专题 8.1　幂的运算【八大题型】

【苏科版】

题型梳理

举一反三

【知识点 1 幂的运算】

①同底数幂的乘法：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

②幂的乘方：$(a^m)^n=a^{mn}$。幂的乘方，底数不变，指数相乘。

③积的乘方：$(ab)^n=a^nb^n$。积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。

④同底数幂的除法：$a^m\div a^n=a^{m-n}$。同底数幂相除，底数不变，指数相减。

【题型 1　利用幂的运算法则进行简便运算】

【例 1】（2023 春·河北保定·七年级校联考期末）用简便方法计算：

(1)$\left(\frac{4}{5}\right)^{2019}\times(-1.25)^{2020}$；

(2)$(-9)^3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

【答案】(1)$\frac{5}{4}$

(2)8

【分析】（1）先将小数化为分数，再根据同底数幂的运算法则进行计算即可；

（3）根据乘法结合律和积的乘方逆运算，先计算后两项乘积，再求解即可．

【详解】（1）解：原式$=\left(\frac{4}{5}\right)^{2019}\times\left(\frac{5}{4}\right)^{2020}$

$=\left(\frac{4}{5}\right)^{2019}\times\left(\frac{5}{4}\right)^{2019}\times\frac{5}{4}$

$=\left(\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}\right)^{2019}\times\frac{5}{4}$

$=1\times\frac{5}{4}$

$=\frac{5}{4}$;

（2）解：原式$=(-9)^3\times\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\right]^3$

$=(-9)^3\times\left(-\frac{2}{9}\right)^3$

$=\left[(-9)\times\left(-\frac{2}{9}\right)\right]^3$

$=2^3$

$=8$.

【点睛】本题主要考查了有理数混合运算的简便运算，解题的关键是掌握有理数范围内依旧适用各个运算律，以及熟练运用同底数幂的运算法则.

【变式 1-1】（2023 春·山东烟台·六年级统考期中）计算$\left(-\frac{5}{4}\right)^{2023}\times(-0.8)^{2022}$的结果是（　　）

A．1　　B．-1　　C．$\frac{5}{4}$　　D．$-\frac{5}{4}$

【答案】D

【分析】根据积的乘方的逆运算，即可得到答案.

【详解】解：$\left(-\frac{5}{4}\right)^{2023}\times(-0.8)^{2022}=\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)^{2022}\times\left(-\frac{4}{5}\right)^{2022}$

$=\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left[\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)\right]^{2022}=-\frac{5}{4}$,

故选：D.

【点睛】本题考查了积的乘方，同底数幂的乘法，解题的关键是积的乘方运算的逆运用进行化简.

【变式 1-2】（2023 春·上海杨浦·七年级统考期中）用简便方法计算：$-3^5\times(-\frac{2}{3})^5\times(-5)^6$

【答案】500000

【分析】根据积的乘方即可求出答案.

【详解】原式$=3^5\times(\frac{2}{3})^5\times5^6$

$=\left(3\times\frac{2}{3}\right)^5\times5^6$

$=2^5\times5^5\times5$

$=\left(2\times5\right)^5\times5$

$=5\times10^5$

$=500000$

【点睛】本题考查学生的运算能力，解题的关键是熟练运用运算法则，本题属于基础题型．

【变式 1-3】（2023 春·上海·七年级上海市西延安中学校考期中）简便方法计算：

(1)$3\frac{2}{5}\times202.3+87\%\times2023-21\times20.23$；

(2)$(-1.5)^{2024}\times(\frac{2}{3})^{2023}$

【答案】(1)2023

(2)1.5

【分析】（1）先变形，再利用乘法分配律合并计算；

（2）先逆用同底数幂的乘法变形，再逆用积的乘方二次变形，再计算即可．

【详解】（1）解：$3\frac{2}{5}\times202.3+87\%\times2023-21\times20.23$

$=\frac{17}{5}\times10\times20.23+87\times20.23-21\times20.23$

$=34\times20.23+87\times20.23-21\times20.23$

$=(34+87-21)\times20.23$

$=100\times20.23$

$=2023$；

（2）$(-1.5)^{2024}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2023}$

$=(-1.5)^{2023}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\times(-1.5)$

$=\left(-\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)^{2023}\times(-1.5)$

$=(-1)^{2023}\times(-1.5)$

$=1.5$

【点睛】本题考查了乘法分配律，积的乘方和同底数幂的乘法，解题的关键是灵活运用公式．

【题型 2　利用幂的运算法则求式子的值】

【例 2】（2023 春·江苏宿迁·七年级校考期中）若$x^m=2$，$x^n=5$，则$x^{3m-2n}=$________．

【答案】$\frac{8}{25}$

【分析】逆用同底数幂的除法公式及幂的乘法公式，化成已知条件的形式，再计算即可求解.

