



专题 7.18 平面图形的认识（二）章末十四大题型总结（拔尖篇）

【苏科版】

► 题型梳理

【题型 1 平行线在三角板中的运用】	1
【题型 2 平行线在折叠中的运用】	3
【题型 3 旋转使平行】	4
【题型 4 利用平行线求角度之间的关系】	5
【题型 5 利用平行线解决角度定值问题】	8
【题型 6 平行线的阅读理解类问题】	10
【题型 7 平行线的性质在生活中的应用】	12
【题型 8 平行线与动点的综合应用】	14
【题型 9 利用三角形的中线求面积】	15
【题型 10 利用三角形的三边关系求线段的最值或取值范围】	17
【题型 11 利用三角形的三边关系化简或证明】	18
【题型 12 与角平分线有关的三角形角的计算问题】	19
【题型 13 与平行线有关的三角形角的计算问题】	21
【题型 14 与折叠有关的三角形角的计算问题】	23

► 举一反三

【题型 1 平行线在三角板中的运用】

【例 1】(2023 下·浙江温州·七年级校考期中)将一副直角三角板如图 1，摆放在直线 MN 上(直角三角板 ABC 和直角三角板 EDC ， $\angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$)，保持三角板 EDC 不动，将三角板 ABC 绕点 C 以每秒 5° 的速度，顺时针方向旋转，旋转时间为 t 秒，当 AC 与射线 CN 重合时停止旋转。

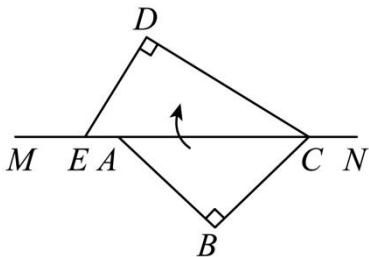


图1

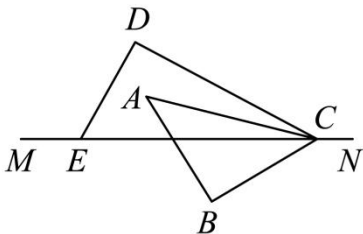


图2

- (1)如图 2，当 AC 为 $\angle DCE$ 的角平分线时，直接写出此时 t 的值；
- (2)当 AC 旋转至 $\angle DCE$ 的内部时，求 $\angle DCA$ 与 $\angle ECB$ 的数量关系。
- (3)在旋转过程中，当三角板 ABC 的其中一边与 ED 平行时，请直接写出此时 t 的值。



润禾托管

【变式 1-1】（2023 下·河南安阳·七年级统考期末）如图 1，将一副三角板中的两个直角顶点 C 叠放在一起，其中 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle D = \angle E = 45^\circ$ 。

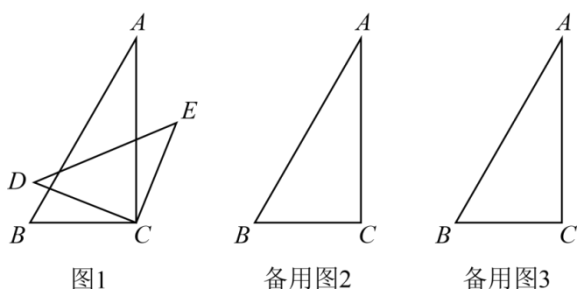
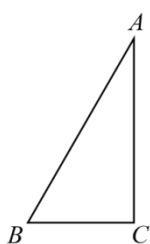
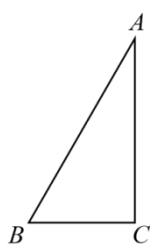


图1



备用图2



备用图3

- (1) 观察猜想， $\angle BCD$ 与 $\angle ACE$ 的数量关系是_____； $\angle BCE$ 与 $\angle ACD$ 的数量关系是_____；
- (2) 类比探究，若按住三角板 ABC 不动，顺时针绕直角顶点 C 转动三角形 DCE ，试探究当 $\angle ACD$ 等于多少度时 $CE \parallel AB$ ，画出图形并简要说明理由；
- (3) 拓展应用，若 $\angle BCE = 3\angle ACD$ ，求 $\angle ACD$ 的度数；并直接写出此时 DE 与 AC 的位置关系。

【变式 1-2】（2023 上·湖南长沙·七年级校考期末）如图，两个形状，大小完全相同的含有 30° 、 60° 的三角板如图放置， PA 、 PB 与直线 MN 重合，且三角板 PAC ，三角板 PBD 均可以绕点 P 逆时针旋转。

- (1) ①如图 1， $\angle DPC =$ _____度。
- ②我们规定，如果两个三角形只要有一组边平行，我们就称这两个三角形为“孪生三角形”，如图 1，三角板 PBD 不动，三角板 PAC 从图示位置开始每秒 10° 逆时针旋转一周（ $0^\circ < \text{旋转} < 360^\circ$ ），问旋转时间 t 为多少时，这两个三角形是“孪生三角形”。
- (2) 如图 3，若三角板 PAC 的边 PA 从 PN 处开始绕点 P 逆时针旋转，转速 $3^\circ/\text{秒}$ ，同时三角板 PBD 的边 PB 从 PM 处开始绕点 P 逆时针旋转，转速 $2^\circ/\text{秒}$ ，在两个三角板旋转过程中，（ PC 转到与 PM 重合时，两三角板都停止转动）。设两个三角板旋转时间为 t 秒，以下两个结论：① $\frac{\angle CPD}{\angle BPN}$ 为定值；② $\angle BPN + \angle CPD$ 为定值，请选择你认为对的结论加以证明。

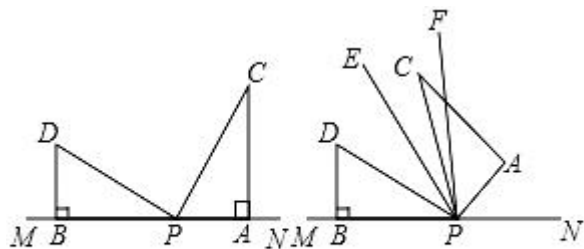


图 1

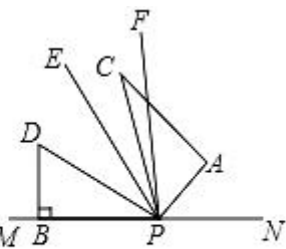


图 2

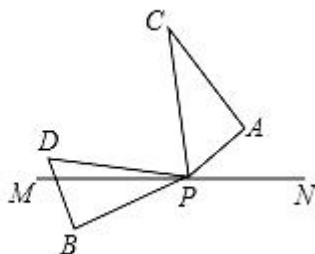


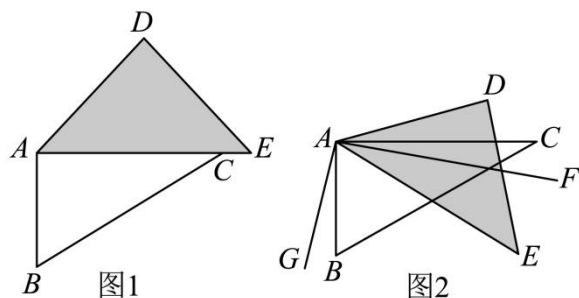
图 3

【变式 1-3】（2023 上·福建泉州·七年级统考期末）如图 1，将三角板 ABC 与三角板 ADE 摆放在一起，其中 $\angle ACB = 30^\circ$ ， $\angle DAE = 45^\circ$ ， $\angle BAC = \angle D = 90^\circ$ ，固定三角板 ABC ，将三角板 ADE 绕点 A 按顺时针方向旋转，



润禾托管

当点 E 落在射线 AC 的反向延长线上时，即停止旋转.



(1)如图 2, 当边 AC 落在 $\angle DAE$ 内,

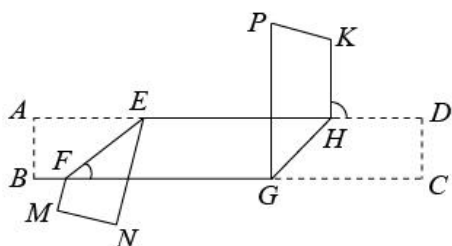
① $\angle CAD$ 与 $\angle BAE$ 之间存在怎样的数量关系? 试说明理由;

② 过点 A 作射线 AF, AG , 若 $\angle CAF = \frac{1}{3}\angle CAD$, $\angle BAG = \frac{1}{4}\angle EAG$, 求 $\angle FAG$ 的度数;

(2) 设 $\triangle ADE$ 的旋转速度为 $3^\circ/\text{秒}$, 旋转时间为 t , 若它的一边与 $\triangle ABC$ 的某一边平行 (不含重合情况), 试写出所有符合条件的 t 的值.

