量代换；

（2）如图，延长 BD 交 AC 于 E，

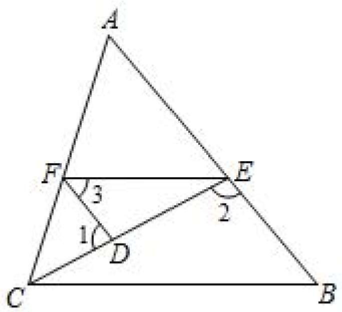
由三角形的外角性质可知，$\angle BEC=\angle A+\angle 1$，

∴$\angle BDC=\angle BEC+\angle 2=\angle A+\angle 1+\angle 2$．



【点睛】本题考查的是三角形的外角性质、三角形内角和定理，掌握三角形的一个外角等于它不相邻的两个内角和是解题的关键．

4．（2023春·河北衡水·七年级校考期末）如图，已知$\angle 1+\angle 2=180°$，且$\angle 3=\angle B$．



(1)求证：$\angle AFE=\angle ACB$，完成下面的证明．

证明：∵$\angle 2+\angle AEC=180°$．$\angle 1+\angle 2=180$（已知），

∴$\angle AEC=\angle 1$（等量代换），

∴$AB\parallel FD$（_），

∴$\angle 3=$_（两直线平行，内错角相等）．

又∵$\angle 3=\angle B$（已知），

∴_$=\angle B$（等量代换），

∴_（同位角相等，两直线平行），

∴$\angle AFE=\angle ACB$（_）；

(2)若 CE 平分$\angle ACB$，且$\angle 2=110°$，$\angle 3=50°$，求$\angle AFE$ 的度数．

【答案】(1)同位角相等，两直线平行；$\angle AEF$；$\angle AEF$；$FE \parallel CB$；两直线平行，同位角相等

(2)40°

【分析】（1）由题意可得$\angle AEC=\angle 1$，从而可判断 $AB \parallel FD$，求出$\angle AEF=\angle B$，得到 $FE \parallel CB$，即得$\angle AFE=\angle ACB$；

（2）利用三角形的内角和可求得$\angle BCE$ 的度数，再利用角平分线的定义得$\angle ACB=2\angle BCE$，从而得解．

【详解】（1）解：∵$\angle 2+\angle AEC=180°$，$\angle 1+\angle 2=180°$（已知），

∴$\angle AEC=\angle 1$（等量代换），

∴$AB \parallel FD$（同位角相等，两直线平行），

∴$\angle 3=\angle AEF$（两直线平行，内错角相等），

又∵$\angle 3=\angle B$（已知），

∴$\angle AEF=\angle B$（等量代换），

∴$FE \parallel CB$（同位角相等，两直线平行），

∴$\angle AFE=\angle ACB$（两直线平行，同位角相等），

故答案为：同位角相等，两直线平行；$\angle AEF$；$\angle AEF$；$FE \parallel CB$；两直线平行，同位角相等；

（2）∵$\angle 3=\angle B$，$\angle 3=50°$，

∴$\angle B=50°$，

∵$\angle 2=110°$，

∴$\angle BCE=180°-\angle B-\angle 2=20°$，

∵CE 平分$\angle ACB$，

∴$\angle ACB=2\angle BCE=40°$，

∵$FE \parallel CB$，

∴$\angle AFE=\angle ACB=40°$.

【点睛】本题主要考查平行线的判定与性质，三角形内角和定理，解答的关键是熟记平行线的判定条件与性质并灵活运用.

5．（2023春·山西晋城·七年级统考期末）综合与实践问题情境：在数学活动课上，全班同学分组进行了一副三角尺上角的探究活动，如图所示，放置一副三角尺，两个三角尺的顶点O重合，边CD与边AB重合，试求$\angle AOC$的度数.

（1）探究展示勤奋小组展示了如下的解决方法（请结合图形1，完成填空）

解：∵$\angle OCD=45°$，$\angle OBC=60°$

∴$\angle BOC=$__________（____________________）

又∵$\angle AOB=90°$，

∴$\angle AOC=$__________.

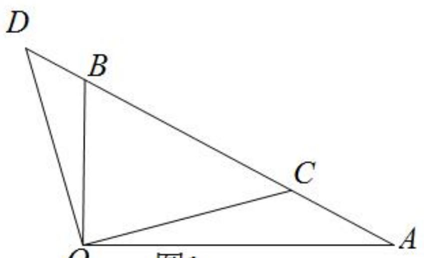


图1

（2）反思交流：创新小组受勤奋小组的启发，继续进行探究，如图2所示，绕顶点O逆时针旋转△DOC，当$DC//AO$时，求得$\angle AEO$的度数.（请你写出解答过程）

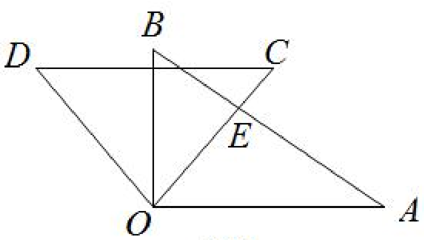


图2

（3）探索发现：小明受到旋转的启发，继续进行探究（如图3），继续绕顶点O逆时针旋转△DOC，使点B落在边DC上，此时发现$\angle 1$与$\angle 2$之间的数量关系.