【详解】解：$x^{3m-2n}=x^{3m}\div x^{2n}=(x^m)^3\div(x^n)^2=2^3\div5^2=\frac{8}{25}$.

故答案为：$\frac{8}{25}$.

【点睛】本题考查同底数幂的除法及幂的乘法公式的逆运算，熟练掌握公式后再灵活变通是解题关键.

【变式 2-1】（2023 春·四川自贡·七年级四川省荣县中学校校考阶段练习）已知$2^a=18$，$2^b=3$，则2^{a-2b+1}的值为__________.

【答案】4

【分析】直接利用同底数幂的乘除运算法则将原式变形进而得出答案.

【详解】：∵$2^a=18$，$2^b=3$，

∴2^{a-2b+1}

$=2^a\div(2^b)^2\times2$

$=18\div3^2\times2$

$=4$.

故答案为：4.

【点睛】此题主要考查了同底数幂的乘除运算，解题关键是将原式进行正确变形.

【变式 2-2】（2023 春·广东深圳·七年级深圳外国语学校校考期中）已知$x^{3m}=2$，$y^{2m}=3$，求$(x^{2m})^3+(y^m)^6-(x^2y)^{3m}\cdot y^m$的值.

【答案】-5

【分析】直接利用积的乘方运算法则以及幂的乘方运算法则计算得出答案.

【详解】∵$x^{3m}=2$，$y^{2m}=3$，

$(x^{2m})^3+(y^m)^6-(x^2y)^{3m}\cdot y^m$

$=(x^{3m})^2+(y^{2m})^3-(x^{6m}y^{3m}\cdot y^m)$

$=(x^{3m})^2+(y^{2m})^3-(x^{3m}y^{2m})^2$

$=2^2+3^3-(2\times3)^2$

$=-5$.

【点睛】考查单项式乘单项式，幂的乘方与积的乘方，掌握运算法则是解题的关键.

【变式 2-3】（2023 春·浙江温州·七年级温州市第二十三中学校考期中）已知整数a、b、c、d满足$a<b<c<d$且$2^a3^b4^c5^d=10000$，则 $4a+3b+2c+d$的值为______．

【答案】2

【分析】根据 3 不是 10000 的公约数，可得 b=0，由 $10000=2^4\times5^4=4^2\times5^4=2^0\times4^2\times5^4=2^{-2}\times4^3\times5^4=2^4\times4^0\times5^4$和$a<b<c<d$即可得到 a，b，c，d 的值，故可求解．

【详解】∵$10000=2^4\times5^4=4^2\times5^4=2^0\times4^2\times5^4=2^{-2}\times4^3\times5^4=2^4\times4^0\times5^4$，3 不是 10000 的公约数，

∴$3^b=1$

则 b=0

∴$2^a\times4^c\times5^d=10000$

∵整数a、b、c、d满足$a<b<c<d$

∴$10000=2^{-2}\times4^3\times5^4$符合题意

∴a=-2，b=0，c=3，d=4

∴$4a+3b+2c+d$=-8+0+6+4=2

故答案为：2．

【点睛】此题主要考查幂的运算，解题的关键是熟知幂的运算法则及特点．

【题型 3　利用幂的运算法则比较大小】

【例 3】（2023 春·浙江杭州·七年级期中）如$A=\frac{99^9}{9^{99}}$，$B=\frac{11^9}{9^{90}}$，是比较A，B大小（　）

A．$A>B$　　B．$A<B$　　C．$A=B$　　D．A、B大小不能正确

【答案】C

【分析】先运用幂的乘方的运算性质先把 A 和 B 进行转化变成同底数幂的形式，再进行比较即可．

【详解】解：∵$A=\frac{99^9}{9^{99}}=\left(\frac{99}{9^{11}}\right)^9=\left(\frac{11}{9^{10}}\right)^9$，

$B=\frac{11^9}{9^{90}}=\left(\frac{11}{9^{10}}\right)^9$，

∴$A=B$；

故选：C．

【点睛】本题主要考查了幂的大小比较的方法，一般说来，比较几个幂的大小，或者把它们的底数变得相同，或者把它们的指数变得相同，再分别比较它们的指数或底数．

【变式 3-1】（2023 春·山西晋中·七年级统考期中）阅读探究题：

【阅读材料】

比较两个底数大于 1 的正数幂的大小，可以在底数(或指数)相同的情况下，比较指数(或底数)的大小，

如：$2^5>2^3$，$5^5>4^5$.

在底数(或指数)不相同的情况下，可以化相同，进行比较，如：27^{10}与3^{25}，

解：$27^{10}=(3^3)^{10}=3^{30}$，

$\because 30>25$，

$\therefore 3^{30}>3^{25}$.

$\therefore 27^{10}>3^{25}$.