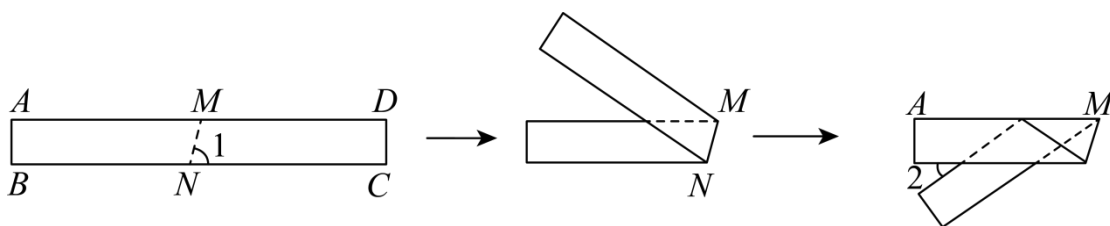
【题型 2 平行线在折叠中的运用】

【例 2】(2023 下·浙江温州·七年级校联考期中) 如图, 已知长方形纸片 $ABCD$, 点 E 和点 F 分别在边 AD 和 BC 上, 且 $\angle EFC = 37^\circ$, 点 H 和点 G 分别是边 AD 和 BC 上的动点, 现将点 A, B, C, D 分别沿 EF, GH 折叠至点 N, M, P, K , 若 $MN \parallel PK$, 则 $\angle KHD$ 的度数为 ()



- A. 37° 或 143° B. 74° 或 96° C. 37° 或 105° D. 74° 或 106°

【变式 2-1】(2023 下·福建宁德·七年级统考期末) 如图, 将一条长方形彩带 $ABCD$ 进行两次折叠, 先沿折痕 MN 向上折叠, 再沿折痕 AM 向背面折叠, 若要使两次折叠后彩带的夹角 $\angle 2 = 26^\circ$, 则第一次折叠时 $\angle 1$ 应等于 _____ $^\circ$.

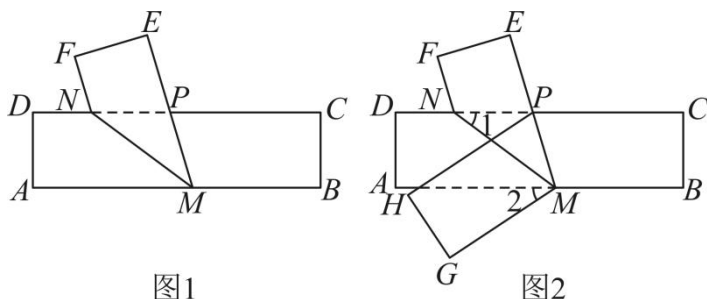


【变式 2-2】(2023 下·浙江温州·七年级温州市第十二中学校联考期中) 已知 M, N 分别是长方形纸条 $ABCD$



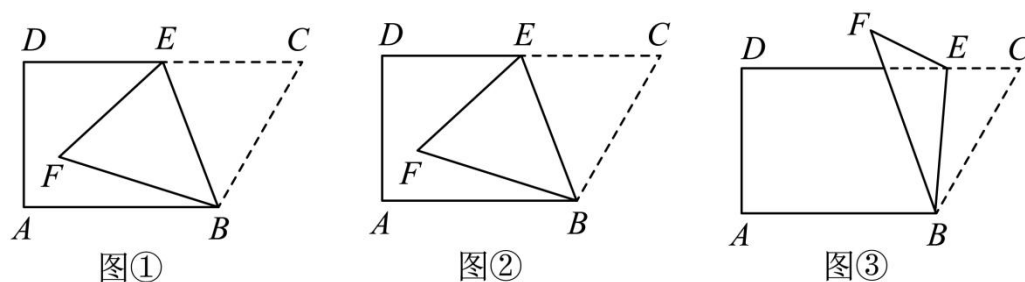
润禾托管

边 AB , CD 上两点 ($AM > DN$), 如图1所示, 沿 M, N 所在直线进行第一次折叠, 点 A, D 的对应点分别为点 E, F , EM 交 CD 于点 P ; 如图2所示, 继续沿 PM 进行第二次折叠, 点 B, C 的对应点分别为点 G, H , 若 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\angle CPM$ 的度数为 ()



- A. 74° B. 72° C. 70° D. 68°

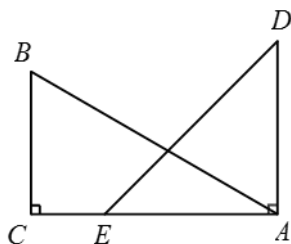
【变式 2-3】(2023 下·河南南阳·七年级统考期末) 如图, 已知四边形纸片 $ABCD$ 的边 $AB \parallel CD$, E 是边 CD 上任意一点, $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠, 点 C 落在点 F 的位置.



- (1) 观察发现: 如图①所示: $\angle C = 60^\circ$, $\angle FED = 45^\circ$, 则 $\angle ABF =$ _____.
- (2) 拓展探究: 如图②, 点 F 落在四边形 $ABCD$ 的内部, 探究 $\angle FED$, $\angle ABF$, $\angle C$ 之间的数量关系, 并证明;
- (3) 迁移应用: 如图③, 点 F 落在边 CD 的上方, 则(2)中的结论是否成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请写出它们的数量关系并证明.

【题型 3 旋转使平行】

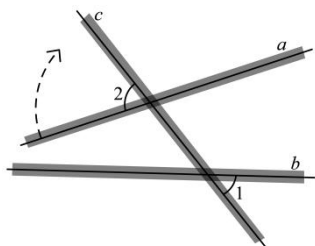
【例 3】(2023 下·江苏苏州·七年级统考期末) 在一次课外活动中, 小明将一副直角三角板如图放置, E 在 AC 上, $\angle C = \angle DAE = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. 小明将 $\triangle ADE$ 从图中位置开始, 绕点 A 按每秒 6° 的速度顺时针旋转一周, 在旋转过程中, 第_____秒时, 边 AB 与边 DE 平行.





润禾托管

【变式 3-1】(2023 下·河北唐山·七年级统考期末)如图,分别将木条 a, b 与固定的木条 c 钉在一起, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, 顺时针转动木条 a , 下列选项能使木条 a 与 b 平行的是 ()



- A. 旋转 30° B. 旋转 50° C. 旋转 80° D. 旋转 130°

【变式 3-2】(2023 下·安徽六安·七年级统考期末)两块不同的三角板按如图 1 所示摆放, AC 边与 $A'C$ 边重合, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle DAC = 30^\circ$, 接着如图 2 保持三角板 ABC 不动, 将三角板 $A'CD$ 绕着点 C (点 C 不动) 按顺时针 (如图标示方向) 旋转, 在旋转的过程中, $\angle ACA'$ 逐渐增大, 当 $\angle ACA'$ 第一次等于 90° 时, 停止旋转, 在此旋转过程中, $\angle ACA' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 时, 三角板 $A'CD$ 有一条边与三角板 ABC 的一条边恰好平行.

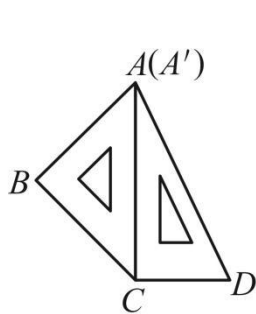


图1

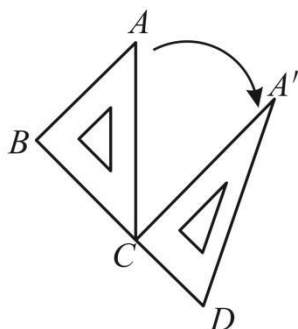
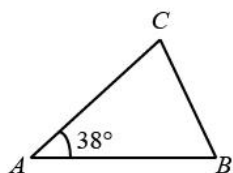
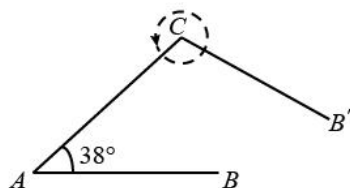


图2

【变式 3-3】(2023 下·河北唐山·七年级统考期中)如图 (1), 在三角形 ABC 中, $\angle A = 38^\circ$, BC 边绕点 C 按逆时针方向旋转一周回到原来的位置. 在旋转的过程中 (图 (2)), 使 $CB' \parallel AB$, 则 $\angle B'CA = (\quad)$



图(1)



图(2)

- A. 38° B. 142° C. 38° 或 142° D. 38° 或 52°

【题型 4 利用平行线求角度之间的关系】

【例 4】(2023 下·广东广州·七年级统考期末)点 A, C, E 在直线 l 上, 点 B 不在直线 l 上, 把线段 AB 沿直线 l 向右平移得到线段 CD .

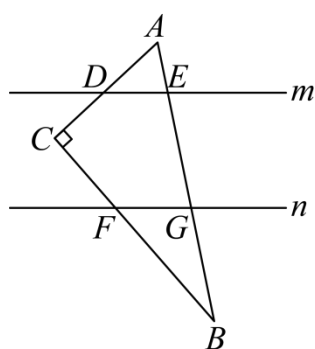


图1

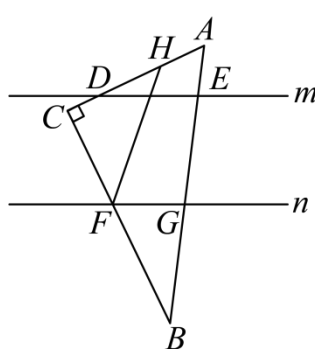


图2

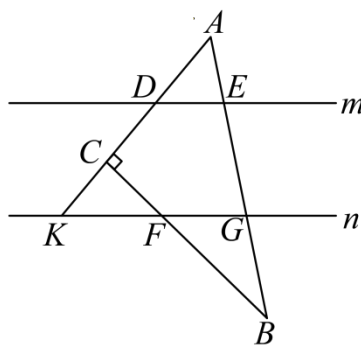


图3

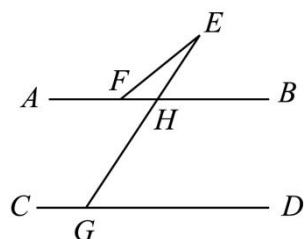
(1) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$

如图 1 位置摆放, 如果 $\angle ADE = 46^\circ$, 则 $\angle CFG =$ _____;

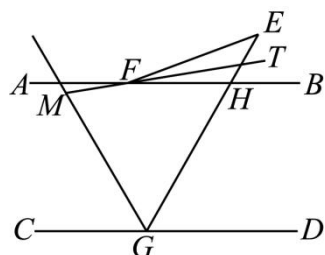
(2) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$ 如图 2 位置摆放, H 为 AC 上一点, $\angle HFG + \angle CFG = 180^\circ$, 请写出 $\angle HFG$ 与 $\angle ADE$ 之间的数量关系, 并说明理由;

(3) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$ 如图 3 位置摆放, 若 $\angle EDC = 140^\circ$, 延长 AC 交直线 n 于点 K , 点 P 是射线 EG 上一动点, 探究 $\angle PDK$, $\angle DPK$ 与 $\angle PKG$ 的数量关系, 请直接写出结论 (题中的所有角都大于 0° 小于 180°).