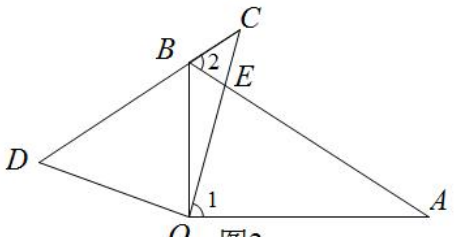


图3

以下是他的解答过程，请补充完整解：在△ AOE与△ BCE中，

∵$\angle AEO+\angle 1+\angle A=\angle CEB+\angle 2+\angle C$

又∵$\angle AEO=\angle CEB$（____________________）

$\angle A=$__________，$\angle C=$__________，

∴$\angle 1+\angle A=\angle 2+\angle C$

$\angle 1-\angle 2=$__________.

【答案】（1）75°；三角形内角和是 180°；15°；（2）105°；见解析；（3）对顶角相等；30°；45°；15°

【分析】（1）利用三角形内角和定理求解即可；

（2）利用平行线的性质求得∠AOC=45°，再利用三角形内角和定理求解即可；

（3）在△AOE 与△BCE 中，利用三角形内角和定理得到∠1+∠A=∠2+∠C，计算即可求解．

【详解】解：∵∠OCD=45°，∠OBC=60°，

∴∠BOC=75°（三角形内角和是 180°），

又∵∠AOB=90°，

∴∠AOC=15°；

（2）解：∵DC∥AO，∠OCD=45°，

∴∠AOC=45°（两直线平行，内错角相等），

又∵∠BAO=30°，

∴∠AEO=180°−∠AOC−∠BAO=180°−45°−30°=105°（三角形内角和是 180°）；

（3）在△AOE 与△BCE 中，

∵∠AEO+∠1+∠A=∠CEB+∠2+∠C，

又∵∠AEO=∠CEB（对顶角相等），

∠A=30°，∠C=45°，

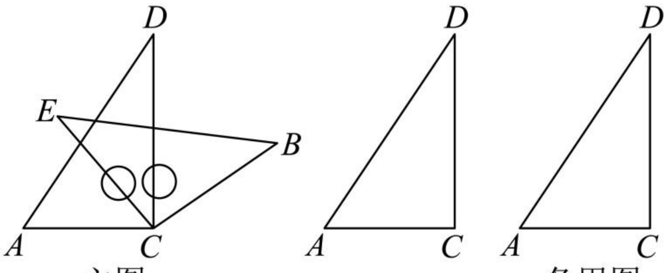
∴∠1+∠A=∠2+∠C，

∠1−∠2=15°．

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，平行线的性质，正确的识别图形是解题的关键.

【类型4　探究与三角形有关的角之间的关系】

1．（2023春·全国·七年级期中）将一副三角板中的两块直角三角尺的直角顶点C按如图方式叠放在一起，其中，$\angle A=60°$，$\angle D=30°$；$\angle E=\angle B=45°$.



主图　　　　　　　　　　备用图

(1)①$\angle DCE=30°$时，$\angle ACB$的度数为_______；②$\angle ACB=135°$时，$\angle DCE$的度数为_______；

【探究】

(2)由（1）猜想$\angle ACB$与$\angle DCE$的数量关系，并说明理由.

【应用】

(3)现按照这种折叠方式，用这样两块直角三角尺的木板制作一个画平行线的工具，需要满足两个三角尺存在一组边互相平行，若$\angle ACE<180°$且点E在直线AC的上方时，这两块三角尺是否存在一组边互相平行？若存在，请直接写出$\angle ACE$角度所有可能的值（不必说明理由）；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)①150°；②45°；

(2)$\angle ACB+\angle DCE=180°$，理由见解析；

(3)存在，30°, 45°, 120°, 135°, 165°.

【分析】（1）①首先计算出$\angle DCB$的度数，再用$\angle ACD+\angle DCB$即可；②首先计算出$\angle DCB$的度数，再计算出$\angle DCE$即可；

（2）根据（1）中的计算结果可得$\angle ACB+\angle DCE=180°$，再根据图中的角的和差关系进行推理；

（3）分五种情况进行讨论：当$CB\parallel AD$时，当$EB\parallel AC$时，当$CE\parallel AD$时，当$EB\parallel CD$时，当$BE\parallel AD$时，分别求得$\angle ACE$的度数.

【详解】（1）解：①$\because\angle ECB=90°$，$\angle DCE=30°$，

$\therefore\angle DCB=90°-30°=60°$，

$\therefore\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=90°+60°=150°$，

故答案为：150°；

②$\because \angle ACB=135°$，$\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle DCB=135°-90°=45°$，

$\therefore \angle DCE=90°-45°=45°$，

故答案为：45°；

（2）解：$\angle ACB+\angle DCE=180°$，

$\because \angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=90°+\angle DCB$，

$\therefore \angle ACB+\angle DCE=90°+\angle DCB+\angle DCE=90°+90°=180°$；

即$\angle ACB+\angle DCE=180°$；

（3）解：存在，30°、45°、120°、135°、165°.