(1)上述求解过程中，运用了哪一条幂的运算性质（______）

A．同底数幂的乘法 B．同底数幂的除法 C．幂的乘方 D．积的乘方

(2)类比解答：比较25^4，125^3的大小.

(3)拓展提高：比较3^{555}，4^{444}，5^{333}的大小.

【答案】(1)C

(2)$25^4<125^3$

(3)$5^{333}<3^{555}<4^{444}$

【分析】（1）根据幂的乘方运算法则判断即可；

（2）根据幂的乘方运算法则解答即可；

（3）根据幂的乘方运算法则解答即可．

【详解】（1）上述求解过程中，运用了幂的乘方的运算性质，

故答案为：C；

（2）$\because 25^4=(5^2)^4=5^8$，$125^3=(5^3)^3=5^9$，

$5^8<5^9$，

$\therefore 25^4<125^3$；

（3）$\because 3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}$，$4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}$，$5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$，

$125^{111}<243^{111}<256^{111}$，

$\therefore 5^{333}<3^{555}<4^{444}$.

【点睛】本题考查幂的乘方与积的乘方、有理数大小比较，解答本题的关键是明确有理数大小的比较方法.

【变式 3-2】(2023 春·江苏·七年级期末)若$a^3=2$，$b^5=3$，比较a，b大小关系的方法：因为$a^{15}=(a^3)^5=2^5=32$，$b^{15}=(b^5)^3=3^3=27$，32>27，所以$a^{15}>b^{15}$，所以$a>b$．已知$x^5=2$，$y^7=3$，则x，y的大小关系是x__________y（填"<"或">"）.

【答案】<

【详解】解：参照题目中比较大小的方法可知，

$\because x^{35}=(x^5)^7=2^7=128$，$y^{35}=(y^7)^5=3^5=243$，$243>128$，

$\therefore x^{35}<y^{35}$，

$\therefore x<y$，

故答案为：<.

【点睛】本题考查利用幂的乘方比较未知量的大小，熟练掌握幂的乘方的运算法则（底数不变，指数相乘）是解题的关键.

【变式 3-3】（2023 春·河北张家口·七年级统考阶段练习）阅读：已知正整数a,b,c，对于同底数，不同指数的两个幂a^b和$a^c(a\neq 1)$，若$b>c$，则$a^b>a^c$；对于同指数，不同底数的两个幂a^b和c^b，若$a>c$，则$a^b>c^b$.根据上述材料，回答下列问题.

(1)比较大小：2^8_8^2（填">""<"或"="）；

(2)比较2^{33}与3^{22}的大小（写出具体过程）；

(3)比较$99^{13}\times 102^{10}$与$99^{10}\times 102^{13}$的大小（写出具体过程）.

【答案】(1)>

(2)$2^{33}<3^{22}$，过程见解析

(3)$99^{13}\times 102^{10}<99^{10}\times 102^{13}$，过程见解析

【分析】（1）根据材料提示，正整数a,b,c，对于同底数，不同指数的两个幂a^b和$a^c(a\neq 1)$，指数越大，值越大；对于同指数，不同底数的两个幂a^b和c^b，底数越大，值越大，由此即可求解；

（2）根据幂的运算将2^{33}与3^{22}转换成同指数，不懂底数的两个幂，进行比较即可；

（3）将$99^{13}\times 102^{10}$与$99^{10}\times 102^{13}$转换为同底数不同指数，同指数不同底数的形式，结合材料提示即可求解.

【详解】（1）解：$\because 2^8=(2^4)^2=16^2$，$16>8$，

$\therefore 16^2 > 8^2$，

故答案为：$>$.

（2）解：$\because 2^{33} = (2^3)^{11} = 8^{11}$，$3^{22} = (3^2)^{11} = 9^{11}$，$8 < 9$，

$\therefore 8^{11} < 9^{11}$，

$\therefore 2^{33} < 3^{22}$.

（3）解：$\because 99^{13} \times 102^{10} = 99^{10} \times 99^3 \times 102^{10} = (99 \times 102)^{10} \times 99^3$，$99^{10} \times 102^{13} = 99^{10} \times 102^{10} \times 102^3 = (99 \times 102)^{10} \times 102^3$，$99^3 < 102^3$，

$\therefore (99 \times 102)^{10} \times 99^3 < (99 \times 102)^{10} \times 102^3$，

$\therefore 99^{13} \times 102^{10} < 99^{10} \times 102^{13}$.

【点睛】本题主要考查幂的知识，幂的乘方，积的乘方等运算的综合，掌握以上知识及运算是解题的关键.

【题型 4　利用幂的运算法则整体代入求值】

【例 4】（2023 春·江苏盐城·七年级统考期中）若$a + b + c = 1$，则$(-2)^{a-1} \times (-2)^{3b+2} \times (-2)^{2a+3c}$的值为_________.

