



专题 9.2 乘法公式【十大题型】

【苏科版】

▶ 题型梳理

【题型 1 判断运用乘法公式计算的正误】	1
【题型 2 利用完全平方式确定系数】	3
【题型 3 乘法公式的计算】	5
【题型 4 利用乘法公式求值】	8
【题型 5 利用面积法验证乘法公式】	10
【题型 6 乘法公式的应用】	14
【题型 7 平方差公式的几何背景】	18
【题型 8 完全平方公式的几何背景】	23
【题型 9 乘法公式中的新定义问题】	30
【题型 10 乘法公式的规律探究】	33

▶ 举一反三

【知识点 乘法公式】

平方差公式: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。两个数的和与这两个数的差的积, 等于这两个数的平方差。这个公式叫做平方差公式。

完全平方公式: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。两个数的和(或差)的平方, 等于它们的平方和, 加上(或减去)它们积的 2 倍。这两个公式叫做完全平方公式。

【题型 1 判断运用乘法公式计算的正误】

【例 1】(2023 春·贵州毕节·七年级统考期末) 计算 $(x-y+3)(x+y-3)$ 时, 下列变形正确的是 ()

- A. $[(x-y)+3][(x+y)-3]$ B. $[(x+3)-y][(x-3)+y]$
C. $[x-(y+3)][x+(y-3)]$ D. $[x-(y-3)][x+(y-3)]$

【答案】D

【分析】将 $(y-3)$ 看做一个整体, 则 x 是相同项, 互为相反项的是 $(y-3)$, 对照平方差公式变形即可求解。【详解】解: $(x-y+3)(x+y-3)=[x-(y-3)][x+(y-3)]$,

故选: D.

【点睛】本题考查了平方差公式, 解题的关键是找出相同项和相反项。



【变式 1-1】（2023 春·浙江杭州·七年级校考期中）下列运算正确的是（ ）

A. $(x+y)(-y+x) = x^2 - y^2$

B. $(-x+y)^2 = -x^2 + 2xy + y^2$

C. $(-x-y)^2 = -x^2 - 2xy - y^2$

D. $(x+y)(y-x) = x^2 - y^2$

【答案】A

【分析】根据平方差公式和完全平方公式，逐个进行判断即可。

【详解】解：A、 $(x+y)(-y+x) = x^2 - y^2$ ，故 A 正确，符合题意；

B、 $(-x+y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ，故 B 不正确，不符合题意；

C、 $(-x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ，故 C 不正确，不符合题意；

D、 $(x+y)(y-x) = y^2 - x^2$ ，故 D 不正确，不符合题意；

故选：A。

【点睛】本题主要考查根据平方差公式和完全平方公式，解题的关键是掌握平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 和完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 。

【变式 1-2】（2023 春·天津滨海新区·七年级统考期末）在下列多项式的乘法中，不可以用平方差公式计算的是（ ）

A. $(x+y)(x-y)$

B. $(-x+y)(x+y)$

C. $(-x-y)(-x+y)$

D. $(x-y)(-x+y)$

【答案】D

【分析】根据平方差公式是两个数的和与这两个数的差相乘等于这两个数的平方差，由此进行判断即可。

【详解】A、B、C 选项都是两个数的和与这两个数的差相乘，可以使用平方差公式，

D 选项变形后为 $-(x-y)^2$ ，不能使用平方差公式；

故选：D。

【点睛】此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式是解本题的关键。

【变式 1-3】（2023 春·广东茂名·七年级统考期中）下列多项式不是完全平方式的是（ ）。

A. $x^2 - 4x - 4$

B. $\frac{1}{4}m^2 + m$

C. $a^2 + 2ab + b^2$

D. $t^2 + 4t + 4$

【答案】A

【分析】根据 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的形式判断即可；

【详解】 $x^2 - 4x - 4$ 不是完全平方公式，故 A 符合题意；



$\frac{1}{4} + m^2 + m = \left(\frac{1}{2} + m\right)^2$, 故 B 不符合题意;

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, 故 C 不符合题意;

$t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2$, 故 D 不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题主要考查了完全平方公式的判断, 准确分析是解题的关键.

【题型 2 利用完全平方方式确定系数】

【例 2】(2023 春·江苏扬州·七年级统考期末) 若将多项式 $4a^2 - 2a + 1$ 加上一个单项式成为一个完全平方式, 则这个单项式可以是_____。(只要写出符合条件的一个)

【答案】 $-2a$, $6a$, $-\frac{3}{4}$, $-3a^2$.

【分析】根据完全平方公式的特点分情况讨论: 若把 $4a^2$ 和 1 看成两个平方项, 则该完全平方式可以是: 是 $(2a - 1)^2$ 或 $(2a + 1)^2$; ②若把 $4a^2$ 看成一个平方项, 把 $-2a$ 看成二倍两项积, 则该完全平方式可以是 $(2a - \frac{1}{2})^2$; ③若把 1 看成一个平方项, 把 $-2a$ 看成二倍两项积, 则该完全平方式可以是 $(a - 1)^2$. 分别算出所需添加的单项式即可.

【详解】①若把 $4a^2$ 和 1 看成两个平方项, 则该完全平方式可以是 $(2a - 1)^2$ 或 $(2a + 1)^2$,

$$\because (2a - 1)^2 = 4a^2 - 4a + 1 = 4a^2 - 2a + 1 + (-2a),$$

$\therefore$ 这个单项式可以是 $-2a$;

$$\because (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4a^2 - 2a + 1 + 6a,$$

$\therefore$ 这个单项式可以是 $6a$;

②若把 $4a^2$ 成一个平方项, 把 $-2a$ 看成二倍两项积, 则该完全平方式可以是 $(2a - \frac{1}{2})^2$,

$$\because (2a - \frac{1}{2})^2 = 4a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 4a^2 - 2a + 1 + (-\frac{3}{4}),$$

$\therefore$ 这个单项式可以是 $-\frac{3}{4}$;

③若把 1 成一个平方项, 把 $-2a$ 看成二倍两项积, 则该完全平方式可以是 $(a - 1)^2$,

$$\because (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 = 4a^2 - 2a + 1 + (-3a^2),$$

$\therefore$ 这个单项式可以是 $-3a^2$.

综上, 添加的这个单项式可以是 $-2a$, $6a$, $-\frac{3}{4}$, $-3a^2$.



故答案为： $-2a$ ， $6a$ ， $-\frac{3}{4}$ ， $-3a^2$ 。

【点睛】本题主要考查了完全平方公式，熟练掌握完全平方公式的特点，进行分类讨论是解题的关键。

【变式 2-1】（2023 春·四川达州·七年级校考期中）若 $x^2 + 2(m-3)x + 1$ 是完全平方式， $x+n$ 与 $x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，则 n^m 的值为_____。

【答案】4 或 16

【分析】利用完全平方公式，以及多项式乘以多项式法则确定出 m 与 n 的值，代入原式计算即可求出值。

【详解】解：∵ $x^2 + 2(m-3)x + 1$ 是完全平方式，

$$\therefore m-3 = \pm 1,$$

$$\therefore m = 4 \text{ 或 } m = 2,$$

$$\because x+n \text{ 与 } x+2 \text{ 的乘积中不含 } x \text{ 的一次项, } (x+n)(x+2) = x^2 + (n+2)x + 2n,$$

$$\therefore n+2 = 0,$$

$$\therefore n = -2,$$

$$\text{当 } m = 4, n = -2 \text{ 时, } n^m = (-2)^4 = 16;$$

$$\text{当 } m = 2, n = -2 \text{ 时, } n^m = (-2)^2 = 4,$$

$$\text{则 } n^m = 4 \text{ 或 } 16,$$

故答案为：4 或 16。

【点睛】本题考查了完全平方式，以及多项式乘多项式，熟练掌握公式及法则是解本题的关键。

【变式 2-2】（2023 春·七年级课时练习）若 $9x^2 - (k-1)xy + 25y^2$ 是关于 x 的完全平方式，则 $k =$ _____。

【答案】31 或 -29 / -29 或 31

【分析】由 $9x^2 - (k-1)xy + 25y^2$ 是关于 x 的完全平方式，得出 $9x^2 - (k-1)xy + 25y^2 = (3x \pm 5y)^2$ ，进而得出 $-(k-1) = \pm 30$ ，即可求出 k 的值。

【详解】解：∵ $9x^2 - (k-1)xy + 25y^2$ 是关于 x 的完全平方式，

$$\therefore 9x^2 - (k-1)xy + 25y^2 = (3x \pm 5y)^2,$$

$$\therefore -(k-1) = \pm 30,$$

$$\text{解得: } k = 31 \text{ 或 } -29,$$

故答案为：31 或 -29

【点睛】本题考查了完全平方式，掌握完全平方式的特点，考虑两种情况是解决问题的关键。



【变式 2-3】(2023 春·福建泉州·七年级晋江市季延中学校考期中)已知 B 是含字母 x 的单项式,要使 $x^2 + B + \frac{1}{4}$ 是完全平方式,那么 $B =$ _____.

【答案】 $\pm x$ 或 x^4 .

【分析】分类讨论: ①当 $x^2 + B + \frac{1}{4}$ 是完全平方式时和当 $B + x^2 + \frac{1}{4}$ 是完全平方式时, 再根据完全平方式的特点即可得出答案.