理由：当$CB \parallel AD$时，如图 1 所示：

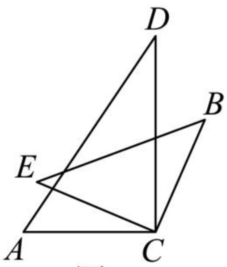


图1

$\therefore \angle DCB=\angle D=30°$，

$\therefore \angle ACE=\angle DCB=30°$；

当$EB \parallel AC$时，如图 2 所示：

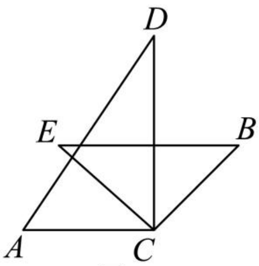


图2

$\therefore \angle ACE=\angle E=45°$；

当$CE \parallel AD$时，如图 3 所示：

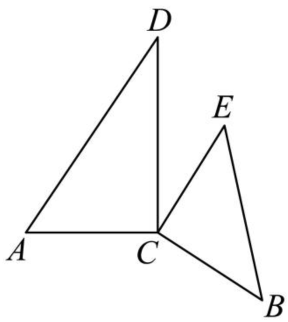


图3

$\therefore \angle DCE = \angle D = 30°$，

$\therefore \angle ACE = 90° + 30° = 120°$；

当$EB \parallel CD$时，如图 4 所示：

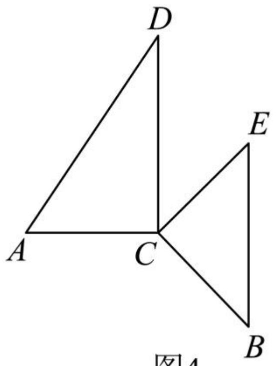


图4

$\therefore \angle DCE = \angle E = 45°$，

$\therefore \angle ACE = 90° + 45° = 135°$；

当$BE \parallel AD$时，延长AC交BE于F，如图 5 所示：

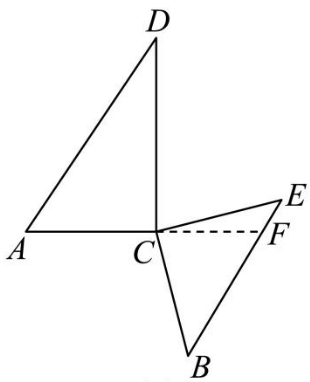


图5

$\therefore \angle CFB = \angle A = 60°$，

$\because \angle ECF + \angle E + \angle CFE = 180°$，$\angle CFB + \angle CFE = 180°$，

$\therefore \angle ECF = 15°$，

$\therefore \angle ACE = 180° - \angle ECF = 180° - 15° = 165°$.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，几何图形中的角度计算，平行线的判定与性质等知识，熟练掌握平行线的性质，数形结合是解题的关键.

2．（2023春·山西阳泉·七年级统考期末）综合与探究

问题情境：

如图1，已知$AB \parallel CD, \angle ABC = 60°, \angle BAD = 120°$，点$E$，$F$在直线$AB$上，且$\angle ACD = \angle ACF$，$CE$平分$\angle BCF$.

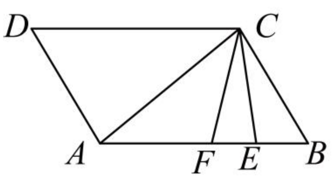


图1

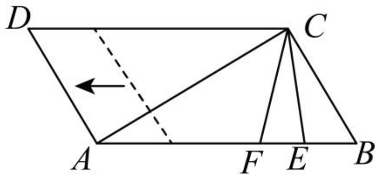


图2

(1)求$\angle ACE$的度数.

实践探究：

(2)若左右平行移动AD，那么$\angle BAC$与$\angle BFC$之间的数量关系是否发生变化?若变化，请说明理由；若不变，请求出$\angle BAC$与$\angle BFC$之间的数量关系.

(3)如图2，若向左平行移动AD，当$\angle BEC = \angle CAD$时，请求出$\angle CAD$的度数.

【答案】(1)60°

(2)$\angle BFC = 2\angle BAC$，理由见解析

(3)90°

【分析】(1)由平行线的性质求出$\angle BCD = 120°$，再根据题意及角平分线的定义得出$\angle ACF + \angle FCE = \frac{1}{2}\angle BCD$，即可求解；

(2)由平行线的性质和三角形外角的性质即可求解；

(3)由题可得$AD \parallel BC$，$\angle D = 60°$，$\angle BCD = 120°$，由三角形内角和定理可得$\angle DCA = \angle BCE$，由角平分线的定义可得$\angle DCA = \angle ACF = \angle FCE = \angle BCE$，求出$\angle DCA = \frac{1}{4}\angle BCD = 30°$，再根据三角形内角和定理求解即可.