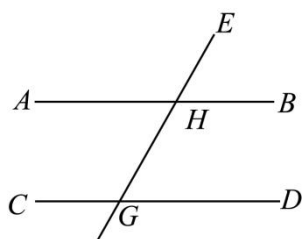
【变式 4-3】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期末) 【问题情境】如图 1, $AB \parallel CD$, 直线 EG 交 AB 于点 H , 交 CD 于点 G , 点 F 在直线 AB 上. 直接写出 $\angle E, \angle EFH, \angle EGD$ 之间的数量关系为_____.



【实践运用】如图 2, $AB \parallel CD$, 直线 EG 交 AB 于点 H , 交 CD 于点 G , 点 F 在直线 AB 上. FT 平分 $\angle EFH$, GM 平分 $\angle EGC$, 若 $\angle E = 40^\circ$, 求 $\angle FMG$ 的度数.

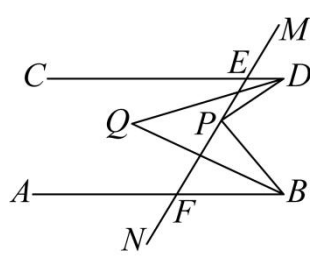


【拓广探索】如图 3, $AB \parallel CD$, 直线 EG 交 AB 于点 H , 交 CD 于点 G , 点 P 为平面内不在直线 AB, CD, EG 上的一点, 若 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$, 则 $\angle HPG =$ _____ (直接写出答案, 用 x, y 表示).

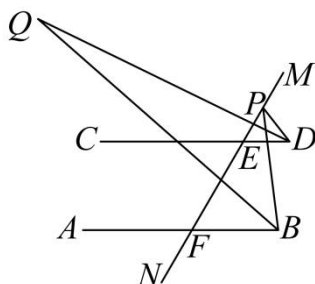


【题型 5 利用平行线解决角度定值问题】

【例 5】（2023 下·河南商丘·七年级统考期末）已知 $AB \parallel CD$ ， P 是截线 MN 上的一点， MN 与 CD ， AB 分别交于 E ， F 。



图(1)



图(2)

(1)如图(1)， P 在 AB 、 CD 之间，若 $\angle EFB = 50^\circ$ ， $\angle EDP = 35^\circ$ ，求 $\angle MPD$ 的度数；

(2)如图(1)，当点 P 在线段 EF 上运动时， $\angle CDP$ 与 $\angle ABP$ 的平分线交于 Q ，则 $\frac{\angle Q}{\angle DPB}$ 是否为定值？若是定值，请求出定值；若不是，说明其范围；

(3)如图(2)，当点 P 在线段 FE 的延长线上运动时， $\angle CDP$ 与 $\angle ABP$ 的平分线交于 Q ， $\frac{\angle Q}{\angle DPB}$ 的值是否为定值？若是，求出定值，若不是，请说明理由。

【变式 5-1】（2023 下·福建龙岩·七年级校考阶段练习）如图 1，点 A 、 D 分别在射线 BM 、 CN 线上， $BM \parallel CN$ ， $BM \perp BC$ 于点 B ， AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E ，连接 DE ， $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ 。

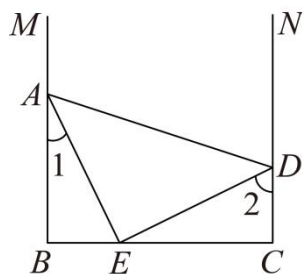


图1

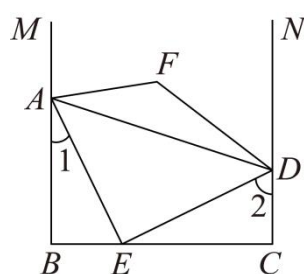


图2

(1)求证： $AE \perp ED$ ；

(2)求证： DE 平分 $\angle ADC$ ；



(3)如图 2, $\angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点 F , 试猜想 $\angle F$ 的值是否为定值, 若是, 请予以证明; 若不是, 请说明理由.

【变式 5-2】(2023 下·河北保定·七年级统考期末) 如图 1, 已知 $\angle EFH = 90^\circ$, 点 A, C 分别在射线 FE 和 FH 上, 在 $\angle EFH$ 内部作射线 AB, CD , 使 AB 平行于 CD .

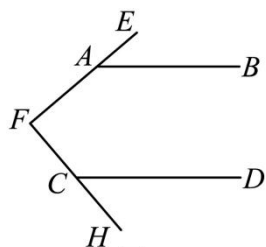


图1

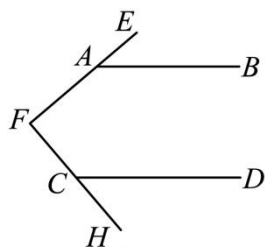


图2

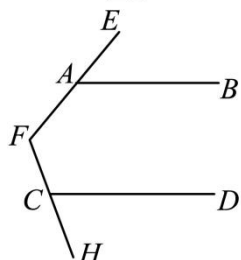


图3

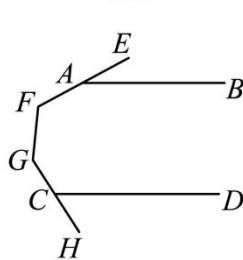


图4

(1)如图 1, 若 $\angle FAB = 150^\circ$, 求 $\angle HCD$ 的度数;

(2)小颖发现, 在 $\angle EFH$ 内部, 无论 $\angle FAB$ 如何变化, $\angle FAB - \angle HCD$ 的值始终为定值, 请你结合图 2 求出这一定值;

(3)①如图 3, 把图 1 中的 $\angle EFH = 90^\circ$ 改为 $\angle EFH = 120^\circ$, 其他条件不变, 请直接写出 $\angle FAB$ 与 $\angle HCD$ 之间的数量关系;

②如图 4, 已知 $\angle EFG + \angle FGC = \alpha$, 点 A, C 分别在射线 FE, GH 上, 在 $\angle EFG$ 与 $\angle FGH$ 内部作射线 AB, CD , 使 AB 平行于 CD , 请直接写出 $\angle FAB$ 与 $\angle HCD$ 之间的数量关系.

【变式 5-3】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期末) 如图 1, 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, 点 A, B 在直线 l_1 上, 点 C, D 在 l_2 上, 线段 AD 交线段 BC 于点 E , 且 $\angle BED = 60^\circ$.

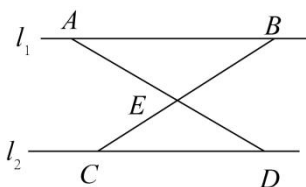


图 1

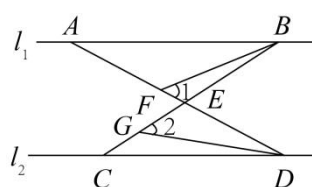


图 2

(1)求证: $\angle ABE + \angle EDC = 60^\circ$;

(2)如图 2, 当 F, G 分别在线段 AE, EC 上, 且 $\angle ABF = 2\angle FBE$, $\angle EDG = 2\angle GDC$, 标记 $\angle BFE$ 为 $\angle 1$, $\angle BGD$



润禾托管

为 $\angle 2$.

①若 $\angle 1 - \angle 2 = 16^\circ$, 求 $\angle ADC$ 的度数;

②当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $(k\angle 1 + \angle 2)$ 为定值, 此时定值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【题型6 平行线的阅读理解类问题】

【例6】(2023下·江苏泰州·七年级泰州市海军中学校考阶段练习) 【注重阅读理解】阅读以下材料:

已知点 B, D 分别在 AK 和 CF 上, 且 $CF \parallel AK$.

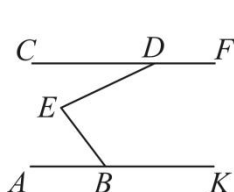


图1

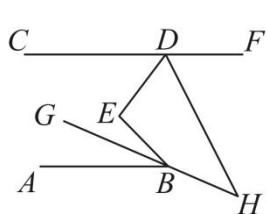


图2

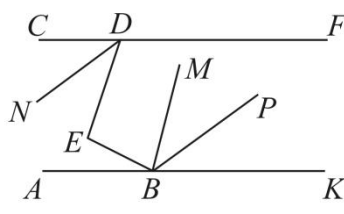


图3

(1)如图1, 若 $\angle CDE = 22^\circ$, $\angle DEB = 75^\circ$, 则 $\angle ABE$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2)如图2, BG 平分 $\angle ABE$, GB 延长线与 $\angle EDF$ 的平分线交于 H 点, 若 $\angle DEB$ 比 $\angle DHB$ 大 60° , 求 $\angle DEB$ 的度数.

