



专题 9.3 因式分解【九大题型】

【苏科版】

▶ 题型梳理

【题型 1 利用因式分解求值】	2
【题型 2 因式分解在有理数简算中的应用】	2
【题型 3 利用因式分解确定整除问题】	2
【题型 4 利用添项进行因式分解】	3
【题型 5 利用拆项进行因式分解】	5
【题型 6 利用因式分解确定三角形的形状】	6
【题型 7 利用因式分解求最值】	6
【题型 8 因式分解在新定义问题中的运用】	7
【题型 9 因式分解在阅读理解中的运用】	8

▶ 举一反三

【知识点 因式分解】

定义：把一个多项式化成了几个整式的积的形式，这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

以上公式都可以用来对多项式进行因式分解，因式分解的常用方法：

①提公因式法： $pa+pb+pc=p(a+b+c)$ ；

②公式法： $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ； $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ； $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 。

③分组分解法： $ac+ad+bc+cd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$

④十字相乘法： $a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$

因式分解的一般步骤：

(1) 如果多项式的各项有公因式，那么先提取公因式。

(2) 在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：2 项式可以尝试运用公式法分解因式；3 项式可以尝试运用公式法、十字相乘法分解因式；4 项式及 4 项式以上的可以尝试分组分解法分解因式

(3) 分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止。



【题型 1 利用因式分解求值】

【例 1】（2023 春·安徽合肥·七年级统考期末）将 $(2x)^n - 81$ 因式分解后得 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$ ，那么 n 等于（ ）

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【变式 1-1】（2023 春·上海闵行·七年级上海市民办文绮中学校考期中）把多项式 $x^3 + ax$ 分解因式得 $x(x - \frac{1}{2})(x + b)$ ，求 a 、 b 的值.

【变式 1-2】（2023 春·七年级单元测试）已知三次四项式 $2x^3 - 5x^2 - 6x + k$ 分解因式后有一个因式是 $x - 3$ ，试求 k 的值及另一个因式.

【变式 1-3】（2023 春·七年级单元测试）若 $2x^2 - 6y^2 + xy + kx + 6$ 能分解成两个一次因式的积，则整数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【题型 2 因式分解在有理数简算中的应用】

【例 2】（2023 春·七年级课时练习）利用因式分解计算：

- (1) $(-2)^{101} + (-2)^{100}$;
 (2) $3^{2021} - 3^{2020}$;
 (3) $121 \times 0.13 + 12.1 \times 0.9 - 12 \times 1.21$;
 (4) $202^2 + 98^2 + 202 \times 196$.

【变式 2-1】（2023 春·全国·七年级专题练习）计算： $2020 \times 51^2 - 2020 \times 49^2$ 的结果是_____.

【变式 2-2】（2023 春·七年级单元测试）计算：（1） $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{9^2}) \times (1 - \frac{1}{10^2})$;

（2） $2021^2 - 2021 \times 4040 + 2020^2$

【变式 2-3】（2023 春·七年级单元测试）利用因式分解计算：

- (1) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$
 (2) $1 + 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \cdot \dots \cdot (5^{32} + 1)$
 (3) $\frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+2})}$

【题型 3 利用因式分解确定整除问题】

【例 3】（2023 春·全国·七年级专题练习）某兴趣小组为探究被 3 整除的数的规律，提出了以下问题：

- (1) 在 312, 465, 522, 458 中不能被 3 整除的数是_____;
- (2) 一个三位数 $\overline{abc}$ 表示百位、十位、个位上的数字分别是 a 、 b 、 c (a, b, c 为 0—9 之间的整数，且 $a \neq 0$)，



那么 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. 若 $a + b + c$ 是 3 的倍数 (设 $a + b + c = 3t$, t 为正整数), 那么 $\overline{abc}$ 能被 3 整除吗? 如果能, 请证明; 如果不能, 请说明理由.