【详解】解: 分类讨论: ①当 $x^2 + B + \frac{1}{4}$ 是完全平方式时.

$$\because x^2 + B + \frac{1}{4} = x^2 + B + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\therefore B = \pm 2 \times x \times \frac{1}{2} = \pm x;$$

②当 $B + x^2 + \frac{1}{4}$ 是完全平方式时.

$$\because B + x^2 + \frac{1}{4} = B + 2 \times x^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\therefore B = x^4.$$

综上所述, $B = \pm x$ 或 x^4 .

故答案为: $\pm x$ 或 x^4 .

【点睛】本题考查完全平方式. 掌握完全平方式的结构特征和利用分类讨论的思想是解题关键.

【题型 3 乘法公式的计算】

【例 3】(2023 春·云南昭通·七年级校考期末)计算:

(1) $(2m - n + 3p)(2m + 3p + n)$;

(2) 化简求值: $(x - 3)(x + 3) - (x^2 - 2x + 1)$, 其中 $x = \frac{1}{2}$.

【答案】(1) $4m^2 + 12mp + 9p^2 - n^2$

(2) $2x - 10, -9$

【分析】(1) 先把原式化为 $[(2m + 3p) - n][(2m + 3p) + n]$, 再利用平方差公式和完全平方公式计算即可;

(2) 先利用平方差公式和去括号法则展开, 再合并同类项, 最后求值即可.

【详解】(1) 解: 原式 = $[(2m + 3p) - n][(2m + 3p) + n]$

$$= (2m + 3p)^2 - n^2$$



$$= 4m^2 + 12mp + 9p^2 - n^2;$$

$$(2) \text{ 原式} = x^2 - 9 - x^2 + 2x - 1$$

$$= 2x - 10,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = 1 - 10$$

$$= -9.$$

【点睛】 本题考查了整式的混合运算以及平方差公式，熟练掌握整式的混合运算是解本题的关键.

【变式 3-1】 (2023 春·山东东营·六年级统考期末) 利用整式乘法公式计算.

$$(1) 100^2 - 98 \times 102;$$

$$(2) (a + b + 3)(a + b - 3);$$

$$(3) (-2m + 3)(-2m - 3);$$

$$(4) \left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^2.$$

【答案】 (1) 4

$$(2) a^2 + 2ab + b^2 - 9$$

$$(3) 4m^2 - 9$$

$$(4) \frac{1}{4}x^2 - 2xy + 4y^2$$

【分析】 (1) 首先把 98×102 转化为 $(100 - 2) \times (100 + 2)$ ，然后再根据平方差公式计算即可；

(2) 利用平方差公式变形，然后再根据完全平方公式计算即可；

(3) 根据平方差公式计算即可；

(4) 根据完全平方公式计算即可.

【详解】 (1) 解: $100^2 - 98 \times 102$

$$= 100^2 - (100 - 2) \times (100 + 2)$$

$$= 100^2 - (100^2 - 2^2)$$

$$= 100^2 - 100^2 + 2^2$$

$$= 4;$$

(2) 解: $(a + b + 3)(a + b - 3)$



$$= [(a+b)+3][(a+b)-3]$$

$$= (a+b)^2 - 3^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 9;$$

$$(3) \text{ 解: } (-2m+3)(-2m-3)$$

$$= (-2m)^2 - 3^2$$

$$= 4m^2 - 9;$$

$$(4) \text{ 解: } \left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - 2xy + 4y^2.$$

【点睛】本题考查了平方差公式和完全平方公式，解本题的关键在熟练掌握整式的乘法公式进行计算.

【变式 3-2】（2023 春·湖南永州·七年级校联考期中） $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{14^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{15}{28}$

【分析】根据平方差公式得， $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{14^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{14}\right)\left(1 + \frac{1}{14}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \dots \times \frac{13}{14} \times \frac{15}{14}$ ，然后计算求解即可.

【详解】解： $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{14^2}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{14}\right)\left(1 + \frac{1}{14}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \dots \times \frac{13}{14} \times \frac{15}{14}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{15}{14}$$

$$= \frac{15}{28},$$

故答案为： $\frac{15}{28}$.

【点睛】本题考查了平方差公式的应用，解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

【变式 3-3】（2023 春·江西抚州·七年级校联考期中）运用乘法公式计算：

$$(1)(2m-3n)(-2m-3n)-(2m-3n)^2$$

$$(2)100^2-99^2+98^2-97^2+\dots+2^2-1^2.$$

【答案】(1) $-8m^2+12mn$



(2)5050

【分析】(1)原式第一项利用平方差是化简，第二项利用完全平方公式展开，去括号合并即可得到结果；

(2)原式结合后，利用平方差公式化简，计算即可得到结果.

【详解】(1) 原式 $= 9n^2 - 4m^2 - 4m^2 + 12mn - 9n^2$

$$= -8m^2 + 12mn;$$

$$(2) \text{ 原式} = (100 + 99) \times (100 - 99) + (98 + 97) \times (98 - 97) + \dots + (2 + 1) \times (2 - 1)$$

$$= 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 1$$

$$= 5050.$$

【点睛】本题考查了平方差公式和完全平方公式的应用，熟练掌握运算法则是解题的关键.

【题型4 利用乘法公式求值】

【例4】(2023春·山东济南·七年级统考期末) 设 $a = x - 2022$, $b = x - 2024$, $c = x - 2023$. 若 $a^2 + b^2 = 16$, 则 c^2 的值是()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【答案】C

【分析】根据完全平方公式得出 $ab = 6$, $a - b = 2$, 进而根据已知条件得出 $c^2 = (a - 1)(b + 1)$, 进而即可求解.

【详解】 $\because a = x - 2022$, $b = x - 2024$, $c = x - 2023$,

$$\therefore a - 1 = x - 2023 = c = b + 1, \quad a - b = 2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16,$$

$$\therefore (a - b)^2 + 2ab = 16,$$

$$\therefore ab = 6,$$

$$\therefore c^2 = (a - 1)(b + 1)$$

$$= ab + a - b - 1$$

$$= 6 + 2 - 1$$

$$= 7,$$

故选: C.

【点睛】本题考查了完全平方公式变形求值，根据题意得出 $c^2 = (a - 1)(b + 1)$ 是解题的关键.



【变式 4-1】（2023 春·广西贵港·七年级校考期末）若 $x - y - 7 = 0$ ，则代数式 $x^2 - y^2 - 14y$ 的值为_____.

【答案】49

【分析】先计算 $x - y$ 的值，再将所求代数式利用平方差公式分解前两项后，将 $x - y$ 的值代入化简计算，然后再代入计算即可求解.

【详解】解：∵ $x - y - 7 = 0$,

$$\therefore x - y = 7,$$

$$\therefore x^2 - y^2 - 14y$$

$$= (x + y)(x - y) - 14y$$

$$= 7(x + y) - 14y$$

$$= 7x + 7y - 14y$$

$$= 7(x - y)$$

$$= 49.$$

故答案为：49.

【点睛】本题主要考查因式分解的应用，通过平方差公式分解因式后整体代入是解题的关键.

【变式 4-2】（2023 春·湖南永州·七年级校考期中）（1）已知 $a + \frac{1}{a} = 3$ ，求 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的值；

（2）已知 $(a - b)^2 = 9$ ， $ab = 18$ ，求 $a^2 + b^2$ 的值.

【答案】（1）7；（2）45

【分析】（1）根据完全平方和公式恒等变形后，代值求解即可得到答案；

（2）根据完全平方差公式，代值求解即可得到答案.

【详解】解：（1）∵ $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$ ， $a + \frac{1}{a} = 3$ ，

$$\therefore \text{原式} = 3^2 - 2$$

$$= 9 - 2$$

$$= 7;$$

（2）∵ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ， $(a - b)^2 = 9$ ， $ab = 18$ ，

$$\therefore 9 = a^2 - 2 \times 18 + b^2, \text{解得 } a^2 + b^2 = 9 + 2 \times 18 = 45.$$

【点睛】本题考查代数式求值，涉及完全平方公式，熟记完全平方和与完全平方差公式是解决问题的关键.

【变式 4-3】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）已知 m 满足 $(3m - 2015)^2 + (2014 - 3m)^2 = 5$.



(1)求 $(2015 - 3m)(2014 - 3m)$ 的值.

(2)求 $6m - 4029$ 的值.

【答案】(1)-2

(2) ± 3

【分析】(1) 原式利用完全平方公式化简, 计算即可确定出原式的值;

(2) 原式利用完全平方公式变形, 计算即可得到结果.

【详解】(1) 解: 设 $a = 3m - 2015$, $b = 2014 - 3m$,

可得 $a + b = -1$, $a^2 + b^2 = 5$,

$$\because (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\therefore 1 = 5 + 2ab, \text{ 即 } ab = -2,$$

$$\text{则 } (2015 - 3m)(2014 - 3m) = (3m - 2015)(2014 - 3m) = -ab = 2;$$

(2) 解: 设 $a = 3m - 2015$, $b = 2014 - 3m$, 可得 $6m - 4029 = (3m - 2015) - (2014 - 3m) = a - b$,

$$\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

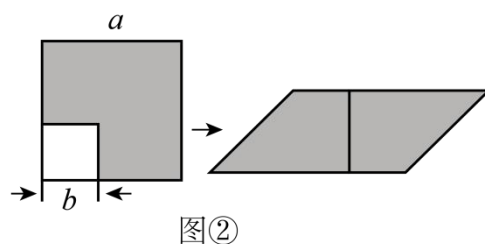
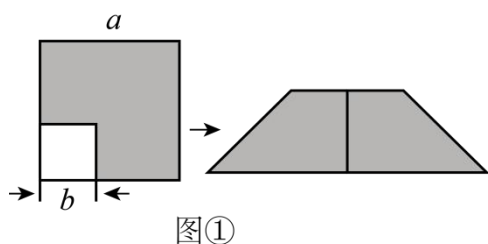
$$\therefore (6m - 4029)^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 5 + 4 = 9,$$

则 $6m - 4029 = \pm 3$.