(3)保持(2)中所求的 $\angle DEB$ 的度数不变, 如图3, BM 平分 $\angle EBK$, DN 平分 $\angle CDE$, 作 $BP \parallel DN$, 则 $\angle PBM$ 的度数是否改变? 若不变, 请求值; 若改变, 请说明理由.

【变式6-1】(2023下·湖北孝感·七年级统考期末) [课题学习]:

平行线的“等角转化”功能.

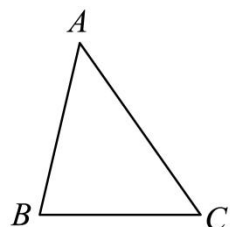


图1

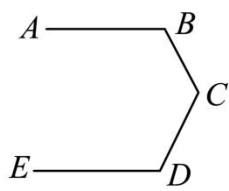


图2

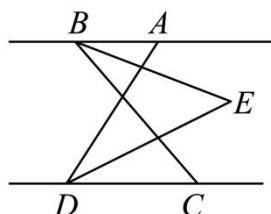


图3

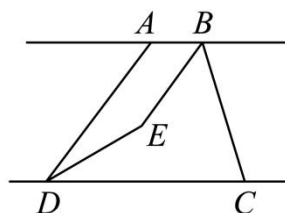


图4

[阅读理解]:

如图1, 已知点 A 是 BC 外一点, 连接 AB, AC , 求 $\angle BAC + \angle B + \angle C$ 的度数.

(1) 阅读并补充下面推理过程.

解: 过点 A 作 $ED \parallel BC$, 所以 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$, $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$,

又因为 $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$.

[解题反思]:

从上面的推理过程中, 我们发现平行线具有“等角转化”的功能, 将 $\angle BAC, \angle B, \angle C$ “凑”在一起, 得到角的



润禾托管

关系，使问题得到解决.

[方法运用]:

(2) 如图 2, 已知 $AB \parallel ED$, 求 $\angle B + \angle BCD + \angle D$ 的度数.

[深化拓展]:

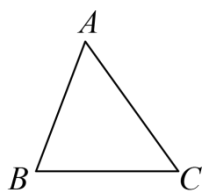
(3) 已知 $AB \parallel CD$, 点 C 在 D 的右侧, $\angle ADC = 70^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$, DE 平分 $\angle ADC$, BE , DE 所在的直线交于点 E , 点 E 在 AB 与 CD 两条平行线之间.

① 如图 3, 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\angle BED =$ _____ $^\circ$;

② 如图 4, 点 B 在点 A 的右侧, 若 $\angle ABC = n^\circ$, 则 $\angle BED =$ _____ $^\circ$. (用含 n 的代数式表示)

【变式 6-2】(2023 下·山东烟台·六年级统考期末) 课题学习: 平行线的“等角转化”功能.

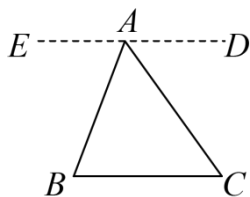
(1) 阅读理解: 如图, 已知点 A 是 BC 外一点, 连接 AB 、 AC , 求 $\angle B + \angle BAC + \angle C$ 的度数. 阅读并补充下面推理过程.



解: 过点 A 作 $ED \parallel BC$, 所以 $\angle B =$ _____, $\angle C =$ _____,

又因为 $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$,

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$.



解题反思: 从上面的推理过程中, 我们发现平行线具有“等角转化”的功能, 将 $\angle BAC$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ “凑”在一起, 得出角之间的关系, 使问题得以解决.

(2) 方法运用: 如图 1, 已知 $AB \parallel CD$, 求 $\angle B + \angle BPD + \angle D$ 的度数;

(3) 深化拓展: 已知直线 $AB \parallel CD$, 点 P 为平面内一点, 连接 PA 、 PD .

① 如图 2, 已知 $\angle A = 50^\circ$, $\angle D = 140^\circ$, 请直接写出 $\angle APD$ 的度数;

② 如图 3, 请判断 $\angle PAB$ 、 $\angle CDP$ 、 $\angle APD$ 之间的数量关系, 并说明理由.

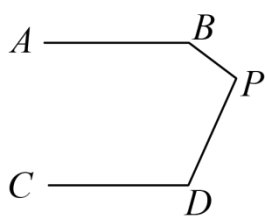


图1

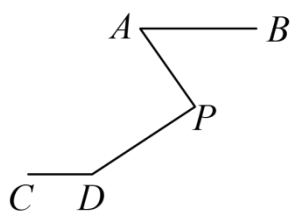


图2

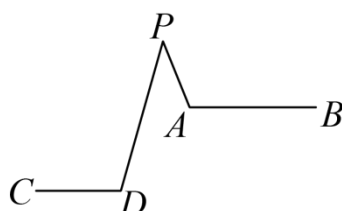


图3

【变式 6-3】（2023 下·河南商丘·七年级永城市实验中学学校考期末）阅读材料：如图 1，若 $AB \parallel CD$ ，则 $\angle B + \angle D = \angle BED$.

理由：如图，过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，

则 $\angle B = \angle BEF$.

因为 $AB \parallel CD$ ，

所以 $EF \parallel CD$ ，

所以 $\angle D = \angle DEF$ ，

所以 $\angle BED = \angle BEF + \angle DEF = \angle B + \angle D$.

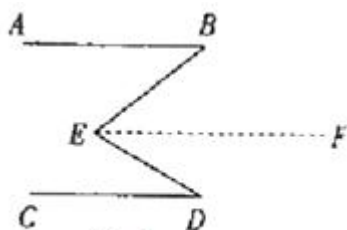


图 1

交流：（1）若将点 E 移至图 2 所示的位置， $AB \parallel CD$ ，此时 $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 之间有什么关系？请说明理由.

探究：（2）在图 3 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle E + \angle G$ 、 $\angle B + \angle F + \angle D$ 又有何关系？

应用：（3）在图 4 中，若 $AB \parallel CD$ ，又得到什么结论？请直接写出该结论.

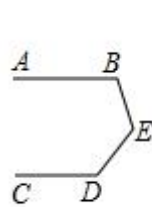


图2

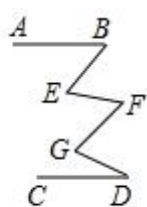


图3

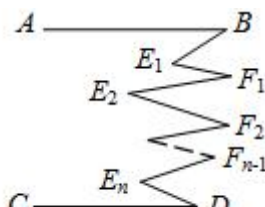


图 4

【题型 7 平行线的性质在生活中的应用】

【例 7】（2023 下·江苏泰州·七年级统考期末）如图 1 是一盏可折叠台灯. 图 2、图 3 是其平面示意图，支架 AB 、 BC 为固定支撑杆，支架 OC 可绕点 C 旋转调节. 已知灯体顶角 $\angle DOE = 52^\circ$ ，顶角平分线 OP 始终与 OC 垂直.



润禾托管



图 1

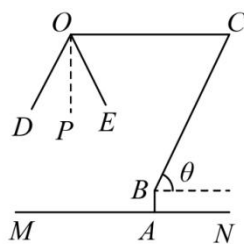


图 2

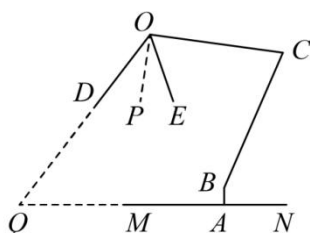
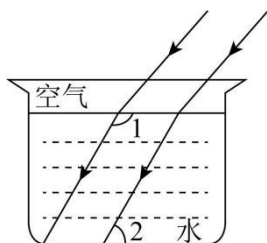


图 3

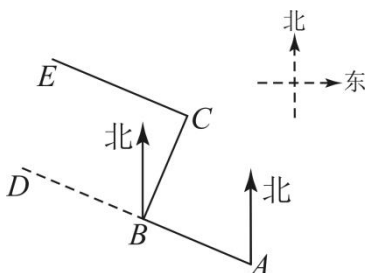
(1)如图 2, 当支架 OC 旋转至水平位置时, OD 恰好与 BC 平行, 求支架 BC 与水平方向的夹角 $\angle\theta$ 的度数;

(2)若将图 2 中的 OC 绕点 C 顺时针旋转 15° 到如图 3 的位置, 求此时 OD 与水平方向的夹角 $\angle OQM$ 的度数.

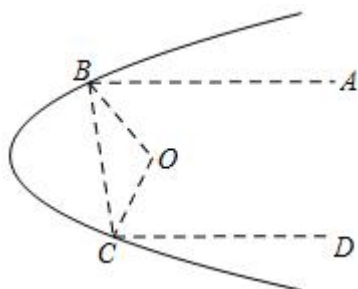
【变式 7-1】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期末) 光在不同介质中的传播速度不同, 因此当光线从空气射向水中时, 会发生折射, 如图, 在空气中平行的两条入射光线, 在水中的两条折射光线也是平行的, 若水面和杯底互相平行, 且 $\angle 1 = 122^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____.



【变式 7-2】(2023 下·七年级单元测试) 如图, 某工程队从 A 点出发, 沿北偏西 67° 方向修一条公路 AD , 在 BD 路段出现塌陷区, 就改变方向, 在 B 点沿北偏东 23° 的方向继续修建 BC 段, 到达 C 点又改变方向, 使所修路段 $CE \parallel AB$, 求 $\angle ECB$ 的度数.