(3) 若一个能被 3 整除的两位正整数 $\overline{ab}$ (a, b 为 1—9 之间的整数), 交换其个位上的数字与十位上的数字得到一个新数, 新数减去原数等于 54, 求这个正整数 $\overline{ab}$.

【变式 3-1】(2023 春·辽宁沈阳·七年级统考期末) 利用因式分解说明: 当 n 为自然数时, $(n+7)^2 - (n-5)^2$ 能被 24 整除.

【变式 3-2】(2023 春·湖南永州·七年级校联考期中) 已知 $4^{32} - 1$ 可以被 10 到 20 之间的某两个整数整除, 则这两个数是 ()

- A. 12, 14 B. 13, 15 C. 14, 16 D. 15, 17

【变式 3-3】(2023·河北衡水·统考三模) 某数学兴趣小组研究如下等式:

$$38 \times 32 = 1216,$$

$$53 \times 57 = 3021,$$

$$71 \times 79 = 5609,$$

$$84 \times 86 = 7224.$$

观察发现以上等式均是“十位数字相同, 个位数字之和是 10 的两个两位数相乘, 且积有一定的规律”.

(1) 根据上述的运算规律, 直接写出结果: $58 \times 52 =$ _____; $75^2 =$ _____.

(2) 设其中一个数的十位数字为 a , 个位数字为 b ($a, b > 0$),

① 请用含 a, b 的等式表示这个运算规律, 并用所学的数学知识证明;

② 上述等式中, 分别将左边两个乘数的十位和个位调换位置, 得到新的两个两位数相乘 (如: 38×32 调换为 83×23). 若分别记新的两个两位数的乘积为 m , ① 中的运算结果为 n , 求证: $m - n$ 能被 99 整除.

【题型 4 利用添项进行因式分解】

【例 4】(2023 春·陕西榆林·七年级统考期末) 19 世纪的法国数学家苏菲·热门给出了一种分解因式 $x^4 + 4$ 的方法: 他抓住了该式只有两项, 而且属于平方和 $(x^2)^2 + 2^2$ 的形式, 要使用公式就必须添一项 $4x^2$, 随即将此项 $4x^2$ 减去, 即可得 $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, 人们为了纪念苏菲·热门给出这一解法, 就把它叫做“热门定理”.

根据以上方法, 把下列各式因式分解:

(1) $4x^4 + y^4$;

(2) $a^2 - 4am - n^2 + 4mn$.



【变式 4-1】(2023 春·广东佛山·七年级专题练习)添项、拆项是因式分解中常用的方法,比如分解多项式 $a^2 - 1$ 可以用如下方法分解因式:

$$\textcircled{1} a^2 - 1 = a^2 - a + a - 1 = a(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(a + 1);$$

又比如多项式 $a^3 - 1$ 可以这样分解:

$$\textcircled{2} a^3 - 1 = a^3 - a^2 + a^2 - a + a - 1 = a^2(a - 1) + a(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1);$$

仿照以上方法,分解多项式 $a^5 - 1$ 的结果是_____.

【变式 4-2】(2023 春·湖南常德·七年级统考期中) **阅读与思考**

在因式分解中,有些多项式看似不能分解,如果添加某项,可以达到因式分解的效果,此类因式分解的方法称之为“添项法”.

例如: $a^4 + 4 = a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$.

参照上述方法,我们可以对 $a^3 + b^3$ 因式分解,下面是因式分解的部分解答过程.

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = (a^3 + a^2b) - (a^2b - b^3) = (a + b) \cdot a^2 - (a + b) \cdot b(a - b) = \dots$$

任务:

(1)请根据以上阅读材料补充完整对 $a^3 + b^3$ 因式分解的过程.

(2)已知 $a + b = 2$, $ab = -4$, 求 $a^3 + b^3$ 的值.