【答案】16

【分析】根据同底数幂的乘法可进行求解.

【详解】解：$\because a + b + c = 1$，

$\therefore (-2)^{a-1} \times (-2)^{3b+2} \times (-2)^{2a+3c} = (-2)^{a-1+3b+2+2a+3c} = (-2)^{3(a+b+c)+1} = 16$；

故答案为 16.

【点睛】本题主要考查同底数幂的乘法，熟练掌握同底数幂的乘法是解题的关键.

【变式 4-1】（2023 春·江苏苏州·七年级统考期末）已知 $2x + y = 1$，则$4^x \cdot 2^y$的值为_______ .

【答案】2

【分析】根据幂的乘方，同底数幂的乘法法则，进行计算即可解答.

【详解】解：$\because 2x + y = 1$，

$\therefore 4^x \cdot 2^y = (2^2)^x \cdot 2^y$

$= 2^{2x} \cdot 2^y$

$= 2^{2x+y}$

$= 2^1$

$= 2$，

故答案为：2．

【点睛】本题考查了幂的乘方与积的乘方，同底数幂的乘法，熟练掌握它们的运算法则是解题的关键．

【变式 4-2】(2023 春·四川成都·七年级成都嘉祥外国语学校校考期中）已知 $2x+4y-3=0$，则$4^x\cdot16^y-8$ 的值为（　）

A．3　　B．8　　C．0　　D．4

【答案】C

【分析】根据幂的乘方与同底数幂的乘法将原式化为$2^{2x+4y}-8$，再整体代入计算即可．

【详解】解：$\because 2x+4y-3=0$，即 $2x+4y=3$，

$\therefore$原式$=2^{2x}\cdot2^{4y}-8$

$=2^{2x+4y}-8$

$=2^3-8$

$=8-8$

$=0$，

故选：C．

【点睛】本题考查幂的乘方与同底数幂的乘法，掌握幂的乘方与同底数幂的乘法的计算方法是正确解答的前提，将原式化为$2^{2x+4y}-8$ 是正确解答的关键．

【变式 4-3】（2023 春·广西崇左·七年级统考期中）若 $2a+3b-4c-2=0$，则$9^a\times27^b\div81^c$的值为____________.

【答案】9

【分析】由幂的乘方进行化简，然后把 $2a+3b-4c=2$ 代入计算，即可得到答案．

【详解】解：$\because 2a+3b-4c-2=0$，

$\therefore 2a+3b-4c=2$，

$\therefore 9^a\times27^b\div81^c=3^{2a}\times3^{3b}\div3^{4c}=3^{2a+3b-4c}=3^2=9$；

故答案为：9．

【点睛】本题考查了幂的乘方的运算法则，求代数式的值，解题的关键是熟练掌握运算法则，正确的进行化简．

【题型 5　利用幂的运算法则求字母的值】

【例 5】（2023 春·上海浦东新·七年级统考期中）已知$4^{2x}\cdot5^{2x+1}-4^{2x+1}\cdot5^{2x}=20^{3x-4}$，求 x 的值；

【答案】x=4

【分析】根据积的乘方的逆运算即可解得.

【详解】解：$4^{2x}\cdot 5^{2x+1}-4^{2x+1}\cdot 5^{2x}=20^{3x-4}$

$4^{2x}\cdot 5^{2x}\cdot 5-4\cdot 4^{2x}\cdot 5^{2x}=20^{3x-4}$

$20^{2x}\cdot 5-4\cdot 20^{2x}=20^{3x-4}$

$20^{2x}=20^{3x-4}$

$2x=3x-4$

x=4

【点睛】此题考查了积的乘方的逆运算，题解的关键是转化成同底数.

【变式 5-1】（2023 春·河北邯郸·七年级校考期中）计算：

(1)已知 $2\cdot 8^{n}\cdot 32^{n}=2^{25}$，求 n 的值；

(2)已知 n 是正整数，且$x^{3n}=2$，求$(3x^{3n})^{2}+(-2x^{2n})^{3}$的值.

【答案】(1)3；

(2)4.

【分析】(1) 由 $2\cdot 8^{n}\cdot 32^{n}=2\cdot(2^{3})^{n}\cdot(2^{5})^{n}=2\cdot 2^{3n}\cdot 2^{5n}=2^{8n+1}=2^{25}$，得到一元一次方程 $8n+1=25$ ，即可求解；

（2）把$(3x^{3n})^{2}+(-2x^{2n})^{3}$变形为$(3x^{3n})^{2}-8(x^{3n})^{2}$，再把$x^{3n}=2$ 代入计算即可.

【详解】（1）解：$\because 2\cdot 8^{n}\cdot 32^{n}=2\cdot(2^{3})^{n}\cdot(2^{5})^{n}=2\cdot 2^{3n}\cdot 2^{5n}=2^{8n+1}=2^{25}$，

$\therefore 8n+1=25$，

解得$n=3$.