【变式 7-3】(2023 下·广东广州·七年级统考期末) 探照灯、汽车灯等很多灯具的光线都与平行线有关, 如图所示是一探照灯碗的剖面, 从位于 O 点的灯泡发出的两束光线 OB , OC , 经灯碗反射以后平行射出, 其中 $\angle ABO = 38^\circ$, $\angle DCO = 78^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数是 _____ $^\circ$.



【题型 8 平行线与动点的综合应用】

【例 8】（2023 下·北京通州·七年级统考期末）已知：直线 $AB \parallel CD$ ，点 G 为直线 CD 上一定点，点 E 是直线 AB 上一动点，连结 EG 。在 EG 的左侧分别作射线 EM 、 GN ，两条射线相交于点 F ，设 $\angle AEF = \alpha$ 。

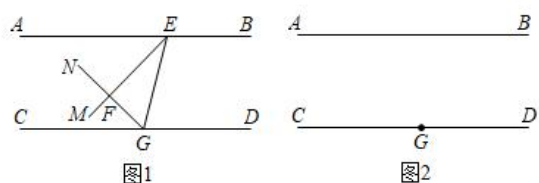


图1

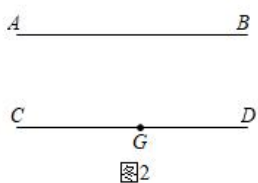
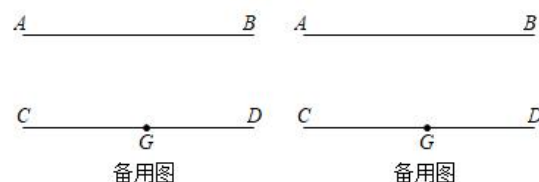


图2



备用图

备用图

(1) 当 $\angle GEF = 30^\circ$ ， $\angle EGF = 60^\circ$ 时，如图 1 位置所示，求 $\angle FGC$ 的度数（用含有 α 的式子表示），并写出解答过程；

(2) 当 $\angle GEF = \angle EGF = 45^\circ$ 时，过点 G 作 EG 的垂线 l 。

① 请在图 2 中补全图形；

② 直接写出直线 l 与直线 CD 所夹锐角的度数_____（用含有 α 的式子表示）。

【变式 8-1】（2023 下·海南省直辖县级单位·七年级统考期末）如图 1，已知直线 $AM \parallel BG$ ，点 C 为射线 BG 上一动点，过点 C 作 $CD \parallel AB$ 交 AM 于点 D ，点 E 在线段 AB 上， $\angle DCE = 90^\circ$ ，点 F 在线段 AD 上， $\angle FCG = 90^\circ$ ，点 H 在线段 BC 上， $\angle AHG = 90^\circ$ ， $\angle ECF = 60^\circ$ 。

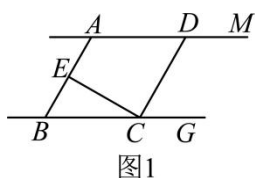


图1

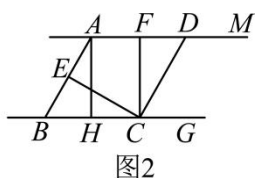
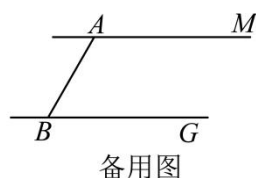


图2



备用图

(1) 写出一个与 $\angle ADC$ 相等的角_（写一个即可）；

(2) 如图 2，求 $\angle BCD$ 的度数；

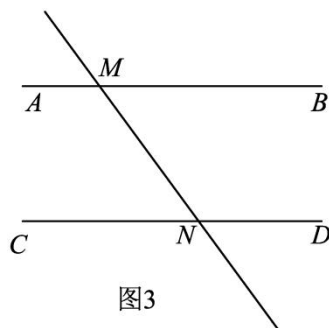
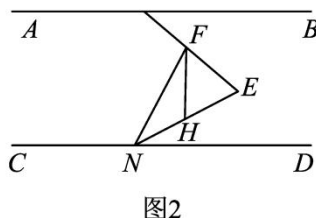
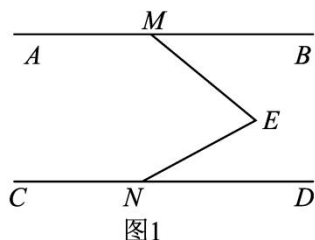
(3) 若点 F 是直线 AM 上的一点，点 H 是直线 BG 上的一点，在点 C 的运动过程中（点 C 不与点 B 、 H 重合），



润禾托管

求 $\angle BAF$ 的度数.

【变式 8-2】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期末) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, M, N 分别是直线 AB, CD 上一点, 点 E 在直线 AB, CD 之间.

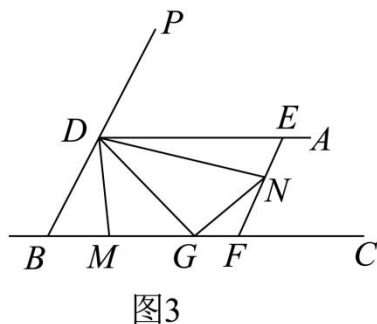
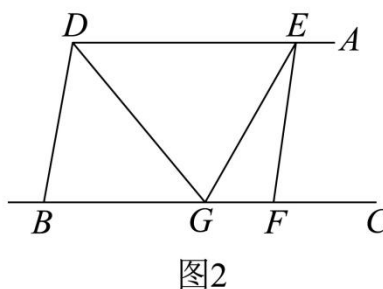
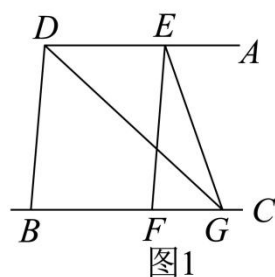


(1) 如图 1, 求证: $\angle BME + \angle DNE = \angle MEN$;

(2) 如图 2, F 是 EM 上一点, NE 平分 $\angle FND$, FH 平分 $\angle NFE$, 试探究 $\angle NHF$ 与 $\angle BME$ 之间的数量关系? 并证明你的结论;

(3) 如图 3, P 为直线 MN 上一动点 (不与点 N 重合), 过点 P 作 $PG \perp MN$ 交直线 CD 于点 G , $\angle PNG$ 的角平分线和 $\angle PGC$ 的角平分线交于点 O , 则 $\angle O$ 的度数为 _____ (直接写出结果).

【变式 8-3】(2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨德强学校校考期中) 点 E 在射线 DA 上, 点 F, G 为射线 BC 上两个动点, 满足 $\angle DBF = \angle DEF$, $\angle BDG = \angle BGD$, DG 平分 $\angle BDE$.



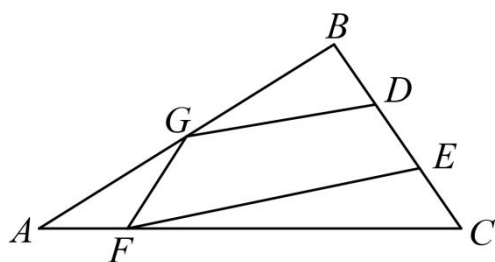
(1) 如图 1, 当点 G 在 F 右侧时, 求证: $BD \parallel EF$;

(2) 如图 2, 当点 G 在 F 左侧时, 求证: $\angle DGE = \angle BDG + \angle FEG$;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, P 为 BD 延长线上一点, DM 平分 $\angle BDG$, 交 BC 于点 M , DN 平分 $\angle PDM$, 交 EF 于点 N , 连接 NG , 若 $DG \perp NG$, $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$, 则 $\angle DBF$ 的度数是多少.

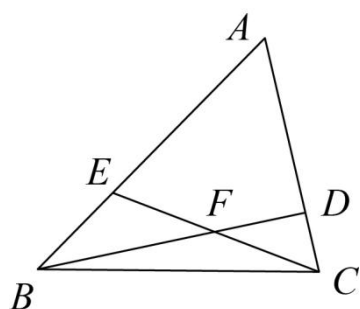
【题型 9 利用三角形的中线求面积】

【例 9】(2023 春·贵州毕节·七年级统考期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AG = BG$, $BD = DE = EC$, $CF = 4AF$, 若四边形 $DEFG$ 的面积为 28, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

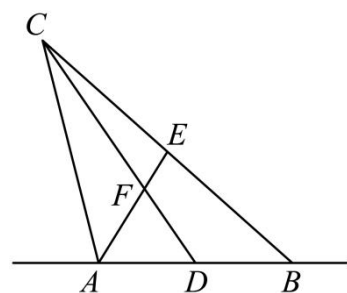


- A. 60 B. 56 C. 70 D. 48

【变式 9-1】（2023 秋·黑龙江哈尔滨·七年级校考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BF = 2FD$ ， $EF = FC$ ，若 $\triangle BEF$ 的面积为 4，则四边形 $AEFD$ 的面积为_____.



【变式 9-2】（2023 春·江苏连云港·七年级统考期末）如图，点 C 为直线 AB 外一动点， $AB = 6$ ，连接 CA 、 CB ，点 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点，连接 AE 、 CD 交于点 F ，当四边形 $BEFD$ 的面积为 5 时，线段 AC 长度的最小值为_____.