【点睛】此题考查了完全平方公式, 熟练掌握公式及运算法则是解本题的关键.

【题型 5 利用面积法验证乘法公式】

【例 5】(2023 春·七年级课时练习) 如图, 阴影部分是在边长为 a 的大正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形后所得到的图形, 将阴影部分通过割、拼, 形成新的图形. 给出下列 2 种割拼方法, 其中能够验证平方差公式的是 ()



A. ①

B. ②

C. ①②

D. ①②都不能

【答案】C



【分析】分别在两个图形中表示出阴影部分的面积，继而可得出验证公式，即可得到答案.

【详解】解：在图①中，

左边的图形中阴影部分的面积为： $a^2 - b^2$ ，

右边图形中的阴影部分的面积为： $(a + b)(a - b)$ ，

故可得： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，可验证平方差公式，符合题意；

在图②中，

左边的图形中阴影部分的面积为： $a^2 - b^2$ ，

右边图形中的阴影部分的面积为： $(a + b)(a - b)$ ，

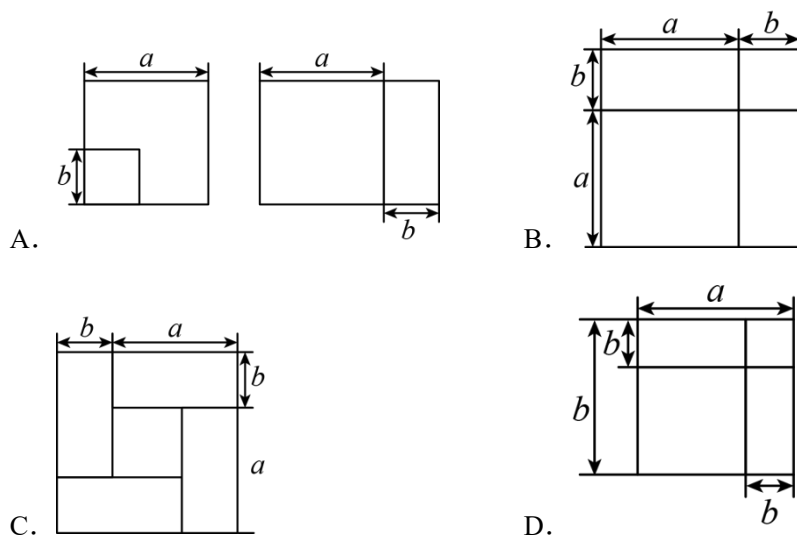
故可得： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，可验证平方差公式，符合题意；

故能够验证平方差公式的是：①②，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了平方差公式，运用不同方法表示阴影部分的面积是解题的关键.

【变式 5-1】(2023 春·山东烟台·六年级统考期末)在下面的正方形分割方案中,可以验证 $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ 的图形是 ()



【答案】C

【分析】用面积公式和作差法求小正方形、长方形的面积，令其与大正方形相等.

【详解】A、不能验证公式，该选项不符合题意；

B、可以验证 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，该选项不符合题意；

C、可以验证 $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ ，该选项符合题意；

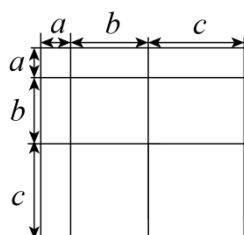


D、可以验证 $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$ ，即 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，该选项不符合题意。

故选：C。

【点睛】本题考查了完全平方公式的几何验证，解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用。

【变式 5-2】（2023 春·福建宁德·七年级校联考期中）下列等式不能用如图所示的方形网格验证的是（ ）



A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a+b)(b+c) = ab + ac + b^2 + bc$

C. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

D. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

【答案】D

【分析】利用图形面积直接得出等式，从而可选择。

【详解】解：等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 是由边长为 $(a+b)$ 的正方形推导而出，故 A 可验证，不符合题意；

等式 $(a+b)(b+c) = ab + ac + b^2 + bc$ 是由长为 $(b+c)$ ，宽为 $(a+b)$ 的长方形推导而出，故 B 可验证，不符合题意；

等式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 是由边长为 $(a+b+c)$ 的正方形推导而出，故 C 可验证，不符合题意；

等式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，图中找不到有关于 $a-b$ 的面积，故 D 不可验证，符合题意。

故选 D。

【点睛】本题考查多项式的乘法与图形面积，利用数形结合的思想是解题关键。

【变式 5-3】（2023 春·江西抚州·七年级统考期末）（1）课本再现：如图 1，2 是“数形结合”的典型实例，应用“等积法”验证乘法公式。图 1 验证的是_____，图 2 验证的是_____；

（2）应用公式计算：

①已知 $x+y=5$ ， $xy=-1$ ，求 x^2+y^2 的值；

②求 $2022^2 - 2021 \times 2023$ 的值。

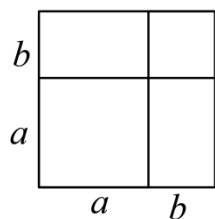


图1

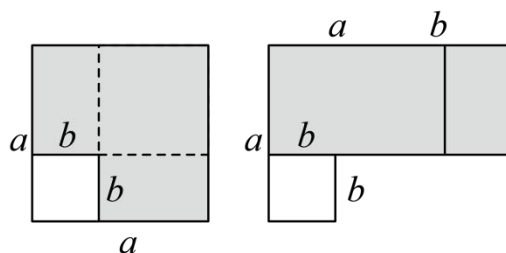


图2

【答案】（1） $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ， $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ；（2）①27；②1

【分析】（1）根据图1中大正方形的面积为两个小正方形的面积与两个长方形的面积之和得到完全平方公式，根据图2中左右两边阴影部分的面积相等得到平方差公式；

（2）①利用 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 进行计算即可；②利用平方差公式将 $2021 \times 2023 = (2022 - 1)(2022 + 1) = 2022^2 - 1$ 化简即可．

【详解】解：（1）图1中，

边长为 a 的正方形的面积为 a^2 ，

边长为 b 的正方形的面积为 b^2 ，

长为 a 宽为 b 的长方形的面积为 ab ，

大正方形的边长为 $(a+b)$ ，面积为 $(a+b)^2$ ，

∴大正方形的面积为两个小正方形的面积与两个长方形的面积之和，

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

图2中，

左边阴影部分的面积为： $a^2 - b^2$ ，

右边阴影部分的面积为： $(a+b)(a-b)$ ，

∴左右两边的阴影部分面积相等，

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

故答案为： $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ， $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ；

（2）①∵ $x+y=5$ ， $xy=-1$ ，

$$\therefore x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 5^2 - 2 \times (-1) = 27;$$

② $2022^2 - 2021 \times 2023$

$$= 2022^2 - (2022 - 1)(2022 + 1)$$



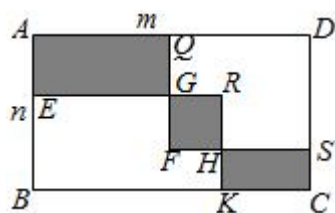
$$= 2022^2 - (2022^2 - 1)$$

$$= 1.$$

【点睛】本题主要考查了完全平方公式和平方差公式，熟练掌握 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ， $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解题的关键.

【题型 6 乘法公式的应用】

【例 6】（2023 春·浙江宁波·七年级校考期中）如图，为了美化校园，某校要在面积为 30 平方米长方形空地 $ABCD$ 中划出长方形 $EBKR$ 和长方形 $QFSD$ ，若两者的重合部分 $GFHR$ 恰好是一个边长为 3 米的正方形，现将图中阴影部分区域作为花圃，若长方形空地 $ABCD$ 的长和宽分别为 m 和 n ， $m > n$ ，花圃区域 $AEGQ$ 和 $HKCS$ 总周长为 14 米，则 $m-n$ 的值为（ ）



A. 4 米

B. 7 米

C. 5 米

D. 3.5 米

【答案】B

【分析】根据长方形的周长及面积计算公式，可找出关于 m ， n 的方程组，变形后可得出 $(m-n)^2 = 49$ ，解之取其正值即可得出结论.

【详解】解：依题意得：
$$\begin{cases} 2(m-3) + 2(n-3) = 14 \text{ ①} \\ mn = 30 \text{ ②} \end{cases},$$

由①可得： $m+n=13$,

$$\because (m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn,$$

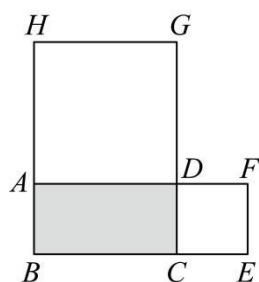
$$\therefore (m-n)^2 = 49,$$

$$\therefore m-n=7 \text{ 或 } m-n=-7 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

故选：B.

【点睛】本题考查了完全平方公式的几何背景，牢记 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 是解题的关键.