（2）解：$\because (3x^{3n})^{2}+(-2x^{2n})^{3}=(3x^{3n})^{2}-8(x^{3n})^{2}$，

当$x^{3n}=2$ 时，

原式$=(3\times 2)^{2}-8\times 2^{2}$

$=36-32$

$=4$.

【点睛】本题考查了幂的乘方与积的乘方，掌握幂的乘方与积的乘方的法则是解题的关键.

【变式 5-2】（2023 春·浙江绍兴·七年级统考期末）若$2^{a}=3$，$2^{b}=7$，$2^{c}=m$，且$a+b=c$，则此时m值

为________.

【答案】21

【分析】根据同底数幂的乘法运算法则求解即可.

【详解】解：$\because 2^a=3$，$2^b=7$，

$\therefore 2^a\cdot 2^b=2^{a+b}=21$，

$\because a+b=c$，

$\therefore 2^c=21$，又$2^c=m$，

$\therefore m=21$，

故答案为：21.

【点睛】本题考查同底数幂的乘法，解答的关键是熟练掌握运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

【变式 5-3】（2023 春·山东淄博·六年级统考期中）若$5^2\times 5^m=5^{10}$，$9^n\div 3^n=3$，则$m+n=$____________.

【答案】9

【分析】根据幂的运算即可得出：$\begin{cases}2+m=10\\n=1\end{cases}$，求出$m$、$n$的值，即可得出答案.

【详解】解：$\because 5^2\times 5^m=5^{10}$，$9^n\div 3^n=3$，

$\therefore 5^{2+m}=5^{10}$，$3^{2n}\div 3^n=3^n=3$，

$\therefore \begin{cases}2+m=10\\n=1\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}m=8\\n=1\end{cases}$，

$\therefore m+n=9$.

故答案为：9.

【点睛】此题考查了同底数幂相乘和同底数幂相除的运算，利用幂的运算得出方程组解出字母的值是解题的关键.

【题型 6　利用幂的运算法则表示代数式】

【例 6】（2023 春·江苏泰州·七年级校考期中）若$x=2^m+1$，$y=4^m-1$.

(1)当$m=2$时，分别求x，y的值.

(2)用只含x的代数式表示y.

【答案】(1)$x=5$；$y=15$

(2)$y=x^2-2x$

【分析】（1）将$m=2$代入$x=2^m+1$，$y=4^m-1$中计算即可；

（2）由$x=2^m+1$可得$2^m=x-1$，再根据幂的乘方运算解答即可.

【详解】（1）解：将$m=2$分别代入$x=2^m+1$，$y=4^m-1$中

$\therefore x=2^2+1=5$，$y=4^2-1=15$；

（2）解：$\because x=2^m+1$，

$\therefore 2^m=x-1$，

$\therefore y=4^m-1=(2^m)^2-1=(x-1)^2-1=x^2-2x$.

【点睛】本题主要考查了代数式求值以及幂的乘方的逆运算，解题的关键是熟练利用幂的乘方的逆运算对式子进行变形.

【变式 6-1】（2023 春·福建漳州·七年级漳州三中校考期中）已知$2^{x-4}=m$，用含m的代数式表示2^x正确的是（　）

A．$16m$　　B．$8m$　　C．$m+4$　　D．$\frac{m}{4}$

【答案】A

【分析】利用幂的除法的逆运算即可求解.

【详解】解：$\because 2^{x-4}=m$，

$\therefore \frac{2^x}{2^4}=m$，

$\therefore 2^x=16m$，

故选：A.

【点睛】本题考查了幂的除法的逆运算，解题的关键是掌握相应的运算法则.

【变式 6-2】（2023 春·江苏扬州·七年级统考期中）若$43^x=2021, 47^y=2021$，则代数式xy与$x+y$之间关系是________.

【答案】$xy=x+y$

【分析】由条件可得$(43^x)^y=2021^y, (47^y)^x=2021^x$,可得$43^{xy}\cdot 47^{xy}=(43^x)^y\times(47^y)^x=2021^y\times 2021^x=2021^{x+y}$,而$43^{xy}\times 47^{xy}=(43\times 47)^{xy}=2021^{xy}$,从而可得答案.

【详解】解：$\because 43^x=2021, 47^y=2021$，

$\therefore (43^x)^y=2021^y, (47^y)^x=2021^x$,

$\therefore 43^{xy}\cdot 47^{xy}=(43^x)^y\times(47^y)^x=2021^y\times 2021^x=2021^{x+y}$,

而$43^{xy}\times 47^{xy}=(43\times 47)^{xy}=2021^{xy}$,

$\therefore 2021^{xy}=2021^{x+y}$,

$\therefore xy=x+y$.