【变式 9-3】（2023 春·江苏盐城·七年级统考期末）【问题情境】

苏科版数学课本七年级下册上有这样一道题：如图 1， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积有怎样的数量关系？

小旭同学在图 1 中作 BC 边上的高 AE ，根据中线的定义可知 $BD = CD$ 。又因为高 AE 相同，所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ ，于是 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD}$ 。据此可得结论：三角形的一条中线平分该三角形的面积。

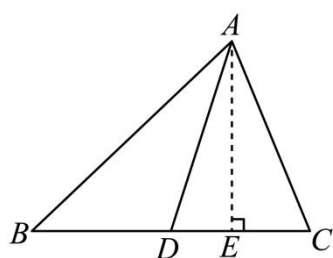


图1

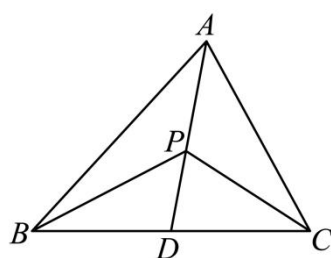


图2

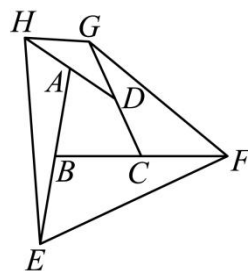


图3

【深入探究】

(1) 如图2, 点D在 $\triangle ABC$ 的边BC上, 点P在AD上.

①若AD是 $\triangle ABC$ 的中线, 求证: $S_{\triangle APB} = S_{\triangle APC}$;

②若 $BD = 3DC$, 则 $S_{\triangle APB} : S_{\triangle APC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【拓展延伸】

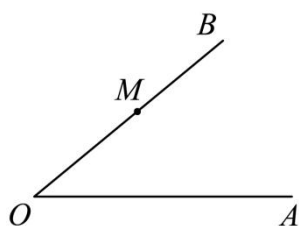
(2) 如图3, 分别延长四边形ABCD的各边, 使得点A、B、C、D分别为DH、AE、BF、CG的中点, 依次连结E、F、G、H得四边形EFGH.

①求证: $S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形ABCD}}$;

②若 $S_{\text{四边形ABCD}} = 3$, 则 $S_{\text{四边形EFGH}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【题型 10 利用三角形的三边关系求线段的最值或取值范围】

【例 10】(2023 春·河北保定·七年级统考期末) 如图, $\angle AOB < 90^\circ$, 点M在OB上, 且 $OM = 6$, 点M到射线OA的距离为a, 点P在射线OA上, $MP = x$. 若 $\triangle OMP$ 的形状, 大小是唯一确定的, 则x的取值范围是 ()



- A. $x = a$ 或 $x \geq 6$ B. $x \geq 6$ C. $x = 6$ D. $x = 6$ 或 $x > a$

【变式 10-1】(2023 秋·安徽合肥·七年级统考期末) 不等边 $\triangle ABC$ 的两条高的长度分别为4和12, 若第三条高也为整数, 那么它的长度最大值是_____

【变式 10-2】(2023 秋·安徽·七年级期末) 一个三角形的两边长分别为5和7, 设第三边上的中线长为x, 则x的取值范围是 ()

- A. $x > 5$ B. $x < 7$ C. $2 < x < 12$ D. $1 < x < 6$

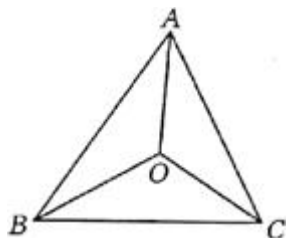


润禾托管

【变式 10-3】（2023 秋·浙江杭州·七年级期末）设 a, b, c 表示一个三角形三边的长，且他们都是自然数，其中 $a \leq b \leq c$ ，若 $b=2020$ ，则满足此条件的三角形共有_____个。

【题型 11 利用三角形的三边关系化简或证明】

【例 11】（2023·七年级单元测试）如图，已知点 O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点.证明：



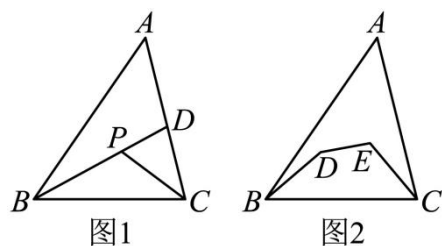
(1) $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

(2) $AB + AC + BC > OA + OB + OC$.

(3) 若 A, B, C 为三个城镇， $AB + AC + BC = 10$ km，要在 $\triangle ABC$ 内建造供水站 O 向三个城镇按如图路线供水，则所需供水管长度应满足什么条件？

【变式 11-1】（2023 春·七年级课时练习）已知 a, b, c 是一个三角形的三边长，化简 $|2a+b-c| - |b-2a-c| + |-a-b-2c|$.

【变式 11-2】（2023 春·全国·七年级专题练习）如图 1，点 P 是 $\triangle ABC$ 内部一点，连接 BP ，并延长交 AC 于点 D .

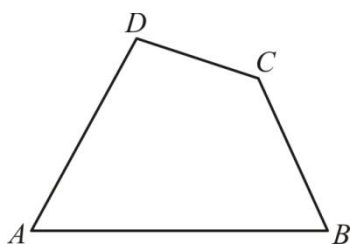


(1) 试探究 $AB + BC + CA$ 与 $2BD$ 的大小关系；

(2) 试探究 $AB + AC$ 与 $PB + PC$ 的大小关系；

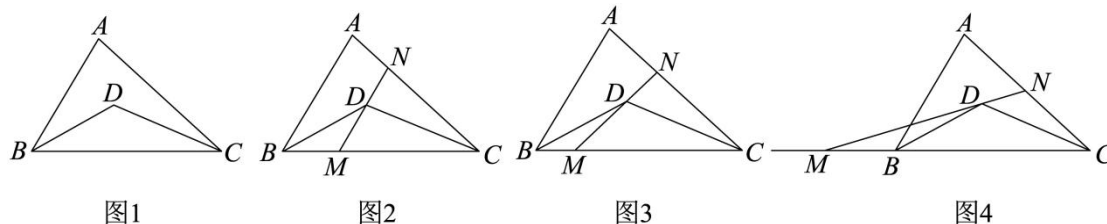
(3) 如图 2，点 D, E 是 $\triangle ABC$ 内部两点，试探究 $AB + AC$ 与 $BD + DE + CE$ 的大小关系.

【变式 11-3】（2023 春·六年级单元测试）如图，草原上有四口油井，位于四边形 $ABCD$ 的四个顶点上，现在要建立一个维修站 H ，试问 H 建在何处，才能使它到四口油井的距离之和 $HA + HB + HC + HD$ 最小，说明理由



【题型 12 与角平分线有关的三角形角的计算问题】

【例 12】（2023 春·江苏苏州·七年级太仓市第一中学校考期中）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 。



(1) 若 $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数为 _____；

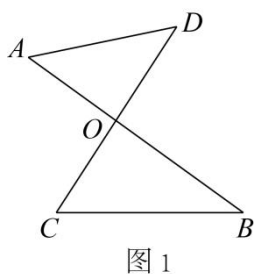
(2) 若 $\angle A = \alpha$ ，直线 MN 经过点 D 。

① 如图 2，若 $MN \parallel AB$ ，求 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

② 如图 3，若 MN 绕点 D 旋转，分别交线段 BC, AC 于点 M, N ，试问旋转过程中 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数是否会发生改变？若不变，求出 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数（用含 α 的代数式表示），若改变，请说明理由；

③ 如图 4，继续旋转直线 MN ，与线段 AC 交于点 N ，与 CB 的延长线交于点 M ，请直接写出 $\angle NDC$ 与 $\angle MDB$ 的关系（用含 α 的代数式表示）。

【变式 12-1】（2023 秋·河南漯河·七年级校考期中）（1）在图 1 中，请直接写出 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ 之间的数量关系；



(2) 如果图 2 中， $\angle D = 40^\circ, \angle B = 36^\circ$ ， AP 与 CP 分别是 $\angle DAB$ 和 $\angle DCB$ 的角平分线，试求 $\angle P$ 的度数；

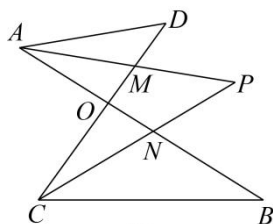
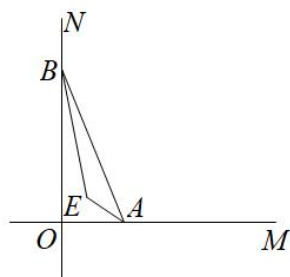


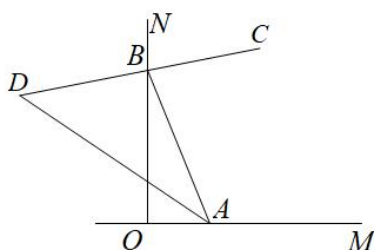
图 2

(3) 如果图 2 中 $\angle D$ 和 $\angle B$ 为任意角，其他条件不变，试问 $\angle P$ 与 $\angle D$ ， $\angle B$ 之间存在着怎样的数量关系（直接写出结论即可）。

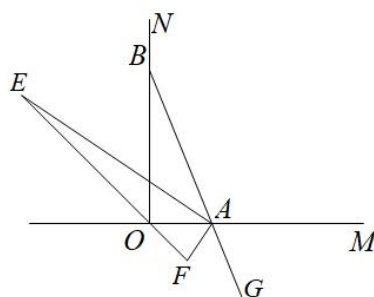
【变式 12-2】（2023 春·江苏扬州·七年级校联考期中） $\angle MON = 90^\circ$ ，点 A ， B 分别在 OM 、 ON 上运动（不与点 O 重合）。