【变式 4-3】(2023·重庆九龙坡·重庆市育才中学校考三模) 阅读理解:

添项法是代数变形中非常重要的一种方法,在整式运算和因式分解中使用添项法往往会起到意想不到的作用,例如:

例 1: 计算 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{2}(3 - 1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^2 - 1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^4 - 1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$

.....

$$= \frac{3^{64} - 1}{2}$$

例 2: 因式分解: $x^4 + x^2 + 1$



解：原式 $=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$$=(x^2+1)^2-x^2$$

$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

根据材料解决下列问题：

(1)计算： $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdots(1+\frac{1}{2^{512}})$ ；

(2)小明在作业中遇到了这样一个问题，计算 $\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}$ ，通过思考，他发现计算式中的式子可以用代数式 x^4+4 来表示，所以他决定先对 x^4+4 先进行因式分解，最后果然发现了规律；轻松解决了这个计算问题.请你根据小明的思路解答下列问题：

①分解因式： x^4+4 ；

②计算： $\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}$.

【题型 5 利用拆项进行因式分解】

【例 5】（2023 春·七年级课时练习）阅读理解，并解答下面的问题：

拆项法原理：在多项式乘法运算中，常经过整理、化简，通常将几个同类项合并为一项，或相互抵消为零.反过来，在对某些多项式分解因式时，需要恢复那些被合并或相互抵消的项，即把多项式中的某一项拆成两项或多项（拆项）.

例：分解因式： x^2+4x+3

解：原式 $=x^2+x+3x+3$ 把 $4x$ 分成 x 和 $3x$ ，

$$=(x^2+x)+(3x+3) \text{ 将原式分成两组}$$

$$=x(x+1)+3(x+1) \text{ 对每一组分别提取公因式}$$

$$=(x+3)(x+1) \text{ 继续提公因式}$$

请类比上面的示例，分解因式： x^2+5x+6

【变式 5-1】（2023 春·黑龙江鸡西·七年级校考期末）利用拆项法，分解因式： x^2-6x-7 ；

【变式 5-2】（2023 春·陕西榆林·七年级统考期末）利用拆项法，解决下列问题：

(1)分解因式： x^2-6x+5 ；

(2)分解因式： $a^2+4ab-5b^2$.

【变式 5-3】（2023 春·七年级单元测试）阅读理解题：

拆项法是因式分解中一种技巧较强的方法，它通常是把多项式中的某一项拆成几项，再分组分解，因而有



时需要多次实验才能成功，例如把 $x^3 - 3x^2 + 4$ 分解因式，这是一个三项式，最高次项是三次项，一次项系数为零，本题既没有公因式可提取，又不能直接应用公式，因而考虑制造分组分解的条件，把常数项拆成1和3，原式就变成 $(x^3 + 1) - (3x^2 - 3)$ ，再利用立方和与平方差先分解，解法如下：

$$\text{原式} = x^3 + 1 - (3x^2 - 3) = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3(x + 1)(x - 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = (x + 1)(x - 2)^2$$

$$\text{公式：} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

根据上述论法和解法，

(1) 因式分解： $x^3 + x^2 - 2$ ；

(2) 因式分解： $x^3 - 7x + 6$ ；

(3) 因式分解： $x^4 + x^2 + 1$.

【题型6 利用因式分解确定三角形的形状】

【例6】(2023春·全国·七年级专题练习) 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边，且满足 $a^2c^2 - b^2c^2 = a^4 - b^4$ ，则 $\triangle ABC$ 为_____三角形.

【变式6-1】(2023春·河南郑州·七年级校联考期中) 若 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足 $a^2 - ab - ac + bc = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

【变式6-2】(2023春·全国·七年级专题练习) 已知： a, b, c 是三角形的三边，且满足 $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ，求证：这个三角形是等边三角形.

【变式6-3】(2023春·七年级统考课时练习) 已知等腰三角形 ABC 的三边长 a, b, c 均为整数，且满足 $a + bc + b + ca = 24$ ，则这样的三角形共有_____个.

【题型7 利用因式分解求最值】

【例7】(2023春·湖南株洲·七年级株洲二中校考期末) 整数 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边($a < b < c$)，若 $\triangle ABC$ 的周长为30，那么 $c^2 + 18a + 18b - 446$ 的最小值为_____.