故答案为：$xy=x+y$.

【点睛】本题考查的是同底数幂的乘法运算，积的乘方的逆运算，掌握“利用幂的运算与逆运算进行变形”是解本题的关键.

【变式 6-3】（2023 春·江西南昌·七年级南昌市第十九中学校考期末）若$a^m=a^n(a>0$ 且$a\neq l$，m、n是正整数），则$m=n$．利用上面结论解决下面的问题：

(1)如果$8^x=2^5$，求 x 的值；

(2)如果$2^{x+2}+2^{x+1}=24$，求 x 的值；

(3)若$x=5^m-3$，$y=4-25^m$，用含 x 的代数式表示 y.

【答案】(1)$x=\frac{5}{3}$

(2)$x=2$

(3)$y=-x^2-6x-5$

【分析】（1）根据幂的乘方运算法则把8^x化为底数为 2 的幂，解答即可；

（2）根据同底数幂的乘法法则把$2^{x+2}+2^{x+1}=24$ 变形为$2^x(2^2+2)=24$ 即可解答；

（3）由$x=5^m-3$ 可得$5^m=x+3$，再根据幂的乘方运算法则解答即可.

【详解】（1）解：　$8^x=(2^3)^x=2^{3x}=2^5$，

$\therefore 3x=5$，

解得$x=\frac{5}{3}$；

（2）解：$\because 2^{x+2}+2^{x+1}=24$，

$\therefore 2^x\times 2^2+2^x\times 2=24$

$\therefore 6\times 2^x=24$，

$\therefore 2^x=4$，

$\therefore x=2$；

（3）解：$\because x=5^m-3$，

$\therefore 5^m=x+3$，

$\because y=4-25^{m}=4-(5^{2})^{m}$

$=4-(5^{m})^{2}$

$=4-(x+3)^{2}$，

$\therefore y=-x^{2}-6x-5$.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法以及幂的乘方，掌握利用同底数幂的乘法、幂的乘方及其逆运算对式子进行变形是关键.

【题型 7　幂的混合运算】

【例 7】（2023 春·山东枣庄·七年级统考期中）计算：

(1)$a^{4}+(-2a^{2})^{3}-a^{8}\div a^{4}$；

(2)$2a^{2}b\cdot 5ab^{2}-3ab\cdot(ab)^{2}$.

【答案】(1)$-8a^{6}$

(2)$7a^{3}b^{3}$

【分析】（1）运用积的乘方、同底数幂相除及合并同类项进行求解；

（2）运用积的乘方、单项式乘以单项式进行运算.

【详解】（1）解：$a^{4}+(-2a^{2})^{3}-a^{8}\div a^{4}$

$=a^{4}-8a^{6}-a^{4}$

$=-8a^{6}$；

（2）解：$2a^{2}b\cdot 5ab^{2}-3ab\cdot(ab)^{2}$

$=10a^{3}b^{3}-3ab\cdot a^{2}b^{2}$

$=10a^{3}b^{3}-3a^{3}b^{3}$

$=7a^{3}b^{3}$.

【点睛】此题考查了积的乘方、同底数幂相除、单项式乘以单项式及合并同类项的运算能力，关键是能准确理解并运用以上知识进行计算.

【变式 7-1】（2023 春·浙江金华·七年级校考期中）计算：

(1)$2x^{3}y^{2}\cdot(-2xy^{2}z)^{2}$；

(2)$(-2x^{2})^{3}+x^{2}\cdot x^{4}-(-3x^{3})^{2}$.

【答案】(1)$8x^{5}y^{6}z^{2}$；

(2)$-16x^6$.

【分析】（1）直接利用积的乘方运算法则化简，再利用单项式乘单项式运算法则计算得出答案；

（2）直接利用积的乘方运算法则化简，再利用单项式乘单项式运算法则、合并同类项法则计算得出答案.

【详解】（1）解：$2x^3y^2\cdot(-2xy^2z)^2$

$=2x^3y^2\cdot 4x^2y^4z^2$

$=8x^5y^6z^2$；

（2）解：$(-2x^2)^3+x^2\cdot x^4-(-3x^3)^2$

$=-8x^6+x^6-9x^6$

$=-16x^6$.

【点睛】此题主要考查了单项式乘单项式以及积的乘方运算法则，正确掌握相关运算法则是解题关键.

【变式 7-2】（2023 春·上海青浦·七年级校考期中）计算：$\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2\cdot 8x^4y^2-(2x^2y^2)^3$.

【答案】$-6x^6y^6$

【分析】分别按照幂的乘方，积的乘方，单项式乘单项式的运算法则进行计算，最后合并同类项即可.