【详解】(1)解：$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle B + \angle BCD = 180°$，

$\because \angle ABC = 60°$，

$\therefore \angle BCD = 120°$，

∵CE平分$\angle BCF$，

∴$\angle FCE=\angle BCE=\frac{1}{2}\angle FCB$，

∵$\angle ACD=\angle ACF$，

∴$\angle ACF+\angle FCE=\frac{1}{2}DCF+\frac{1}{2}\angle BCF=\frac{1}{2}\angle BCD=60°$；

（2）$\angle BFC=2\angle BAC$，理由如下：

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle ACD=\angle BAC$，

∵$\angle ACD=\angle ACF$，

∴$\angle BAC=\angle ACF$，

∵$\angle BFC=\angle BAC+\angle ACF$，

∴$\angle BFC=2\angle BAC$；

（3）∵$AB\parallel CD,\angle ABC=60°,\angle BAD=120°$，

∴$AD\parallel BC$，$\angle D=60°$，$\angle BCD=120°$，

∵$\angle BEC=\angle CAD$，

∴$\angle DCA=\angle BCE$，

∵$\angle ACD=\angle ACF$，$\angle FCE=\angle BCE$，

∴$\angle DCA=\angle ACF=\angle FCE=\angle BCE$，

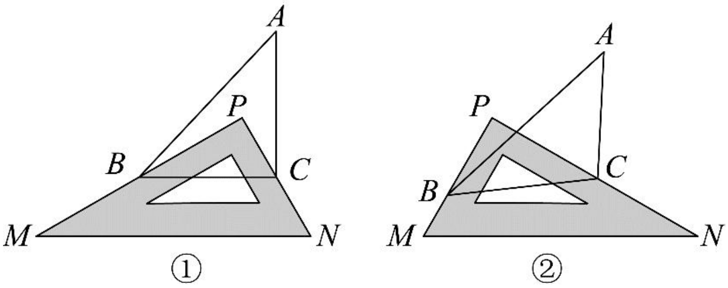
∵$\angle BCD=120°$，

∴$\angle DCA=\frac{1}{4}\angle BCD=30°$，

∴$\angle CAD=180°-\angle D-\angle DCA=90°$

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形内角和定理、三角形外角的性质以及角平分线的定义，正确识图是解题的关键．

3．（2023春·河南南阳·七年级统考期末）问题情景：如图①，有一块直角三角板PMN放置在$\triangle ABC$上（P点在$\triangle ABC$内），三角板PMN的两条直角边PM、PN恰好分别经过点 B 和点 C．试问$\angle ABP$与$\angle ACP$、$\angle A$是否存在某种确定的数量关系？



(1)**特殊探究**：如图①，若$\angle A=50°$，$\angle PBC+\angle PCB=$____度，$\angle ABP+\angle ACP=$_____度；$\angle ABP$与$\angle ACP$、$\angle A$的数量关系是_；

(2)**类比探究**：如图①，若$\angle A=\alpha$，请先写出$\angle ABP+\angle ACP$与$\angle A$的数量关系，并说明理由；

(3)**延伸探究**：如图②，改变直角三角板PMN的位置，使P点在$\triangle ABC$外，三角板PMN的两条直角边PM、PN仍然分别经过点B和点C，则（2）中的结论是否仍然成立？若不成立，请重新写出$\angle ABP$与$\angle ACP$、$\angle A$的数量关系，并说明理由．

【答案】(1)90；40；$\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$

(2)$\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$；理由见解析

(3)不成立；$\angle ACP-\angle ABP=90°-\angle A$；理由见解析

【分析】（1）利用三角形内角和定理即可解决问题；

（2）根据题意可得$\angle PBC+\angle PCB=90°$，在$\triangle ABC$中，利用三角形内角和定理即可证明；

（3）在$\triangle ABC$中，利用三角形内角和定理可得$\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$，再由$\angle PBC+\angle PCB=90°$，两式相减，即可．

【详解】（1）解：根据题意得：$\angle BPC=90°$，

$\because\angle BPC+\angle PBC+\angle PCB=180°$，

$\therefore\angle PBC+\angle PCB=90°$；

$\because\angle A=50°$，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

$\therefore\angle ABC+\angle ACB=130°$，

$\therefore\angle ABP+\angle ACP=(\angle ABC+\angle ACB)-(\angle PBC+\angle PCB)=40°$；

$\therefore\angle ABP+\angle ACP+\angle A=40°+50°=90°$．

故答案为：90；40；$\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$．

（2）解：$\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$；理由如下：

根据题意得：$\angle BPC=90°$，

$\because \angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$，

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90°$，

$\because (\angle PBC + \angle PCB) + (\angle ABP + \angle ACP) + \angle A = 180°$，

即 $90° + (\angle ABP + \angle ACP) + \angle A = 180°$；

$\therefore \angle ABP + \angle ACP = 90° - \angle A$.