【变式 6-1】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）我们知道，将完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 适当的变形，可以解决很多数学问题. 请你观察、思考，并解决以下问题：



(1)若 $m + n = 9$, $mn = 10$, 求 $m^2 + n^2$ 的值;

(2)如图, 一农家乐准备在原有长方形用地(即长方形 $ABCD$)上进行装修和扩建, 先用长为 120m 的装饰性篱笆围起该长方形院子, 再以 AD 、 CD 为边分别向外扩建正方形 $ADGH$ 、正方形 $DCEF$ 的空地, 并在两块正方形空地上建造功能性花园, 该功能性花园面积和为 2000m^2 , 求原有长方形用地 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1)61

(2) 800m^2

【分析】(1)利用完全平方公式代入计算即可;

(2)设 $CD = xm$, $AD = ym$,由周长可得 $x + y = 60$, 由两块正方形的面积和为 2000 平方米, $x^2 + y^2 = 2000$, 求 xy 即可.

【详解】(1) $\because (m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn, m + n = 9, mn = 10,$

$$\therefore m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 9^2 - 2 \times 10 = 61,$$

(2) 设 $CD = xm$, $AD = ym$,

$\because$ 长方形 $ABCD$ 的周长是 120 米,

$$\therefore 2(x + y) = 120,$$

$$\text{即 } x + y = 60,$$

又 $\because$ 两块正方形的面积和为 2000 平方米,

$$\therefore x^2 + y^2 = 2000,$$

$$\therefore xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{60^2 - 2000}{2} = 800,$$

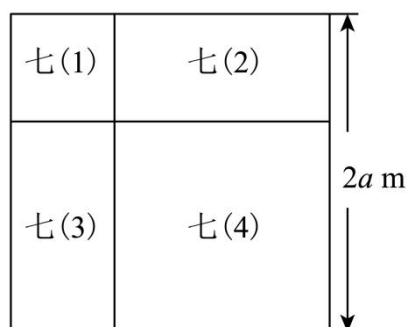
答: 长方形 $ABCD$ 的面积为 800 平方米.

【点睛】本题考查完全平方公式的几何背景, 掌握完全平方公式的结构特征是正确应用的前提, 适当的等式变形是解决问题的关键.

【变式 6-2】(2023 春·湖南邵阳·七年级统考期中) 如图, 某校一块边长为 $2am$ 的正方形空地是七年级四个



班的清洁区，其中分给七年级（1）班的清洁区是一块边长为 $(a-2b)m$ 的正方形. $(0 < 2b < a)$



(1)分别求出七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积.

(2)七年级（4）班的清洁区的面积比七年级（1）班的清洁区的面积多多少?

【答案】(1)七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积均为 $(a+2b)(a-2b) = (a^2 - 4b^2)(m^2)$

(2)多 $8ab\text{ m}^2$

【分析】(1)根据图形可知：七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区为长方形，通过 $2a - (a - 2b) = (a + 2b)(m)$ ，可求出对应的长， $(a + 2b)(a - 2b) = (a^2 - 4b^2)(m^2)$ ，即可解答此题.

(2) 由正方形的面积公式可得到： $(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2) = 8ab(m^2)$ ，从而解答此题.

【详解】（1）解：（1）因为 $2a - (a - 2b) = (a + 2b)(m)$ ，

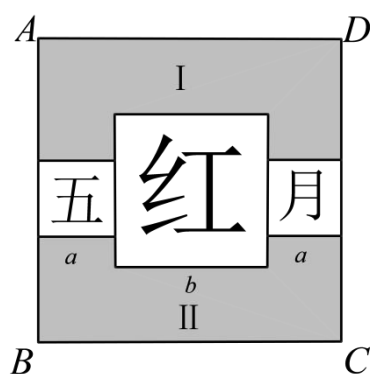
所以七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积均为 $(a + 2b)(a - 2b) = (a^2 - 4b^2)(m^2)$.

（2）因为 $(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2) = 8ab(m^2)$ ，

所以七年级（4）班的清洁区的面积比七年级（1）班的清洁区的面积多 $8ab\text{ m}^2$.

【点睛】 本题考查了整式的乘法，熟练掌握完全平方公式、平方差公式是解本题的关键.

【变式 6-3】（2023 春·浙江温州·七年级期中）学校为迎接艺术节，准备在一个正方形空地 $ABCD$ 上搭建一个表演舞台，如图所示，正中间是“红五月”三个正方形平台. 其中“五”字正方形和“月”字正方形边长均为 a 米，“红”字正方形边长为 b 米. I号区域布置造型背景，II号区域设置为乐队演奏席.



(1)用含 a , b 的代数式表示阴影部分的面积（即I和II面积之和）并化简；

(2)若阴影部分的面积（即I和II面积之和）为 288 平方米，且 $a + b = 20$ 米，求“红”字正方形边长 b 的值.

【答案】 (1) $2a^2 + 4ab$

(2) 16

【分析】 (1) 根据题意，分别表示出正方形空地 $ABCD$ 的面积和“红五月”三个正方形平台的面积，相减即为阴影部分的面积；

(2) 根据阴影部分的面积求出 $a^2 + 2ab = 144$ ，再根据 $a + b = 20$ ，得到 $a^2 + 2ab + b^2 = 400$ ，进而求得 $b^2 = 256$ ，即可求出正方形边长 b 的值.

【详解】 (1) 解：由题意可知，正方形空地 $ABCD$ 的边长为 $2a + b$ ，

$\therefore$ 正方形空地 $ABCD$ 的面积为 $(2a + b)^2$ ，

$\because$ “红五月”三个正方形平台的面积为 $a^2 + b^2 + a^2 = 2a^2 + b^2$ ，

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $(2a + b)^2 - (2a^2 + b^2) = 4a^2 + 4ab + b^2 - 2a^2 - b^2 = 2a^2 + 4ab$ ；

(2) 解：阴影部分的面积为 288 平方米，

$\therefore 2a^2 + 4ab = 288$ ，

$\therefore a^2 + 2ab = 144$ ，

$\because a + b = 20$ ，

$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 400$ ，

$\therefore b^2 = 400 - 144 = 256$ ，

$\because b > 0$ ，

$\therefore b = 16$.



【点睛】本题考查了正方形的面积公式，列代数式，完全平方公式，平方根知识，根据题意正确得出阴影部分的面积是解题关键.

【题型 7 平方差公式的几何背景】

【例 7】（2023 春·安徽安庆·七年级统考期中）将边长为 a 的正方形的左上角剪掉一个边长为 b 的正方形(如图 1)，将剩下部分按照虚线分割成①和②两部分，将①和②两部分拼成一个长方形(如图 2)，解答下列问题：

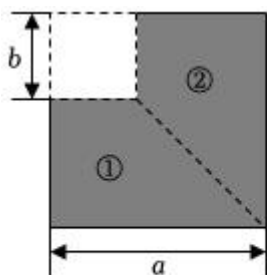


图1



图2

(1)设图 1 中阴影部分的面积为 S_1 ，图 2 中阴影部分的面积为 S_2 ，请用含 a, b 的式子表示： $S_1 =$ _____， $S_2 =$ _____；(不必化简)

(2)由（1）中的结果可以验证的乘法公式是_____；

(3)利用（2）中得到的公式，计算： $2023^2 - 2022 \times 2024$.

【答案】(1) $a^2 - b^2$ ， $(a + b)(a - b)$

(2) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(3)1

【分析】（1）根据图形的和差关系表示出 S_1 ，根据长方形的面积公式表示出 S_2 ；

（2）由（1）中的结果可验证的乘法公式是 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ；

（3）由（2）中所得公式，可得 $2022 \times 2024 = (2023 + 1)(2023 - 1) = 2023^2 - 1$ ，从而简便计算出该题结果.

【详解】（1）解：由题意得， $S_1 = a^2 - b^2$ ，

$S_2 = (a + b)(a - b)$.

故答案为： $a^2 - b^2$ ， $(a + b)(a - b)$ ；

（2）解：由（1）中的结果可验证的乘法公式为 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

故答案为： $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ；

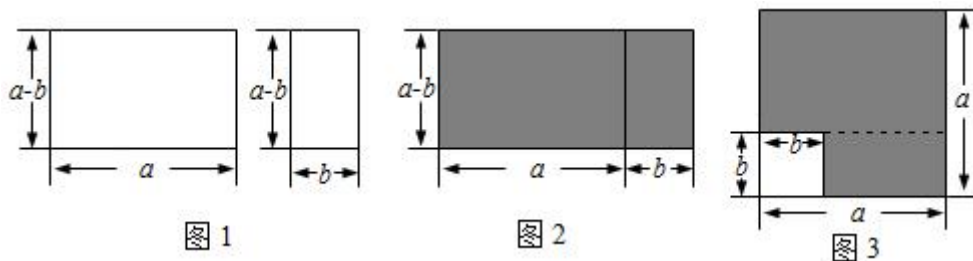
（3）解：由（2）中所得乘法公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 可得，



$$\begin{aligned}
 & 2023^2 - 2021 \times 2023 \\
 &= 2023^2 - (2023 + 1) \times (2023 - 1) \\
 &= 2023^2 - (2023^2 - 1) \\
 &= 2023^2 - 2023^2 + 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了平方差公式几何背景的应用能力，掌握图形准确列式验证平方差公式，并能利用所验证公式解决相关问题是关键。

【变式 7-1】（2023 春·全国·七年级期末）如图 1 的两个长方形可以按不同的形式拼成图 2 和图 3 两个图形。



(1)在图 2 中的阴影部分的面积 S_1 可表示为_；（写成多项式乘法的形式）；在图 3 中的阴影部分的面积 S_2 可表示为_；（写成两数平方差的形式）；

(2)比较图 2 与图 3 的阴影部分面积，可以得到的等式是_；

- A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 B. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 C. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3)请利用所得等式解决下面的问题：