【变式7-1】(2023春·辽宁阜新·七年级校考阶段练习) 利用完全平方公式因式分解在数学中的应用，请回答下列问题：

(1) 因式分解： $x^2 - 4x + 4 =$ _____.

(2) 填空：当 $x =$ _____时，代数式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ；

(3) 阅读如下材料，完成下列问题：

对于二次三项式求最值问题，有如下示例：



$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3 = (x - 1)^2 + 2.$$

因为 $(x - 1)^2 \geq 0$ ，所以 $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$ ，所以当 $x = 1$ 时，原式的最小值为2.

①代数式 $x^2 + 10x + 2$ 的最小值是_____；

②拓展与应用：求代数式 $a^2 + b^2 - 4a - 6b + 15$ 的最小值（模仿示例详细说明）.

【变式 7-2】（2023 春·七年级课时练习）已知 A 为多项式，且 $A = -2x^2 - y^2 + 12x + 4y + 1$ ，则 A 有（ ）

- A. 最大值 23 B. 最小值 23 C. 最大值-23 D. 最小值-23

【变式 7-3】（2023·安徽亳州·七年级专题练习）求 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 4y + 10$ 的最小值_____.

【题型 8 因式分解在新定义问题中的运用】

【例 8】（2023 春·全国·七年级期末）整式乘法与多项式因式分解是既有联系又有区别的两种变形.

例如， $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ 是单项式乘多项式的法则；把这个法则反过来，得到 $ab + ac + ad = a(b + c + d)$ ，这是运用提取公因式法把多项式因式分解.

又如 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 、 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 是多项式的乘法公式；把这些公式反过来，得到 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 、 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，这是运用公式法把多项式因式分解.

有时在进行因式分解时，以上方法不能直接运用，观察甲、乙两名同学的进行的因式分解.

$$\text{甲：} x^2 - xy + 4x - 4y$$

$$= (x^2 - xy) + (4x - 4y) \text{（分成两组）}$$

$$= x(x - y) + 4(x - y) \text{（分别提公因式）}$$

$$= (x - y)(x + 4)$$

$$\text{乙：} a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) \text{（分成两组）}$$

$$= a^2 - (b - c)^2 \text{（运用公式）}$$

$$= (a + b - c)(a - b + c)$$

请你在他们解法的启发下，完成下面的因式分解

问题一：因式分解：

$$(1) m^3 - 2m^2 - 4m + 8;$$

$$(2) x^2 - 2xy + y^2 - 9.$$

问题二：探究

对 x 、 y 定义一种新运算 F ，规定： $F(x, y) = (mx + ny)(3x - y)$ （其中 m ， n 均为非零常数）. 当 $x^2 \neq y^2$ 时，



$F(x, y) = F(y, x)$ 对任意有理数 x, y 都成立, 试探究 m, n 的数量关系.

【变式 8-1】定义: 任意两个数 a, b , 按规则 $c = ab + a + b$ 扩充得到一个新数 c , 称所得的新数 c 为“如意数”.

(1) 若 $a = 2, b = -1$, 直接写出 a, b 的“如意数” c ;

(2) 如果 $a = m - 4, b = -m$, 求 a, b 的“如意数” c , 并证明“如意数” $c \leq 0$;

(3) 已知 $a = x^2 (x \neq 0)$, 且 a, b 的“如意数”为 $c = x^4 + 4x^2 + 2$, 请用含 x 的式子表示 b .

【变式 8-2】(2023 春·河南周口·七年级校考期末) 设 m, n 是实数, 定义一种新运算: $m \otimes n = (m - n)^2$. 下面四个推断正确的是 ()

A. $m \otimes n = n \otimes m$

B. $(m \otimes n)^2 = m^2 \otimes n^2$

C. $(m \otimes n) \otimes p = m \otimes (n \otimes p)$

D. $m \otimes (n - p) = (m \otimes n) - (m \otimes p)$

【变式 8-3】(2023 春·江苏·七年级期末) 定义: 若一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是正整数) 的形式, 则称这个数为“完美数”.