（3）解：不成立．结论：$\angle ACP - \angle ABP = 90° - \angle A$．理由如下：

在$\triangle ABC$中，$\angle ABC + \angle ACB = 180° - \angle A$，

$\because \angle MPN = 90°$，

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90°$，

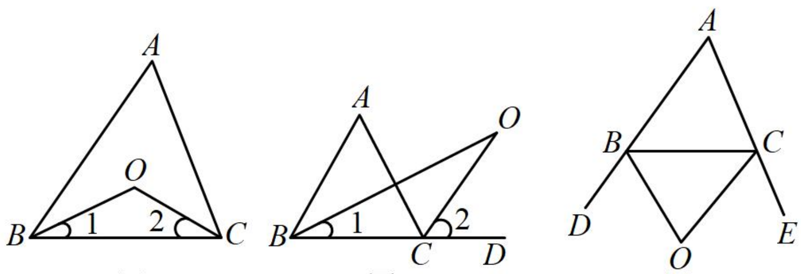
$\therefore (\angle ABC + \angle ACB) - (\angle PBC + \angle PCB) = 180° - \angle A - 90° = 90° - \angle A$，

$\therefore \angle ABC + \angle ACP + \angle PCB - \angle ABP - \angle ABC - \angle PCB = 90° - \angle A$，

$\therefore \angle ACP - \angle ABP = 90° - \angle A$.

【点睛】本题考查三角形内角和定理，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

4．（2023春·江西赣州·七年级统考期末）认真阅读下面关于三角形内外角平分线所夹角的探究片段，完成所提出的问题．



(1)探究1：如图1，在$\triangle ABC$中，O是$\angle ABC$与$\angle ACB$的平分线BO和CO的交点，试分析$\angle BOC$与$\angle A$有怎样的关系？请说明理由．

(2)探究2：如图2中，O是$\angle ABC$与外角$\angle ACD$的平分线BO和CO的交点，试分析$\angle BOC$与$\angle A$有怎样的关系？请说明理由．

(3)探究3：如图3中，O是外角$\angle DBC$与外角$\angle ECB$的平分线BO和CO的交点，则$\angle BOC$与$\angle A$又有怎样的关系？（只写结论，不需证明）结论：_．

【答案】(1)$\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$，理由见解析

(2)$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A$，理由见解析

(3)$\angle BOC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

【分析】（1）首先根据角平分线的定义，可得$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$，再根据三角形内角和定理，即可求解；

（2）先由角平分线得出$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACD$，再由三角形的外角的性质得出，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle A+\angle 1$，再根据三角形外角的性质，即可得出结论；

（3）首先根据三角形的外角性质，得$\angle DBC=\angle A+\angle ACB$，$\angle BCE=\angle A+\angle ABC$，再根据角平分线的定义，可得$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle DBC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle BCE$，再根据三角形内角和定理，即可求解.

【详解】（1）解：$\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，

理由如下：

$\because BO$和CO分别是$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

又$\because \angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A$

$\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

$\therefore \angle BOC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

$=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）解：$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A$，

理由如下：

$\because BO$和CO分别是$\angle ABC$与外角$\angle ACD$的角平分线，

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACD$，

又$\because \angle ACD$是$\triangle ABC$的一外角，

$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle ABC$，

$\therefore \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle A + \angle 1$，

$\because \angle 2$ 是$\triangle BOC$的一外角，

$\therefore \angle BOC = \angle 2 - \angle 1 = \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle 1\right) - \angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$；

（3）解：结论$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

根据三角形的外角性质，得$\angle DBC = \angle A + \angle ACB$，$\angle BCE = \angle A + \angle ABC$，

$\because O$是外角$\angle DBC$与外角$\angle ECB$的平分线BO和CO的交点，

$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2}\angle DBC$，$\angle OCB = \frac{1}{2}\angle BCE$，

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle BCE) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC)$，

$\because \angle A + \angle ACB + \angle ABC = 180°$，

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 90° + \frac{1}{2}\angle A$，

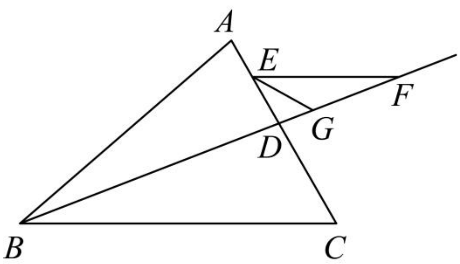
$\therefore$在$\triangle OBC$中，

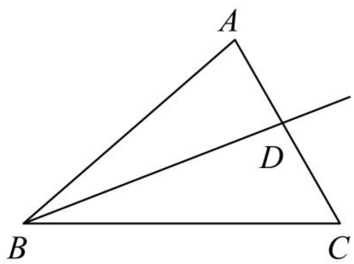
$\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - \left(90° + \frac{1}{2}\angle A\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$，

故答案为：$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

【点睛】此题主要考查了三角形的内角和定理，三角形外角的性质，角平分线的定义，灵活运用三角形的外角的性质是解本题的关键.

5．（2023春·湖北·七年级统考期末）在$\triangle ABC$中，BD平分$\angle ABC$交AC于点D，点E是线段AC上的动点（不与点D重合），过点E作$EF \parallel BC$交射线BD于点F，$\angle CEF$的平分线所在直线与射线BD交于点G.





备用图

(1)如图，点E在线段AD上运动.