- ①已知 $4m^2 - n^2 = 12$ ， $2m + n = 4$ ，则 $2m - n =$ _；
 ②计算 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1$ 的值，并直接写出该值的个位数字是多少。

【答案】(1) $(a+b)(a-b)$ ， $a^2 - b^2$ ；

(2)B

(3)①3，② 2^{64} ，6

【分析】（1）根据长方形和正方形的面积公式即可求解即可；

（2）根据两个阴影部分的面积相等由（1）的结果即可解答。



(3) ①利用(2)得到的等式求解即可；②可以先把原式乘上一个 $(2-1)$ ，这样可以和 $(2+1)$ 凑成平方差公式，以此逐步解答即可。

【详解】(1)解：图2中长方形的长为 $(a+b)$ ，宽为 $(a-b)$ ，因此面积为 $(a+b)(a-b)$ ，图3中阴影部分的面积为两个正方形的面积差，即 $a^2 - b^2$ 。

故答案为： $(a+b)(a-b)$ ， $a^2 - b^2$ 。

(2)解：由(1)得 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ；

故选B。

(3)解：①因为 $4m^2 - n^2 = 12$ ，所以 $(2m+n)(2m-n) = 12$ ，

又因为 $2m+n=4$ ，

所以 $2m-n=12 \div 4 = 3$ 。

故答案为：3；

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1 \\ &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) + \dots + (2^{32}+1) + 1 \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) + \dots + (2^{32}+1) + 1 \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) + \dots + (2^{32}+1) + 1 \\ &= \dots \\ &= 2^{64} - 1 + 1 \\ &= 2^{64}, \end{aligned}$$

而 $2^1=2$ ， $2^2=4$ ， $2^3=8$ ， $2^4=16$ ， $2^5=32$ ， $2^6=64$ ， $2^7=128$ ， $2^8=256$，其个位数字2，4，8，6，重复出现，而 $64 \div 4 = 16$ ，于是“2、4、8、6”经过16次循环，

因此 2^{64} 的个位数字为6。

答：其结果的个位数字为6。

【点睛】本题主要考查了平方差公式的应用和数字类规律，灵活应用平方差公式成为解答本题的关键。

【变式7-2】(2023春·陕西咸阳·七年级咸阳市秦都中学校考阶段练习) 【知识生成】

(1) 我们已经知道，通过计算几何图形的面积可以表示一些代数恒等式，例如：从边长为 a 的正方形中剪掉一个边长为 b 的正方形如图1，然后将剩余部分拼成一个长方形如图2。图1中剩余部分的面积为_____，图2的面积为_____，请写出这个代数恒等式：

【知识应用】



(2)应用(1)中的公式,完成下面任务:若 m 是不为0的有理数,已知 $P = (a + 2m)(a - 2m)$, $Q = (a + m)(a - m)$, 比较 P 、 Q 大小;

【知识迁移】

(3)事实上,通过计算几何图形的体积也可以表示一些代数恒等式,图3表示的是一个边长为 x 的正方体挖去一个小长方体后重新拼成一个新长方体,请你根据图3中图形的变化关系,通过计算写出一个代数恒等式.

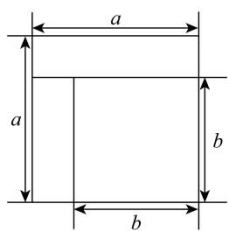


图1



图2

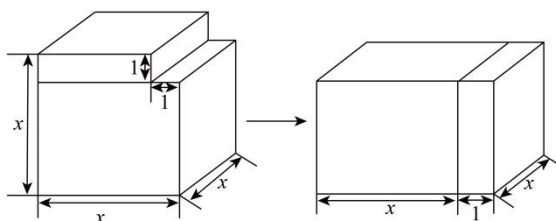


图3

【答案】(1) $-3m^2$; (2) $P < Q$; (3) $x(x+1)(x-1) = x^3 - x$.

【分析】(1) 分别用代数式表示图1, 图2的面积即可;

(2) 利用(1)中得到的等式计算 $P - Q$ 的值即可;

(3) 分别用代数式表示图3中左图和右图的体积即可.

【详解】解: (1) 图1中剩余部分的面积为 $a^2 - b^2$,

图2的面积为 $(a+b)(a-b)$,

所以代数恒等式为 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

(2) $\because P = (a+2m)(a-2m)$, $Q = (a+m)(a-m)$,

$\therefore P - Q = (a+2m)(a-2m) - (a+m)(a-m) = a^2 - 4m^2 - (a^2 - m^2) = -3m^2$

因为 m 是不为0的有理数,

所以 $-3m^2 < 0$, 即 $P - Q < 0$, 所以 $P < Q$;

(3) 图3中左图的体积为 $x \cdot x \cdot x - 1 \times 1 \times x = x^3 - x$,

图3中右图是长为 $x+1$, 宽为 x , 高为 $x-1$ 的长方体,

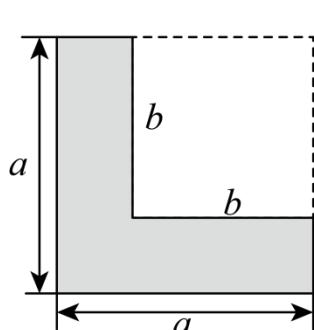
因此体积为 $(x+1) \cdot x \cdot (x-1)$, 所以有 $x(x+1)(x-1) = x^3 - x$.

【点睛】本题考查平方差公式的几何背景, 掌握平方差公式的结构特征是正确应用的前提, 利用代数式表示图形的面积和体积是正确解答的关键.

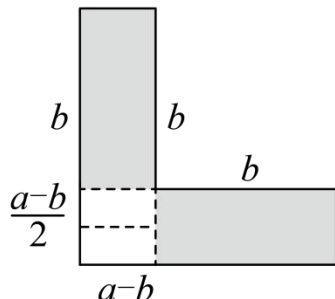
【变式 7-3】(2023 春·山西大同·七年级统考期中) 【实践操作】



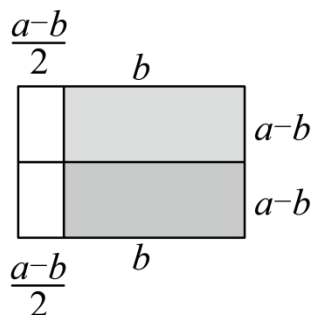
(1) 如图①，在边长为 a 的大正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形($a > b$)，把图①中 L 形的纸片按图②剪拼，改造成一个大长方形如图③，请求出图③中大长方形的面积；



图①



图②



图③

(2) 请写出图①、图②、图③验证的乘法公式为：_.

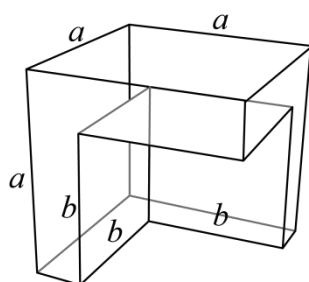
【应用探究】

(3) 利用 (2) 中验证的公式简便计算： $499 \times 501 + 1$ ；

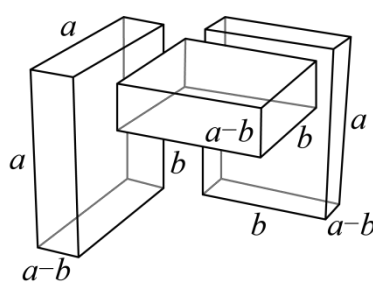
(4) 计算： $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2021^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2022^2}\right)$.

【知识迁移】

(5) 类似地，我们还可以通过对立体图形进行变换得到代数恒等式如图④，将一个棱长为 a 的正方体中去除掉一个棱长为 b 的正方体，再把剩余立体图形切割分成三部分如图⑤，利用立体图形的体积，可得恒等式为： $a^3 - b^3 =$ _. (结果不需要化简)



图④



图⑤

【答案】(1) $a^2 - b^2$; (2) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; (3) 250000; (4) $\frac{2023}{4044}$; (5) $(a-b)a^2 + (a-b)b^2 + (a-b)ab$
或 $(a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

【分析】(1) 利用长方形的面积等于长乘以宽即可.

(2) 图③中大长方形的面积等于图①的阴影部分面积，分别计算即可得出： $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(3) 观察 (2) 的的乘法公式的特点是两数之和乘以两数之差，故将 499 拆成 $500 - 1$ ，将 501 拆成 $500 + 1$



即可.

(4) 利用 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 将各个因式进行因式分解后, 再将各因式通分相加, 发现每相邻两个的乘积为 0, 故答案为第一个因式乘以最后一个因式.

(5) 将立体图形分割成三部分, 分别为: $a^2(a - b)$ 、 $b^2(a - b)$ 、 $ab(a - b)$, 其和为 $a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b)$, 恰等于 $a^3 - b^3$.