图①



图②



图③

(1) 如图①， AE 、 BF 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的平分线，随着点 A 、点 B 的运动，当 $AO=BO$ 时 $\angle AEB =$ $^\circ$ ；

(2) 如图②，若 BC 是 $\angle ABN$ 的平分线， BC 的反向延长线与 $\angle OAB$ 的平分线交于点 D ，随着点 A ， B 的运动 $\angle D$ 的大小会变吗？如果不会，求 $\angle D$ 的度数；如果会，请说明理由；

(3) 如图③，延长 MO 至 Q ，延长 BA 至 G ，已知 $\angle BAO$ ， $\angle OAG$ 的平分线与 $\angle BOQ$ 的平分线及其延长线相交于点 E 、 F ，在 $\triangle AEF$ 中，如果有一个角是另一个角的 3 倍，求 $\angle ABO$ 的度数。

【变式 12-3】（2023 秋·安徽宣城·七年级校考期中）如图 1， $\angle MON = 90^\circ$ ，点 A 、 B 分别在 OM 、 ON 上运动（不与点 O 重合）。

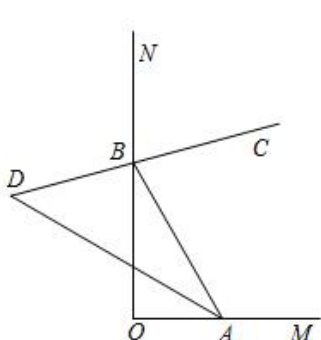


图1

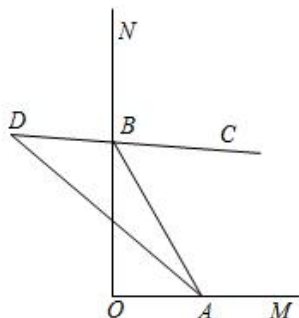


图2

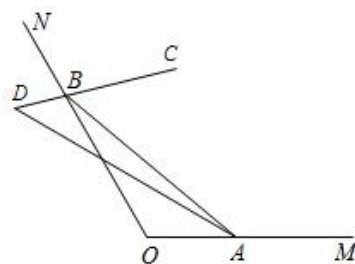


图3

(1) 若 BC 是 $\angle ABN$ 的平分线， BC 的反方向延长线与 $\angle BAO$ 的平分线交于点 D 。



润禾托管

①若 $\angle BAO = 60^\circ$ ，则 $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$ °；

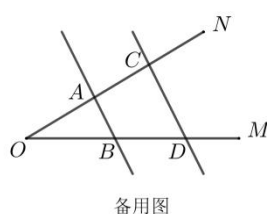
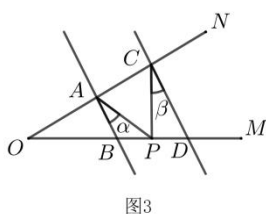
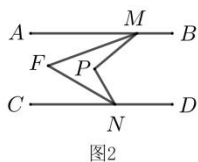
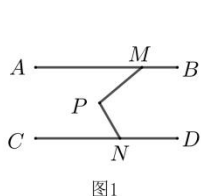
②猜想： $\angle D$ 的度数是否随 A, B 的移动发生变化？并说明理由。

(2)如图2，若 $\angle OAD = \frac{3}{5}\angle OAB$ ， $\angle NBC = \frac{3}{5}\angle NBA$ ，则 $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$ °；

(3)若将 $\angle MON = 90^\circ$ 改为 $\angle MON = 120^\circ$ （如图3）， $\angle OAD = \frac{m}{n}\angle OAB$ ， $\angle NBC = \frac{m}{n}\angle NBA$ ，其余条件不变，则 $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$ （用含 m, n 的代数式表示，其中 $m < n$ ）。

【题型 13 与平行线有关的三角形角的计算问题】

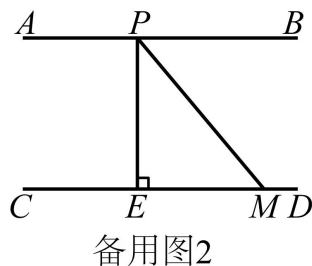
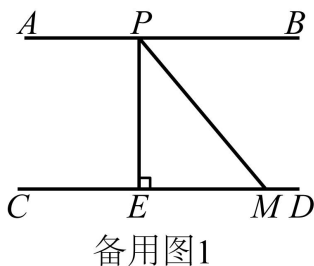
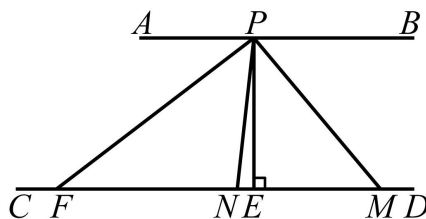
【例 13】(2023 春·辽宁盘锦·七年级统考期末)(1)问题情境：如图1， $AB \parallel CD$ ， $\angle PMB = 140^\circ$ ， $\angle PND = 120^\circ$ ，求 $\angle MPN$ 的度数；



(2)问题迁移：在(1)的条件下，如图2， $\angle AMP$ 的角平分线与 $\angle CNP$ 的角平分线交于点 F ，则 $\angle MFN$ 的度数为多少？请说明理由；

(3)问题拓展：如图3， $AB \parallel CD$ ，点 P 在射线 OM 上移动时（点 P 与点 O, M, D 三点不重合），记 $\angle PAB = \alpha$ ， $\angle PCD = \beta$ ，请直接写出 $\angle APC$ 与 α, β 之间的数量关系。

【变式 13-1】(2023 春·河北石家庄·七年级统考期末)如图， $AB \parallel CD$ ，点 P 在直线 AB 上，作 $\angle BPM = 50^\circ$ ，交 CD 于点 M ，点 F 是直线 CD 上的一个动点，连接 PF ， $PE \perp CD$ 于点 E ， PN 平分 $\angle MPF$ 。



(1)若点 F 在点 E 左侧且 $\angle PFM = 32^\circ$ ，求 $\angle NPE$ 的度数；

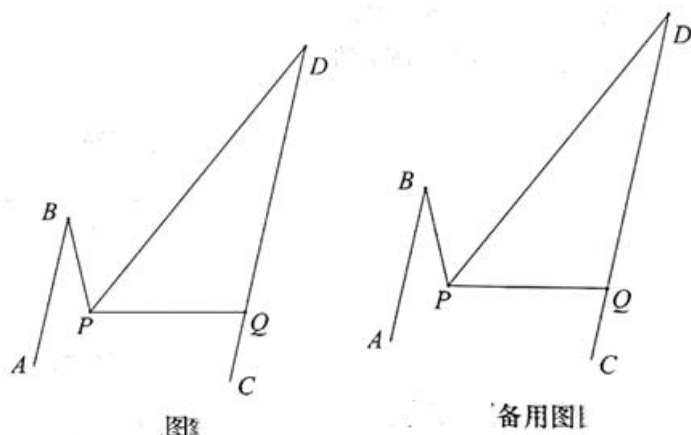
(2)当点 F 在线段 EM （不与点 M, E 重合）上时，设 $\angle PFM = \alpha^\circ$ ，直接写出 $\angle NPE$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

(3)将射线 PF 从(1)中的位置开始以每秒 10° 的速度绕点 P 逆时针旋转至 PM 的位置，转动的时间为 t 秒，求当 t 为何值时， $\triangle FPM$ 为直角三角形。



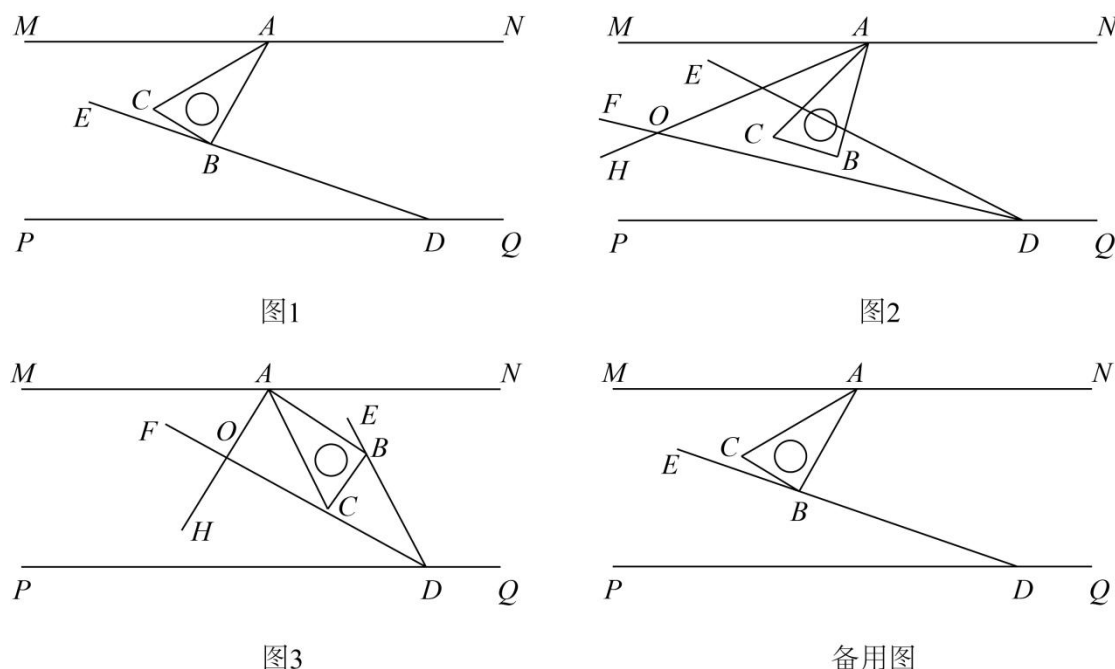
润禾托管

【变式 13-2】（2023 春·辽宁大连·七年级统考期中）如图， $AB \parallel CD$ ，点 O 在直线 CD 上，点 P 在直线 AB 和 CD 之间， $\angle ABP = \angle PDQ = \alpha$ ， PD 平分 $\angle BPQ$ 。