例如: 因为 $13 = 3^2 + 2^2$, 所以 13 是“完美数”;

再如: 因为 $a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2$, 所以 $a^2 + 2ab + 2b^2$ 也是“完美数”.

(1) 请直接写出一个小于 10 的“完美数”, 这个“完美数”是_____;

(2) 判断 53_____ (请填写“是”或“否”) 为“完美数”;

(3) 已知 $M = x^2 + 4x + k$ (x 是整数, k 是常数), 要使 M 为“完美数”, 试求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由;

(4) 如果数 m, n 都是“完美数”, 试说明 mn 也是“完美数”.

【题型 9 因式分解在阅读理解中的运用】

【例 9】(2023 春·七年级统考期末)(2023 春·陕西榆林·七年级统考期末) 阅读下列材料: 将一个形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式因式分解时, 如果能满足 $q = mn$ 且 $p = m + n$, 则可以把 $x^2 + px + q$ 因式分解成 $(x + m)(x + n)$.

例如: (1) $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$; (2) $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$.

根据材料, 把下列式子进行因式分解.

(1) $x^2 - 6x + 8$;

(2) $x^2 - 2x - 15$;

(3) $(x - 4)(x + 7) + 18$.

【变式 9-1】(2023 春·湖南湘潭·七年级统考期末) 材料 1: 由多项式乘法, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$,



将该式子从右到左使用，即可对形如 $x^2 + (a+b)x + ab$ 的多项式进行因式分解： $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 。多项式 $x^2 + (a+b)x + ab$ 的特征是二次项系数为1，常数项为某两数之积，一次项系数为这两数之和。

材料2：因式分解： $(x+y)^2 + 2(x+y) + 1$ ，将“ $x+y$ ”看成一个整体，令 $x+y=A$ ，则原式 $=A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$ ，再将“ A ”还原得：原式 $= (x+y+1)^2$ 。

上述用到整体思想，整体思想是数学解题中常见的一种思想方法。

请你根据以上阅读材料解答下列问题：

(1)根据材料1将 $x^2 + 8x + 7$ 因式分解；

(2)根据材料2将 $(x-y)^2 - 12(x-y) + 36$ 因式分解；

(3)结合材料1和材料2，将 $(m^2 - 4m)(m^2 - 4m + 2) - 8$ 因式分解。

【变式9-2】（2023春·全国·七年级期末）阅读材料：利用公式法，可以将一些形如 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的多项式变形为 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的配方法，运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解。例如：

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{4}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5 \\ &= (x+2)^2 - 9 \\ &= (x+2+3)(x+2-3) \\ &= (x+5)(x-1) \end{aligned}$$

即： $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$ 。

根据以上材料，解答下列问题：

(1)把下列多项式因式分解：

① $x^2 + 2x - 8$ ；

② $x^2 - 3x - 18$ ；

(2)已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【变式9-3】（2023春·浙江宁波·七年级统考期末）[阅读材料]分解因式： $x^2 + x - 2$ 。

解：把 $x=1$ 代入 $x^2 + x - 2$ ，发现此多项式的值为0，由此确定 $x^2 + x - 2$ 中有因式 $x-1$ ，可设 $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+m)$ （ m 为常数），通过展开多项式或代入合适的 x 的值即可求出 m 的值。我们把这种分解因式的方法叫“试根法”。

根据以上阅读材料，完成下列问题：

(1)请完成下列因式分解：



$$x^2 + x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 2x^2 - 5x - 7 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2)请你用“试根法”分解因式： $x^3 + 3x^2 - 4$;

(3)①若多项式 $x^2 + mx - n$ (m, n 为常数) 分解因式后, 有一个因式是 $(x - 2)$, 求代数式 $\frac{9^m}{3^n}$ 的值;

②若多项式 $x^4 + mx^3 + nx - 16$ 含有因式 $(x - 2)$ 和 $(x + 1)$, 求 mn 的值.