【详解】解: (1) 长方形的面积为:

$$2(a - b)\left(\frac{a - b}{2} + b\right)$$

$$= (a - b)(a - b + 2b)$$

$$= (a - b)(a + b)$$

$$= a^2 - b^2;$$

(2) 图③整个大长方形的面积等于图①阴影部分的面积:

$$\therefore (a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$

$$(3) \text{原式} = (500 - 1) \times (500 + 1) + 1$$

$$= 500^2 - 1^2 + 1$$

$$= 250000;$$

$$(4) \text{原式} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021}\right)\left(1 + \frac{1}{2021}\right)\left(1 - \frac{1}{2022}\right)\left(1 + \frac{1}{2022}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2021} \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2022}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2023}{2022}$$

$$= \frac{2023}{4044};$$

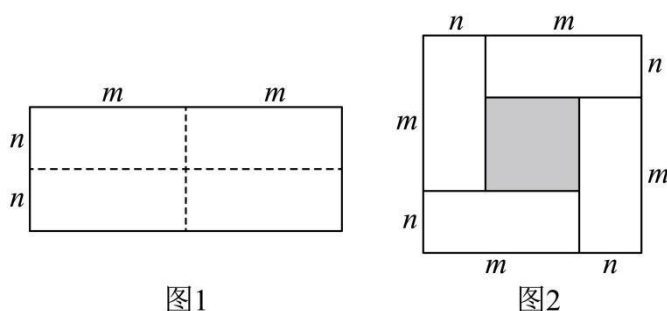
(5) 将立体图形分割成三部分, 分别为: $a^2(a - b)$ 、 $b^2(a - b)$ 、 $ab(a - b)$, 其和为 $a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b) = a^3 - b^3$.

故答案为: $a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b)$.

【点睛】本题考查了“数形结合”中的乘法公式及其灵活运用, 解题的关键是善于发现规律并总结规律.

【题型 8 完全平方公式的几何背景】

【例 8】(2023 春·浙江温州·七年级校联考期中) 图 1, 是一个长为 $2m$, 宽为 $2n$ 的长方形, 沿图中虚线用剪刀平均分成四块小长方形, 然后按图 2 的形状拼成一个正方形.



- (1)图2中的阴影部分的面积为 _;
- (2)观察图2,三个代数式 $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, mn 之间的等量关系是 _;
- (3)若 $x+y=-6$, $xy=\frac{11}{4}$, 则 $x-y=$ _; (直接写出答案)

【答案】(1) $(m-n)^2$

(2) $(m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2$

(3) ± 5

- 【分析】(1) 根据阴影部分的面积等于右边大正方形的面积减去左边矩形的面积进而得出答案;
- (2) 由(1)中计算过程可得答案;
- (3) 根据(2)中的等式可得答案.

【详解】(1) 解: 图2中的阴影部分为正方形, 边长为 $(m-n)$, 则面积为 $(m-n)^2$.

故答案为: $(m-n)^2$;

(2) 解: 左边图形的面积 $= 2m \times 2n = 4mn$,

右边的大正方形面积 $= (m+n)^2$,

则阴影部分的面积 $= (m+n)^2 - 4mn$,

因此三个代数式 $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, mn 之间的等量关系为:

$$(m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2;$$

故答案为: $(m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2$;

(3) 解: 由(2)得 $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$,

$$\therefore (x-y)^2 = (-6)^2 - 4 \times \frac{11}{4} = 25,$$

$$\therefore x-y = \pm \sqrt{25} = \pm 5,$$

故答案为: ± 5 .



【点睛】本题考查了完全平方公式的背景知识以及完全平方公式的变形，解题的关键是认真观察图形，用不同的形式表示图形的面积.

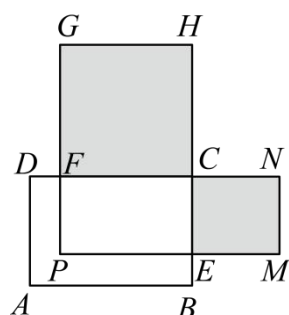
【变式 8-1】（2023 春·七年级课时练习）完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 适当的变形，可以解决很多的数学问题.

例如：若 $a + b = 3$ ， $ab = 1$ ，求 $a^2 + b^2$ 的值.

解：因为 $a + b = 3$ ，所以 $(a + b)^2 = 9$ ，即： $a^2 + 2ab + b^2 = 9$ ，

又因 $ab = 1$ ，所以 $a^2 + b^2 = 7$

根据上面的解题思路与方法，解决下列问题：



(1)若 $x + y = 8$ ， $x^2 + y^2 = 40$ ，则 xy 的值为_____；

(2)拓展：若 $(4 - x)x = 3$ ，则 $(4 - x)^2 + x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3)应用：如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 20$ ， $BC = 12$ ，点 E 、 F 是 BC 、 CD 上的点，且 $BE = DF = x$ ，分别以 FC 、 CE 为边在长方形 $ABCD$ 外侧作正方形 $CFGH$ 和正方形 $CEMN$ ，若长方形 $CEPF$ 的面积为 160，求图中阴影部分的面积和.

【答案】(1)12

(2)10

(3)384

【分析】（1）利用完全平方公式进行计算，即可解答；

（2）设 $4 - x = a$ ， $x = b$ ，则 $a + b = 4$ ， $ab = 3$ ，然后完全平方公式进行计算，即可解答；

（3）根据题意可得 $FC = 20 - x$ ， $CE = 12 - x$ ，然后设 $FC = 20 - x = a$ ， $CE = 12 - x = b$ ，则 $a - b = 8$ ， $ab = 160$ ，最后利用完全平方公式进行计算，即可解答.

【详解】（1）解： $\because x + y = 8$ ， $x^2 + y^2 = 40$ ，



$$\therefore 2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2)$$

$$= 8^2 - 40$$

$$= 64 - 40$$

$$= 24,$$

$$\therefore xy = 12.$$

(2) 解: 设 $4-x=a$, $x=b$,

$$\therefore a+b=4-x+x=4,$$

$$\because (4-x)x=3,$$

$$\therefore ab=3,$$

$$\therefore (4-x)^2 + x^2 = a^2 + b^2$$

$$= (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 4^2 - 2 \times 3$$

$$= 16 - 6$$

$$= 10.$$

(3) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

$$\therefore AB=CD=20, AD=BC=12,$$

$$\because BE=DF=x,$$

$$\therefore FC=DC-DF=20-x, CE=BC-BE=12-x,$$

设 $FC=20-x=a$, $CE=12-x=b$,

$$\therefore a-b=20-x-(12-x)=8,$$

$$\because \text{长方形 } CEPF \text{ 的面积为 } 160,$$

$$\therefore FC \cdot CE = (20-x)(12-x) = ab = 160,$$

$$\therefore \text{正方形 } CFGH \text{ 的面积} + \text{正方形 } CEMN \text{ 的面积}$$

$$= CF^2 + CE^2$$

$$= (20-x)^2 + (12-x)^2$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= (a-b)^2 + 2ab$$

$$= 8^2 + 2 \times 160$$



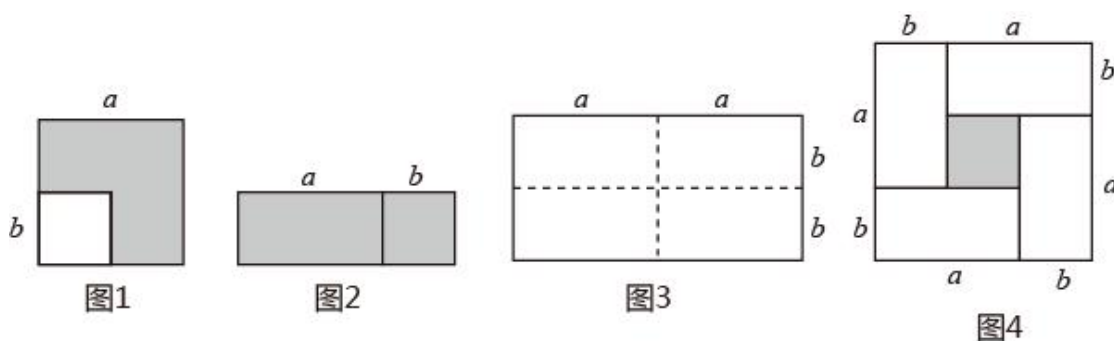
$$= 64 + 320$$

$$= 384,$$

∴图中阴影部分的面积和为 384.

【点睛】本题考查了整式的混合运算—化简求值，完全平方公式的几何背景，熟练掌握完全平方公式变形的计算是解题的关键.

【变式 8-2】（2023 春·江苏·七年级期中）【知识生成】通常情况下，通过用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式. 如图 1，在边长为 a 的正方形中剪掉一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$). 把余下的部分沿虚线剪开拼成一个长方形（如图 2）. 图 1 中阴影部分面积可表示为： $a^2 - b^2$ ，图 2 中阴影部分面积可表示为 $(a+b)(a-b)$ ，因为两个图中的阴影部分面积是相同的，所以可得到等式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;



【拓展探究】图 3 是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四个小长方形，然后按图 4 的形状拼成一个正方形.

(1) 用两种不同方法表示图 4 中阴影部分面积：

方法 1：_，方法 2：_；

(2) 由(1)可得到一个关于 $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 ab 的等量关系式是_；

(3) 若 $a+b=10$ ， $ab=5$ ，则 $(a-b)^2=$ _；

【知识迁移】

(4) 如图 5，将左边的几何体上下两部分剖开后正好可拼成如右图的一个长方体. 根据不同方法表示它的体积也可写出一个代数恒等式：_.

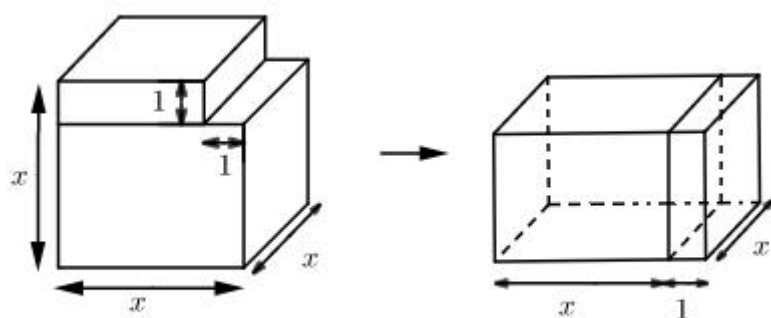


图5

【答案】 (1) $(a-b)^2$, $(a+b)^2-4ab$; (2) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$; (3) 80; (4) $x^3-x=x(x+1)(x-1)$

【分析】 (1) 利用直接和间接的方法表示出阴影部分面积;

(2) 由阴影部分面积相等可得结果;

(3) 直接根据 (2) 的结论代入求值即可;

(4) 分别求得图中几何体的体积, 然后根据原图形与新图形体积相等列出恒等式即可.