- (1) 求 $\angle BPD$ 的度数（用含 α 的式子表示）；
- (2) 过点 D 作 $DE \parallel PQ$ 交 PB 的延长线于点 E ，作 $\angle DEP$ 的平分线 EF 交 PD 于点 F ，请在备用图中补全图形，猜想 EF 与 PD 的位置关系，并证明；
- (3) 将 (2) 中的“作 $\angle DEP$ 的平分线 EF 交 PD 于点 F ”改为“作射线 EF 将 $\angle DEP$ 分为 $1:3$ 两个部分，交 PD 于点 F ”，其余条件不变，连接 EQ ，若 EQ 恰好平分 $\angle PQD$ ，请直接写出 $\angle FEQ =$ _____（用含 α 的式子表示）。

【变式 13-3】（2023 春·湖北省直辖县级单位·七年级校考期中）已知 $MN \parallel PQ$ ，点 D 是直线 PQ 上一定点。



- (1) 如图 1，现有一块含 30° 角的直角三角板（ $\angle CAB = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ），将其点 A 固定在直线 MN 上，并按图 1 位置摆放，使 $\angle MAC = 30^\circ$ ，点 B 恰好落在射线 DE 上，此时， $\angle PDE = 20^\circ$ ，求 $\angle ABD$



润禾托管

的度数：

(2)现将射线 DE 从图1的位置开始以每秒2度的速度绕点 D 顺时针旋转，转到与 DQ 重合时停止，三角板按图1摆放不动，设旋转时间为 t 秒，在旋转过程中，当 DE 与三角板的一边平行时，求 t 的值；

(3)若将射线 DE 从图1的位置开始以每秒2度的速度绕点 D 顺时针旋转，同时，将三角板 ABC 也从图1的位置开始以每秒4度的速度绕点 A 逆时针旋转，在旋转过程中， $\angle MAC$ 的角平分线 AH 与 $\angle PDE$ 的角平分线 DF 交于点 O 。

①如图2，当 $DF \parallel BC$ 时， $\angle AOD =$ _____度；

②如图3，当 $DF \parallel BA$ 时， $\angle AOD =$ _____度。

【题型14 与折叠有关的三角形角的计算问题】

【例14】（2023秋·山东临沂·七年级统考期末）有一张正方形纸片 $ABCD$ ，点 E 是边 AB 上一定点，在边 AD 上取点 F ，沿着 EF 折叠，点 A 落在点 A' 处，在边 BC 上取一点 G ，沿 EG 折叠，点 B 落在点 B' 处。

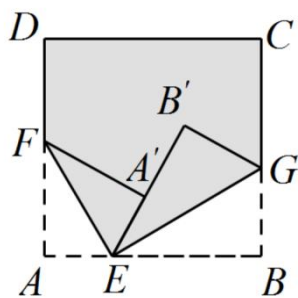
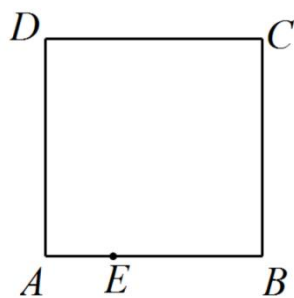


图1



备用图

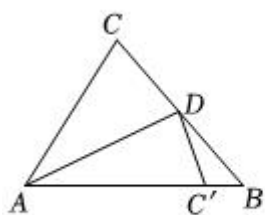
(1)如图1，当点 B 落在直线 $A'E$ 上时，猜想两折痕的夹角 $\angle FEG$ 的度数并说明理由。

(2)当 $\angle A'EB' = \frac{1}{3} \angle B'EB$ 时，设 $\angle A'EB' = x$ 。

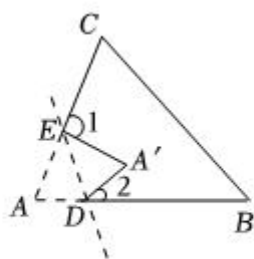
①试用含 x 的代数式表示 $\angle FEG$ 的度数。

②探究 EB' 是否可能平分 $\angle FEG$ ，若可能，求出此时 $\angle FEG$ 的度数；若不可能，请说明理由。

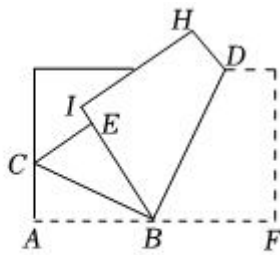
【变式14-1】（2023春·河北石家庄·七年级统考期末）（1）如图1，将一张三角形纸片 ABC 沿着 AD 折叠，使点 C 落在边 AB 上的 C' 处，若 $\angle CAB = 70^\circ$ ，则 $\angle CAD =$ _____°；



(图1)



(图2)



(图3)



润禾托管

(2)如图2,将一张三角形纸片 ABC 沿着 DE 折叠(点 D, E 分别在边 AB 和 AC 上),并使得点 A 和点 A' 重合,若 $\angle A = 70^\circ$,则 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____ $^\circ$;

(3)如图3,将长方形纸片沿着 BC 和 BD 折叠成如图所示的形状, BE 和 BI 重合,

① $\angle CBD$ 的度数是多少?请说明理由;

②如果 $\angle IBD = 58^\circ 17'$,求 $\angle ABC$ 的度数.

【变式 14-2】(2023 秋·江西南昌·七年级校联考期末)我们在小学已经学习了“三角形内角和等于 180° ”.在三角形纸片中,点 D, E 分别在边 AC, BC 上,将 $\angle C$ 沿 DE 折叠,点 C 落在点 C' 的位置.

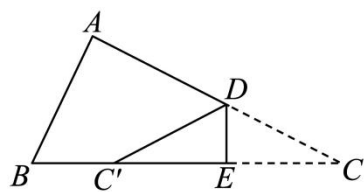


图1

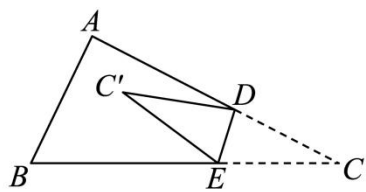


图2

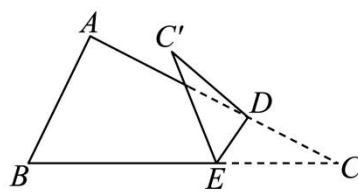


图3

(1)如图1,当点 C 落在边 BC 上时,若 $\angle ADC' = 58^\circ$,则 $\angle C =$ _____,可以发现 $\angle ADC'$ 与 $\angle C$ 的数量关系是_;

(2)如图2,当点 C 落在 $\triangle ABC$ 内部时,且 $\angle BEC' = 42^\circ$, $\angle ADC' = 20^\circ$,求 $\angle C$ 的度数;

(3)如图3,当点 C 落在 $\triangle ABC$ 外部时,若设 $\angle BEC'$ 的度数为 x , $\angle ADC'$ 的度数为 y ,请求出 $\angle C$ 与 x, y 之间的数量关系.

【变式 14-3】(2023 春·江苏·七年级统考期中)将一张三角形纸片 ABC 的一角折叠,使得点 A 落 A' 的位置,折痕为 DE .

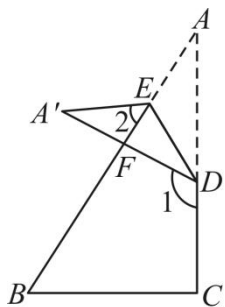


图1

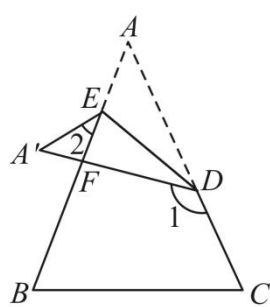


图2

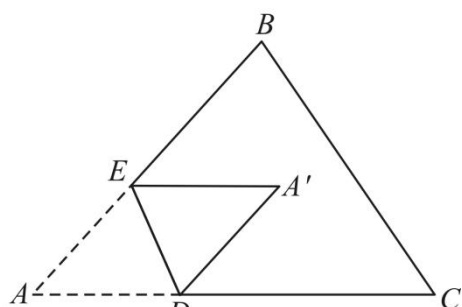


图3

(1)当点 A 落在四边形 $BCDE$ 的外部 A' 的位置且 A' 与点 C 在直线 AB 的两侧.

①如图1,若 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,求 $\angle 1 - \angle 2$ 的度数;

②如图2,请写出 $\angle 1, \angle 2$ 和 $\angle A$ 的关系并证明;

(2)如图3,有一张三角形纸片 ABC , $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$,若点 E 是 AB 边上的固定点($AE < \frac{1}{2}AB$),请在 AC 上找一点 D ,将纸片沿 DE 折叠, DE 为折痕点 A 落在 A' 处,使 $A'D$ 与三角形 ABC 的其中一边平行,求 $\angle AED$ 的



润禾托管

度数.