①若$\angle ABC = 40°$，$\angle C = 60°$，则$\angle A$的度数是__________；$\angle EFB$的度数是__________；

②探究$\angle BGE$与$\angle A$之间的数量关系，并说明理由；

(2)若点E在线段DC上运动时，请直接写出$\angle BGE$与$\angle A$之间的数量关系．

【答案】(1)①80°；20°②$\angle BGE=90°-\frac{1}{2}\angle A$

(2)$\angle BGE=90°+\frac{1}{2}\angle A$

【分析】（1）①直接运用三角形内角和定理以及平行线的性质可求解；②证明$\angle BGE=\angle GEF+\angle GFE=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle C)$即可；

（2）证明$\angle BGE=180°-(\angle GEF+\angle GFE)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)$即可．

【详解】（1）①$\because \angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，且$\angle ABC=40°$，$\angle C=60°$，

$\therefore \angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=180°-(40°+60°)=80°$，

$\because BD$平分$\angle ABC$,

$\therefore \angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=20°$,

$\because EF\parallel BC$,

$\therefore \angle EFB=\angle FBC=20°$,

故答案为：80°；20°；

②$\because EF\parallel BC$,

$\therefore \angle GFE=\angle CBF, \angle FED=\angle C$,

$\because BD$平分$\angle ABC$，EG平分$\angle DEF$,

$\therefore \angle CBF=\dfrac{1}{2}\angle ABC, \angle GEF=\dfrac{1}{2}\angle DEF$,

$\therefore \angle GFE=\dfrac{1}{2}\angle ABC, \angle GEF=\dfrac{1}{2}\angle C$,

又$\angle BGE=\angle GEF+\angle GFE$,

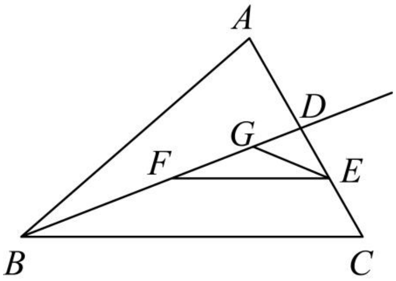
$\therefore \angle BGE=\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$,

$\because \angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$,

$\therefore \angle BGE=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$；

（2）如图,



$\because EF\parallel BC$,

$\therefore \angle GFE=\angle CBF, \angle FED=\angle C$,

$\because BD$平分$\angle ABC$，EG平分$\angle DEF$,

$\therefore \angle CBG=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle GEF=\frac{1}{2}\angle DEF$,

$\therefore \angle GFE=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle GEF=\frac{1}{2}\angle C$,

又$\angle BGE+\angle GEF+\angle GFE=180°$,

$\therefore \angle BGE=180°-(\angle GEF+\angle GFE)$

$\therefore \angle BGE=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$,

$\because \angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$,

$\therefore \angle BGE=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，角平分线定义，三角形内角和定理以及三角形外角的性质，正确识别图形是解答本题的关键.

6. （2023春·广西南宁·七年级统考期末）数学实践活动课上，研究小组探究如下问题：

【问题情境】如图，点 A，O，B 在同一条直线上，将一直角三角尺如图①放置，使直角顶点与点 O 重合，其中$\angle COD=90°$，$\angle C=30°$，OE平分$\angle BOC$且交 CD 所在直线于点 F.

【独立思考】（1）若$\angle AOC=30°$，求$\angle OFC$的度数；

【实践操作】（2）如图②，将直角三角尺绕点 O 旋转，当$\angle OFC=2\angle AOC$时，求$\angle AOC$的度数；

【深入探究】（3）继续旋转直角三角尺，若OC不与AB重合，试探究旋转过程中，$\angle AOC$和$\angle OFC$之间的数量关系.

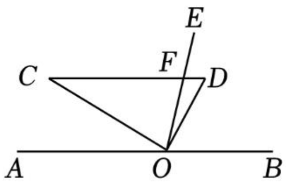


图1

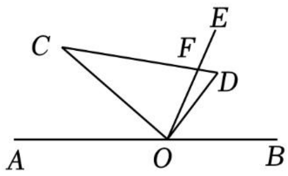
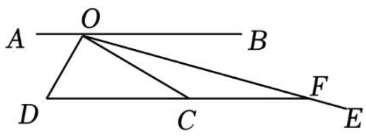


图2



备用图

【答案】（1）$75°$；（2）$40°$；（3）$2\angle OFC-\angle AOC=120°$或$\angle AOC-2\angle OFC=120°$.

【分析】（1）先求出$\angle BOC=150°$，再根据角平分线的定义求出$\angle COE=75°$，然后根据三角形内角和定理求解即可；

（2）由角平分线的定义得$\angle BOC=2\angle COE=2\angle BOE$，利用三角形内角和定理得$\angle COE=150°-2\angle AOC$，再根据$\angle AOC+\angle BOC=180°$即可求解；

（3）由角平分线的定义得$\angle BOC=2\angle COE=2\angle BOE$，利用三角形外角的性质得$COE=30°-\angle OFC$，再根据$\angle AOC+\angle BOC=180°$即可求解；

【详解】（1）$\because\angle AOC=30°$，

$\therefore\angle BOC=180°-30°=150°$.

$\because OE$平分$\angle BOC$，

$\therefore\angle COE=\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC=75°$，

$\therefore\angle OFC=180°-30°-75°=75°$.

（2）$\because OE$平分$\angle BOC$，

$\therefore\angle BOC=2\angle COE=2\angle BOE$.