【详解】解: (1) 方法 1: 直接根据正方形的面积公式得, $(a-b)^2$,

方法 2: 大正方形面积减去四个长方形的面积, 即 $(a+b)^2-4ab$;

(2) 由阴影部分面积相等可得 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$;

(3) 由 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$,

可得: $10^2-4\times 5=(a-b)^2$,

$\therefore (a-b)^2=80$;

(4) $\because$ 原几何体的体积 $=x^3-1\times 1\cdot x=x^3-x$, 新几何体的体积 $=x(x+1)(x-1)$,

$\therefore$ 恒等式为 $x^3-x=x(x+1)(x-1)$.

【点睛】本题考查完全平方公式的几何意义; 能够由面积相等, 过渡到利用体积相等推导公式是解题的关键.

【变式 8-3】(2023 春·江苏·七年级期中) 【知识生成】用两种不同方法计算同一图形的面积, 可以得到一个等式, 如图 1, 是用长为 a , 宽为 $b(a > b)$ 的四个相同的长方形拼成的一个大正方形, 用两种不同的方法计算阴影部分(小正方形)的面积, 可以得到 $(a-b)^2$ 、 $(a+b)^2$ 、 ab 三者之间的等量关系式: _____;

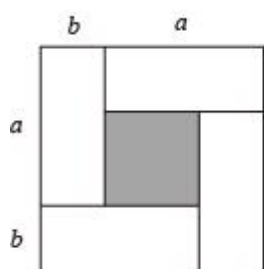


图1

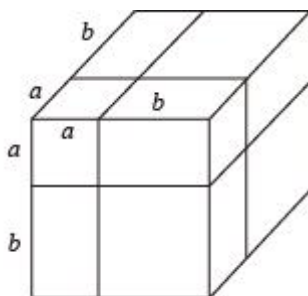


图2

【知识迁移】类似地，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，也可以得到一个等式，

如图2，观察大正方体分割，可以得到等式： $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 。

利用上面所得的结论解答下列问题：

(1) 已知 $x+y=6$, $xy=\frac{11}{4}$ ，求 $(x-y)^2$ 的值；

(2) 已知 $a+b=6$, $ab=7$ ，求 a^3+b^3 的值。

【答案】[知识生成] $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ ；

[知识迁移] (1) 25； (2) 90

【分析】[知识生成]利用面积相等推导公式 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ ；

[知识迁移]利用体积相等推导 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ ；

(1) 应用知识生成的公式，进行变形，代入计算即可；

(2) 应用知识生成的公式，进行变形，由知识迁移的等式可得结论。

【详解】[知识生成]

方法一：已知边长直接求面积为 $(a-b)^2$ ；

方法二：阴影面积是大正方形面积减去四个长方形面积，

$\therefore$ 面积为 $(a+b)^2 - 4ab$ ，

$\therefore$ 由阴影部分面积相等可得 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ ；

故答案为： $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ ；

[知识迁移]

(1) 由 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ ，

可得 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ ，

$\because x+y=6$, $xy=\frac{11}{4}$ ，



$$\therefore (x-y)^2 = 6^2 - 4 \times \frac{11}{4},$$

$$\therefore (x-y)^2 = 25,$$

$$(2) \because a+b=6, ab=7,$$

$$\therefore a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 216 - 3 \times 7 \times 6 = 90.$$

【点睛】本题考查完全平方公式的几何意义；能够由面积相等，过渡到利用体积相等推导公式是解题的关键.

【题型 9 乘法公式中的新定义问题】

【例 9】（2023 春·河北石家庄·七年级统考期中）新定义：如果 a, b 都是非零整数，且 $a = 4b$ ，那么就称 a 是“4 倍数”.

验证：嘉嘉说： $23^2 - 21^2$ 是“4 倍数”，琪琪说： $12^2 - 6 \times 12 + 9$ 也是“4 倍数”，判断_____说得对（填“嘉嘉”、“琪琪”或“嘉嘉、琪琪”）.

【答案】嘉嘉

【分析】利用平方差公式可将 $23^2 - 21^2$ 变形为 4×22 ，利用完全平方公式将 $12^2 - 6 \times 12 + 9$ 变形为 9^2 ，再根据“4 倍数”的定义判断即可.

【详解】解： $23^2 - 21^2 = (23 + 21) \times (23 - 21) = 44 \times 2 = 4 \times 22$,

因此 $23^2 - 21^2$ 是“4 倍数”，

$$12^2 - 6 \times 12 + 9 = 12^2 - 2 \times 3 \times 12 + 3^2 = (12 - 3)^2 = 9^2,$$

可知 $12^2 - 6 \times 12 + 9$ 不能写成 4 的倍数，

因此 $12^2 - 6 \times 12 + 9$ 不是“4 倍数”，

故嘉嘉说得对，琪琪说得不对.

故答案为：嘉嘉.

【点睛】本题考查平方差公式和完全平方公式，解题的关键是掌握平方差公式、完全平方公式，理解“4 倍数”的定义.

【变式 9-1】（2023 春·浙江金华·七年级统考期末）定义：两个自然数的平方和加上这两个自然数乘积的两倍即可得到一个新的自然数，我们把这个新的自然数称为“完全数”，例如： $2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 = 25$ ，其中“25”就是一个“完全数”，则任取两个自然数可得到小于 200 且不重复的“完全数”的个数有（ ）

A. 14 个

B. 15 个

C. 26 个

D. 60 个

【答案】A

【分析】根据“完全数”的概念求解即可.



【详解】设两个自然数分别为 a, b

由题意可得, $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

$\therefore$ 小于 200 且不重复的“完全数”有: $1 = (0 + 1)^2, 4 = (1 + 1)^2, 9 = (1 + 2)^2, 16 = (2 + 2)^2, 25 = (2 + 3)^2, 36 = (3 + 3)^2, 49 = (3 + 4)^2, 64 = (3 + 5)^2, 81 = (3 + 6)^2, 100 = (3 + 7)^2, 121 = (3 + 8)^2, 144 = (3 + 9)^2, 169 = (3 + 10)^2, 196 = (3 + 11)^2$

综上所述, 任取两个自然数可得到小于 200 且不重复的“完全数”的个数有 14 个.

故选: A.

【点睛】此题考查了新定义, 完全平方公式, 理解“完全数”的定义是解题关键.

【变式 9-2】(2023 春·广东揭阳·七年级校联考期中) 现定义一种运算“ $\oplus$ ”, 对任意有理数 m, n 规定: $m \oplus n = mn(m - n)$, 如: $1 \oplus 2 = 1 \times 2(1 - 2) = -2$, 则 $(a + b) \oplus (a - b)$ 的值是_____.

【答案】 $2a^2b - 2b^3/2ba^2 - 2b^3$

【分析】先根据新运算进行变形, 再根据整式的运算法则进行计算即可.

【详解】解: $(a + b) \oplus (a - b)$

$$= (a + b)(a - b)[(a + b) - (a - b)]$$

$$= (a + b)(a - b)(a + b - a + b)$$

$$= (a^2 - b^2) \cdot 2b$$

$$= 2a^2b - 2b^3.$$

故答案为: $2a^2b - 2b^3$.

【点睛】本题考查了整式的混合运算, 新定义的运算, 能正确根据整式的运算法则进行计算是解此题的关键.

【变式 9-3】(2023 春·江苏徐州·七年级统考期中) 对于任意有理数 a, b, c, d , 定义一种新运算: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a^2 + b^2 - cd$.

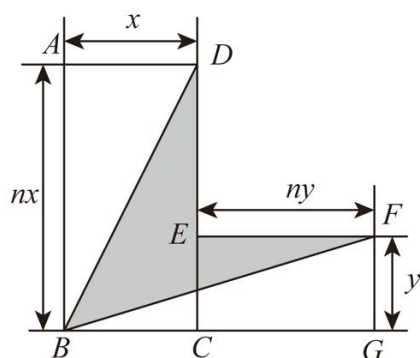
(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$ _____;

(2) 对于有理数 x, y , 若 $\begin{bmatrix} x & k \\ y & xy \end{bmatrix}$ 是一个完全平方式, 则 k _____;

(3) 对于有理数 x, y , 若 $x + y = 10, xy = 22$.

①求 $\begin{bmatrix} 2x - y & 3x - y \\ y & x - y \end{bmatrix}$ 的值;

②将长方形 $ABCD$ 和长方形 $CEFG$ 按照如图方式进行放置, 其中点 B, C, G 在同一条直线上, 点 E 在边 CD 上, 连接 BD, BF . 若 $AD = x, AB = nx, FG = y, EF = ny$, 图中阴影部分的面积为 45, 求 n 的值.



【答案】(1)-4

(2)2 或-2

(3)①56; ②2

【分析】(1) 直接根据 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a^2 + b^2 - cd$ 计算即可;

(2) 根据新定义得出 $x^2 + y^2 - kxy$, 再根据结果是一个完全平方式, 利用完全平方式的概念即可求出 k ;

(3) ①先根据化简, 再利用完全平方公式变形求解即可;

②根据图形用含 x, y 的式子表示出阴影部分的面积, 再根据①中的结果代入即可求出 n .