【详解】解：$\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2\cdot 8x^4y^2-(2x^2y^2)^3$

$=\frac{1}{4}x^2y^4\cdot 8x^4y^2-8x^6y^6$

$=2x^6y^6-8x^6y^6$

$=-6x^6y^6$

【点睛】本题考查了整式的乘法运算．用到的知识点有幂的乘方，积的乘方，单项式乘单项式．幂的乘方法则：幂的乘方，底数不变，指数相乘；积的乘方法则：积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的因式相乘；单项式乘单项式，把他们的系数、相同字母的幂分别相乘，其余字母和字母指数不变，作为积的因式.

【变式 7-3】（2023 春·湖南邵阳·七年级统考期中）计算：$a^{n-5}\left(a^{n+1}b^{3m-2}\right)^2+\left(a^{n-1}b^{m-2}\right)^3(-b^{3m+2})$.

【答案】0

【分析】根据积的乘方，单项式乘以单项式的计算法则求解即可.

【详解】解：原式$=a^{n-5}(a^{2n+2}b^{6m-4})+(a^{3n-3}b^{3m-6})(-b^{3m+2})$

$=a^{3n-3}b^{6m-4}+(-a^{3n-3}b^{6m-4})$

$=a^{3n-3}b^{6m-4}-a^{3n-3}b^{6m-4}$

$=0$.

【点睛】本题主要考查了单项式乘以单项式，积的乘方，熟知相关计算法则是解题的关键.

【题型 8　新定义下的幂的运算】

【例 8】（2023 春·上海徐汇·七年级上海市第四中学校考期中）阅读下列材料：一般地，n 个相同的因数 a 相乘$a\cdot a\ldots$，记为a^n．如 $2\times2\times2=2^3=8$，此时，3 叫做以 2 为底 8 的对数，记为$\log_2 8$（即$\log_2 8=3$）．一般地，若$a^n=b$（$a>0$ 且$a\neq1$，$b>0$），则 n 叫做以 a 为底 b 的对数，记为$\log_a b$（即$\log_a b=n$．如$3^4=81$，则 4 叫做以 3 为底 81 的对数，记为$\log_3 81$（即$\log_3 81=4$）．

(1)计算以下各对数的值：$log_2 4=$_____，$log_2 16=$_____，$log_2 64=$_____.

(2)写出（1）$log_2 4$、$log_2 16$、$log_2 64$ 之间满足的关系式______.

(3)由（2）的结果，请你能归纳出一个一般性的结论：$\log_a M+\log_a N=$_____（$a>0$ 且$a\neq1$，$M>0$，$N>0$）.

(4)设$a^n=N$，$a^m=M$，请根据幂的运算法则以及对数的定义说明上述结论的正确性.

【答案】(1)2，4，6

(2)$\log_2 4+\log_2 16=\log_2 64$

(3)$\log_a(MN)$

(4)证明见解析

【分析】（1）根据对数的定义求解；

（2）认真观察，即可找到规律：$4\times16=64$，$log_2 4+log_2 16=log_2 64$；

（3）由特殊到一般，得出结论：$log_a M+log_a N=log_a(MN)$.

（4）设$\log_a M=b_1$，$\log_a N=b_2$，根据同底数幂的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$和给出的材料证明结论.

【详解】（1）$\because 2^2=4$，$2^4=16$，$2^6=64$

$\therefore log_2 4=2$，$log_2 16=4$，$log_2 64=6$，

故答案为：2，4，6；

（2）$\because 4\times16=64$，$log_2 4=2$，$log_2 16=4$，$log_2 64=6$，

$\therefore log_2 4+log_2 16=log_2 64$，

故答案为：$log_2 4+log_2 16=log_2 64$；

（3）由（2）的结果可得$log_a M+log_a N=log_a(MN)$，

故答案为：$log_a(MN)$.

（4）设$\log_a M=b_1$，$\log_a N=b_2$，

则$a^{b_1}=M$，$a^{b_2}=N$

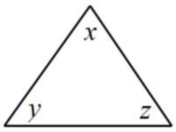
$\therefore MN=a^{b_1}a^{b_2}$

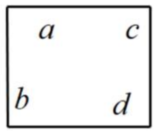
$=a^{b_1+b_2}$，

$\therefore b_1+b_2=$loga（MN），

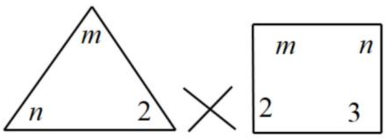
$\therefore log_aM+log_aN=log_a(MN)$.