$\because\angle OFC=2\angle AOC$，$\angle C=30°$，

$\therefore\angle COE=180°-\angle C-\angle OFC=150°-2\angle AOC$，

$\because\angle AOC+\angle BOC=180°$，

$\therefore\angle AOC+2(150°-2\angle AOC)=180°$，

$\therefore\angle AOC=40°$；

（3）当OC在直线AB的上方时，如图 2，

$\because OE$平分$\angle BOC$，

$\therefore\angle BOC=2\angle COE=2\angle BOE$.

$\because\angle AOC=30°$，

∴$COE = 180° - \angle C - \angle OFC = 150° - \angle OFC$，

∵$\angle AOC + \angle BOC = 180°$，

∴$\angle AOC + 2(150° - \angle OFC) = 180°$，

∴$2\angle OFC - \angle AOC = 120°$；

当OC在直线AB的下方时，如备用图，

∵OE平分$\angle BOC$，

∴$\angle BOC = 2\angle COE = 2\angle BOE$．

∵$\angle C = 30°$，

∴$COE = 30° - \angle OFC$，

∵$\angle AOC + \angle BOC = 180°$，

∴$\angle AOC + 2(30° - \angle OFC) = 180°$，

∴$\angle AOC - 2\angle OFC = 120°$．

综上可知，$\angle AOC$和$\angle OFC$之间的数量关系为：$2\angle OFC - \angle AOC = 120°$或$\angle AOC - 2\angle OFC = 120°$．

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，三角形外角的性质，数形结合是解答本题的关键．

7．（2023春·湖北武汉·七年级统考期中）已知，直线$AB \parallel CD$．

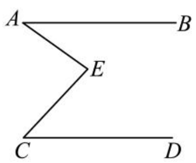


图1

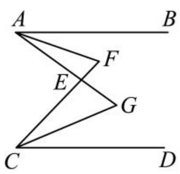


图2

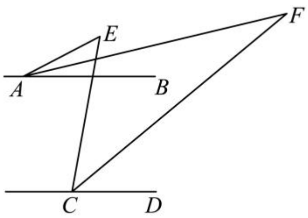


图3

(1)如图1，点E在AB、CD之间，求证：$\angle AEC = \angle A + \angle C$；

(2)如图2，在（1）的条件下，$\angle BAE$的平分线交CE的延长线于点F，$\angle DCE$的平分线交AE的延长线于点G，试探究$\angle F$，$\angle G$和$\angle AEC$这三个角之间的数量关系，并说明理由．

(3)如图3，点E在直线AB的上方，$\angle EAB$，$\angle ECD$的平分线交于点F，若$\angle E - \angle F = 20°$，请直接写出$\angle ECD - \angle EAB$的值．

【答案】(1)见解析

(2)$\angle F + \angle G = \frac{3}{2}\angle AEC$，理由见解析

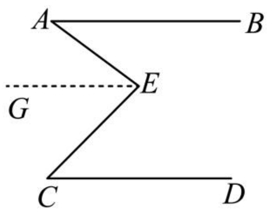
(3)$\angle ECD - \angle EAB = 40°$

【分析】（1）作$EG\parallel AB\parallel CD$，根据平行线的性质即可证明结论；

（2）根据三角形的内角和可得$\angle AEF+\angle CEG=360^{\circ}-\angle EAF-\angle ECG-\angle F-\angle G$，根据角平分线的性质可得$\angle EAF+\angle ECG=\frac{1}{2}(\angle BAE+\angle DCE)$，结合（1）可得$\angle EAF+\angle ECG=\frac{1}{2}\angle AEC$，推得$\angle AEF+\angle CEG=360^{\circ}-\frac{1}{2}\angle AEC-\angle F-\angle G$，故$2\angle AEC=\frac{1}{2}\angle AEC+\angle F+\angle G$，即可得出答案；

（3）根据三角形的外角性质可推得$\angle E-\angle F=\angle FCE-\angle EAF$，根据角平分线的性质，得出$\angle E-\angle F=\frac{1}{2}\angle ECD-\frac{1}{2}\angle EAB=20^{\circ}$，即可得出答案.

【详解】（1）证明：如图，作$EG\parallel AB\parallel CD$，



$\therefore\angle A=\angle AEG$，$\angle C=\angle CEG$，

$\because\angle AEC=\angle AEG+\angle CEG$，

$\therefore\angle AEC=\angle A+\angle C$.