【详解】(1) 解: 原式 $= 1^2 + (-1)^2 - 2 \times 3 = -4$.

故答案为: -4;

(2) 原式 $= x^2 + y^2 - kxy$,

$\because$ 是完全平方公式,

$\therefore k = 2$ 或 -2 .

故答案为: 2 或 -2;

(3) ①原式 $= (2x - y)^2 + y^2 - (3x - y)(x - y)$

$= 4x^2 - 4xy + y^2 + y^2 - (3x^2 - 3xy - xy + y^2)$

$= x^2 + y^2$,

$\because x + y = 10, xy = 22$,

$\therefore (x + y)^2 = 100, 2xy = 44$,

$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$= 100 - 44 = 56$;



②由图知： $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle DBC} + S_{\text{长方形} ECGF} - S_{\triangle BGF}$ ，

$$\therefore 45 = \frac{1}{2}x \cdot nx + ny \cdot y - \frac{1}{2}y(x + ny),$$

$$\text{化简得 } nx^2 + ny^2 - xy = 90,$$

$$\therefore n(x^2 + y^2) - xy = 90,$$

$$\text{由①得, } x^2 + y^2 = 56, \quad xy = 22,$$

$$\therefore 56n - 22 = 90,$$

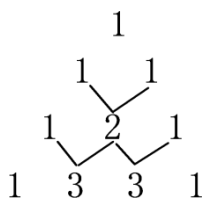
$$\therefore n = 2$$

【点睛】本题考查了新定义，完全平方公式的变形求解，熟练掌握新定义和完全平方公式是解答本题的关键。

【题型 10 乘法公式的规律探究】

【例 10】（2023·上海·七年级假期作业）杨辉是我国南宋时著名的数学家，他发现了著名的三角系数表，它的其中一个作用是指导按规律写出形如 $(a + b)^n$ （其中 n 为正整数）展开式的系数，请你仔细观察下表中的规律，填出 $(a + b)^4$ 展开式中所缺的系数。

$$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$



$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a - b)^1 = a - b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

(1)仔细观察上边的图和下边的式子，写出 $(a - b)^3 =$ _____；

(2)直接在横线上填数字：

$$(a + b)^4 = a^4 + \underline{\hspace{2cm}} a^3b + \underline{\hspace{2cm}} a^2b^2 + \underline{\hspace{2cm}} ab^3 + \underline{\hspace{2cm}} b^4;$$

(3)请根据你找到的规律写出下列式子的结果：

$$(x - y)^5 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2x - y)^5 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】(1) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(2)4、6、4、1



$$(3)x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5; 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$$

【分析】观察本题规律，下一行的各项系数是上一行相邻两个数的和，根据规律解答各小题即可。

【详解】(1) $(a-b)^3$

$$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

故答案为： $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ；

$$(2) (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

故答案为：4、6、4、1

$$(3) (x-y)^5$$

$$= x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 5x(-y)^4 - y^5$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5;$$

$$(2x-y)^5$$

$$= 2^5x^5 - 5 \cdot 2^4x^4y + 10 \cdot 2^3x^3y^2 - 10 \cdot 2^2x^2y^3 + 5 \cdot 2xy^4 - y^5$$

$$= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5;$$

故答案为： $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ ； $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$

【点睛】本题考查了完全平方公式，读懂题意并根据所给的式子寻找规律，是快速解题的关键。

【变式 10-1】（2023·安徽合肥·统考模拟预测）观察下列等式：第 1 个等式： $1 \times 2 + 1 = 2^2 - 1$ ；第 2 个等式： $2 \times 3 + 2 = 3^2 - 1$ ；第 3 个等式： $3 \times 4 + 3 = 4^2 - 1$ ；第 4 个等式： $4 \times 5 + 4 = 5^2 - 1$ ；...按照以上规律，解决下列问题：

(1) 写出第 5 个等式：_____；

(2) 写出你猜想的第 n 个等式（用含 n 的等式表示， $n \geq 1$ ，且 n 为整数），并加以证明。

【答案】(1) $5 \times 6 + 5 = 6^2 - 1$

(2) $n(n+1) + n = (n+1)^2 - 1$ ，证明见解析

【分析】(1) 根据所给的等式的形式进行求解即可；

(2) 分析所给的等式的形式，再进行总结，并对等式左边的式子和右边的式子进行整理即可证明。

【详解】(1) 解：由题意得：



第5个等式为： $5 \times 6 + 5 = 6^2 - 1$ ，

故答案为： $5 \times 6 + 5 = 6^2 - 1$ ；

(2) 解： $\because$ 第1个等式： $1 \times 2 + 1 = 2^2 - 1$ ；

第2个等式： $2 \times 3 + 2 = 3^2 - 1$ ；

第3个等式： $3 \times 4 + 3 = 4^2 - 1$ ；

第4个等式： $4 \times 5 + 4 = 5^2 - 1$ ；

...

$\therefore$ 猜想：第 n 个等式： $n(n+1) + n = (n+1)^2 - 1$ ，

证明：等式左边 $= n^2 + n + n = n^2 + 2n$ ，

等式右边 $= n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$ ，

$\therefore$ 等式左边=等式右边，

$\therefore n(n+1) + n = (n+1)^2 - 1$ 成立.

【点睛】本题主要考查了数字的变化规律，根据题中所给的式子得出第 n 个等式： $n(n+1) + n = (n+1)^2 - 1$ 是解题的关键.

【变式 10-2】（2023 春·安徽合肥·七年级中国科技大学附属中学校考期中）观察下列等式：

$$\textcircled{1} \frac{3^2-1^2}{4} = 1+1; \textcircled{2} \frac{4^2-2^2}{4} = 1+2; \textcircled{3} \frac{5^2-3^2}{4} = 1+3; \textcircled{4} \frac{6^2-4^2}{4} = 1+4; \textcircled{5} \frac{7^2-5^2}{4} = 1+5 \dots\dots$$

(1) 请按以上规律写出第⑥个等式_____；

(2) 猜想并写出第 n 个等式_____；并证明猜想的正确性

【答案】(1) $\frac{8^2-6^2}{4} = 1+6$

(2) $\frac{(n+2)^2-n^2}{4} = 1+n$

【分析】(1) 根据题干规律直接写出答案即可；

(2) 找出分子两个数之间关系直接写出答案，利用完全平方公式展开合并推到证明即可得到答案；

【详解】(1) 解：由题意可得，

第⑥个等式为： $\frac{8^2-6^2}{4} = 1+6$ ；

(2) 解：由题干规律可得第 n 个等式为： $\frac{(n+2)^2-n^2}{4} = 1+n$ ，



证明： $\because$ 左边 $= \frac{(n+2)^2 - n^2}{4} = \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2}{4} = \frac{4 + 4n}{4} = 1 + n$,

$\therefore$ 左边 = 右边,

$$\therefore \frac{(n+2)^2 - n^2}{4} = 1 + n.$$

【点睛】本题主要考查根据规律运算及完全平方公式应用，解题的关键是根据题干得到式子之间存在的规律.

【变式 10-3】（2023 春·全国·七年级专题练习）仔细观察下列等式：

第 1 个： $5^2 - 1^2 = 8 \times 3$

第 2 个： $9^2 - 5^2 = 8 \times 7$

第 3 个： $13^2 - 9^2 = 8 \times 11$

第 4 个： $17^2 - 13^2 = 8 \times 15$

...

(1) 请你写出第 6 个等式：_____；

(2) 请写出第 n 个等式，并加以验证；

(3) 运用上述规律，计算： $8 \times 7 + 8 \times 11 + \dots + 8 \times 399 + 8 \times 403$.

【答案】(1) $25^2 - 21^2 = 8 \times 23$ ；(2) 第 n 个等式是： $(4n+1)^2 - (4n-3)^2 = 8(4n-1)$ ，验证见解析；(3) 164000.

【分析】(1) 式子总的特点是两个差为 4 的数的平方差等于某个数的 8 倍，其中每个式子中变化的数都是依次递增 4，根据这个特点可以写出第 6 个等式；

(2) 观察前面几个算式，把每个等式中变化的部分都表示成用等式序数 n 表示的代数式，即可得解；

(3) 逆向运用前面所得的等式，消去互为相反数的部分，可以得到解答.

【详解】(1) 根据式子的特点，可知第 6 个等式是：

$$25^2 - 21^2 = 8 \times 23.$$

故答案为： $25^2 - 21^2 = 8 \times 23$ ；

(2) 第 n 个等式是：

$$(4n+1)^2 - (4n-3)^2 = 8(4n-1).$$

$$\text{验证：左边} = (4n+1)^2 - (4n-3)^2$$

$$= 16n^2 + 8n + 1 - 16n^2 + 24n - 9$$

$$= 32n - 8$$



$$=8(4n-1)$$

=右边;

$$(3) 8 \times 7 + 8 \times 11 + \dots + 8 \times 399 + 8 \times 403$$

$$=9^2 - 5^2 + 13^2 - 9^2 + \dots + 401^2 - 397^2 + 405^2 - 401^2$$

$$=405^2 - 5^2$$

$$= (405+5)(405-5)$$

$$=410 \times 400$$

$$=164000.$$

【点睛】 本题考查数字变化的规律及平方差公式的综合运用，通过观察掌握数字变化的规律并应用逆向思维思考是解题关键.