【点睛】本题是开放性的题目，难度较大．借考查同底数幂的乘法，对数，实际考查学生对指数的理解、掌握的程度；解题的关键是要求学生不但能灵活、准确的应用其运算法则，还要会类比、归纳，推测出对数应有的性质．

【变式 8-1】(2023 春·广东揭阳·七年级校考期中)若定义

表示$3xyz$，

表示$-2a^bc^d$，

则运算

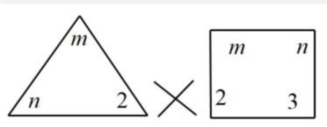
的结果为（　）

A．$-12m^3n^4$　　B．$-6m^2n^5$　　C．$12m^4n^3$　　D．$12m^3n^4$

【答案】A

【分析】根据新定义列出算式进行计算，即可得出答案．

【详解】解：根据定义得：



$=3\times m\times n\times 2\times(-2)\times m^2\times n^3$

$=-12m^3n^4$，

故选：A．

【点睛】本题考查了整式的混合运算，根据新定义列出算式是解决问题的关键．

【变式 8-2】（2023 春·江苏淮安·七年级期中）定义一种幂的新运算：$x^a\oplus x^b=x^{ab}+x^{a+b}$，请利用这种运算规则解决下列问题：

(1)$2^2\oplus 2^3$的值为_；

(2)若$2^p=3,2^q=5,3^q=7$，求$2^p\oplus 2^q$的值；

【答案】(1)96

(2)22

【分析】（1）根据新运算规则计算，即可求解；

（2）根据新运算规则原式可变形为$2^{pq}+2^{p+q}$，再由幂的乘方和同底数幂的逆运算计算，即可求解.

【详解】（1）解：根据题意得：

$2^2\oplus 2^3=2^{2\times 3}+2^{2+3}=2^6+2^5=96$；

故答案为：96

（2）解：∵$2^p=3,2^q=5,3^q=7$，

$2^p\oplus 2^q$

$=2^{pq}+2^{p+q}$

$=(2^p)^q+2^p\times 2^q$

$=3^q+2^p\times 2^q$

$=7+3\times 5$

$=22$

【点睛】本题主要考查了幂的乘方和同底数幂的逆运算，利用新运算规则是解题的关键.

【变式8-3】（2023春·江苏·七年级期中）规定两数a，b之间的一种运算，记作(a,b)，如果$a^c=b$．我们叫(a,b)为“雅对”.

例如：因为$2^3=8$，所以$(2,8)=3$．我们还可以利用“雅对”定义说明等式$(3,3)+(3,5)=(3,15)$成立．证明如下：

设$(3,3)=m$，$(3,5)=n$，则$3^m=3$，$3^n=5$，故$3^m\cdot 3^n=3^{m+n}=3\times 5=15$，

则$(3,15)=m+n$，即$(3,3)+(3,5)=(3,15)$.

(1)根据上述规定，填空：$(2,4)=$________；$(5,1)=$________；$(3,27)=$________.

(2)计算$(5,2)+(5,7)=$__________，并说明理由.

(3)利用“雅对”定义证明：$(2^n,3^n)=(2,3)$，对于任意自然数n都成立.

【答案】(1)2；0；3

(2)$(5,2)+(5,7)=(5,14)$,理由见解析

(3)见解析

【分析】（1）由于$2^2=4$，$5^0=1$，$3^3=27$根据“雅对”的定义可得；

（2）设(5，2）$=m$，（5，7）$=n$，利用新定义得到$5^m=2$，$5^n=7$，根据同底数幂的乘法得到$5^m\bullet 5^n=5^{m+n}=14$，然后根据“雅对”的定义得到(5，14）$=m+n$，从而得到(5，2）+（5，7）=（5，14）；

（3）设：(2^n，3^n）$=a$，（2，3）$=b$，利用新定义得到(2^n）$^a=3^n$，$2^b=3$，根据幂的乘方得到(2^n）$^a=$（2^b）^{n}，从而得到$a=b$，所以(2^n，3^n）=（2，3），对于任意自然数n都成立.

【详解】（1）∵$2^2=4$，

∴$(2,4)=2$；

∵$5^0=1$，

∴$(5,1)=0$；

∵$3^3=27$，

∴$(3,27)=3$

故答案为：2；0；3；

（2）（5，2）+（5，7）=（5，14）；

理由如下：

设(5，2）$=m$，（5，7）$=n$，则$5^m=2$，$5^n=7$，

∴$5^m\bullet 5^n=5^{m+n}=2\times 7=14$，

∵（5，14）$=m+n$，

∴（5，2）+（5，7）=（5，14）；

故答案为：（5，14）；

（3）设(2^n，3^n）$=a$，（2，3）$=b$，

∴（2^n）$^a=3^n$，$2^b=3$，

∴（2^n）$^a=$（2^b）^{n}，

即$2^{an}=2^{bn}$，

∴$an=bn$，

∴$a=b$，

即（2^n，3^n）＝（2，3），对于任意自然数 n 都成立.

【点睛】本题考查了幂的乘方与积的乘方：幂的乘方法则：底数不变，指数相乘，即$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 是正整数）.