（2）解：$\because\angle AEC=180^{\circ}-\angle CEG$，$\angle AEC=180^{\circ}-\angle AEF$，

$\therefore 2\angle AEC=360^{\circ}-\angle AEF-\angle CEG$，

又$\because\angle AEF=180^{\circ}-\angle EAF-\angle F$，$\angle CEG=180^{\circ}-\angle ECG-\angle G$，

故$\angle AEF+\angle CEG=360^{\circ}-\angle EAF-\angle ECG-\angle F-\angle G$，

且AF、CG分别为$\angle BAE$、$\angle DCE$的平分线，

$\therefore\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAE$，$\angle ECG=\frac{1}{2}\angle DCE$，

故$\angle EAF+\angle ECG=\frac{1}{2}\angle BAE+\frac{1}{2}\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle BAE+\angle DCE)$

由（1）可知$\angle BAE+\angle DCE=\angle AEC$

$\therefore\angle EAF+\angle ECG=\frac{1}{2}\angle BAE+\frac{1}{2}\angle DCE=\frac{1}{2}\angle AEC$，

$\therefore\angle AEF+\angle CEG=360^{\circ}-\frac{1}{2}\angle AEC-\angle F-\angle G$

又$\because 2\angle AEC=360^{\circ}-\angle AEF-\angle CEG$，

$\therefore 2\angle AEC=\frac{1}{2}\angle AEC+\angle F+\angle G$，

$\therefore \angle F+\angle G=\frac{3}{2}\angle AEC$.

（3）$\because \angle EAF+\angle E=\angle FCE+\angle F$，

$\therefore \angle E-\angle F=\angle FCE-\angle EAF$，

$\because AF$，CE是$\angle EAB$、$\angle ECD$的平分线，

$\therefore \angle E-\angle F=\frac{1}{2}\angle ECD-\frac{1}{2}\angle EAB=20°$

$\therefore \angle ECD-\angle EAB=40°$.

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形的内角和，角平分线的性质，三角形的外角性质，作出辅助线是解题的关键.

8．（2023春·四川泸州·七年级统考期中）如图1，已知$AB\parallel CD$，$AC\parallel EF$

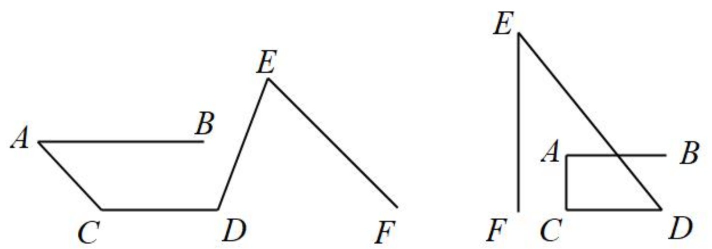


图1　　图2

(1)观察猜想：若$\angle A=45°$，$\angle E=65°$，则$\angle CDE$的度数为_

(2)探究问题：请在图1中探究$\angle A$，$\angle CDE$与$\angle E$之间有怎样的数量关系，并说明理由.

(3)拓展延伸：若将图1变为图2，题设的条件不变，此时$\angle CAB$，$\angle CDE$与$\angle E$又有怎样的数量关系呢？请写出结论并说明理由

【答案】(1)110°

(2)$\angle CDE=\angle A+\angle E$；理由见解析

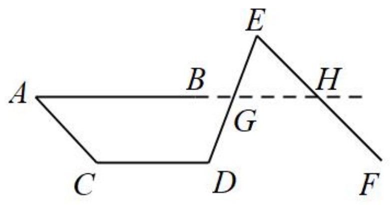
(3)$\angle CAB=\angle E+\angle D$，理由见解析

【分析】（1）延长AB交DE于点G，交EF于点H，根据平行线的性质求出$\angle EHG=\angle A=45°$，根据三角形外角的性质求出$\angle DGH=\angle E+\angle EHG=65°+45°=110°$，最后根据平行线的性质求出结果即可；

（2）根据解析（1）的方法，求解即可；

（3）延长CA交DE于点 G，AB与DE交于点 H，根据平行线的性质得出$\angle CGD=\angle E$，$\angle AHG=\angle D$，根据三角形外角的性质即可得出结论.

【详解】（1）解：延长AB交DE于点 G，交EF于点 H，如图所示：



$\because AC \parallel EF$，$\angle A=45°$，

$\therefore \angle EHG=\angle A=45°$，

$\because \angle E=65°$，

$\therefore \angle DGH=\angle E+\angle EHG=65°+45°=110°$，

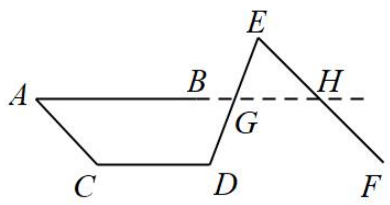
$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle CDE=\angle DGH=110°$.

故答案为：$110°$.

（2）解：$\angle CDE=\angle A+\angle E$；理由如下：

延长AB交DE于点 G，交EF于点 H，如图所示：



$\because AC \parallel EF$，

$\therefore \angle EHG=\angle A$，

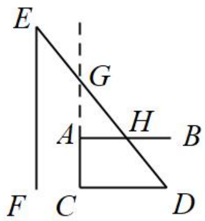
$\therefore \angle DGH=\angle E+\angle EHG=\angle E+\angle A$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle CDE=\angle DGH=\angle A+\angle E$.

（3）解：$\angle CAB=\angle E+\angle D$，理由如下：

延长CA交DE于点 G，AB与DE交于点 H，如图所示：



$\because AC \parallel EF$，

$\therefore \angle CGD = \angle E$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle AHG = \angle D$，

$\therefore \angle CAB = \angle CGD + \angle AHG = \angle E + \angle D$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质和三角形外角的性质，解题的关键是熟练掌握平行线的性质和三角形一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.