



专题 9.3 因式分解【九大题型】

【苏科版】

▶ 题型梳理

【题型 1 利用因式分解求值】	2
【题型 2 因式分解在有理数简算中的应用】	4
【题型 3 利用因式分解确定整除问题】	7
【题型 4 利用添项进行因式分解】	11
【题型 5 利用拆项进行因式分解】	15
【题型 6 利用因式分解确定三角形的形状】	17
【题型 7 利用因式分解求最值】	20
【题型 8 因式分解在新定义问题中的运用】	22
【题型 9 因式分解在阅读理解中的运用】	27

▶ 举一反三

【知识点 因式分解】

定义：把一个多项式化成了几个整式的积的形式，这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

以上公式都可以用来对多项式进行因式分解，因式分解的常用方法：

①提公因式法： $pa+pb+pc=p(a+b+c)$ ；

②公式法： $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ； $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ； $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 。

③分组分解法： $ac+ad+bc+cd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$

④十字相乘法： $a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$

因式分解的一般步骤：

(1) 如果多项式的各项有公因式，那么先提取公因式。

(2) 在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：2 项式可以尝试运用公式法分解因式；3 项式可以尝试运用公式法、十字相乘法分解因式；4 项式及 4 项式以上的可以尝试分组分解法分解因式

(3) 分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止。



【题型 1 利用因式分解求值】

【例 1】（2023 春·安徽合肥·七年级统考期末）将 $(2x)^n - 81$ 因式分解后得 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$ ，那么 n 等于（ ）

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】 B

【分析】先求出 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^4 - 81$ ，根据将 $(2x)^n - 81$ 因式分解后得 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$ ，即可得出 $(2x)^n - 81 = (2x)^4 - 81$ ，即可得出答案.

【详解】解：∵ $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$

$$= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9)$$

$$= 16x^4 - 81,$$

$$= (2x)^4 - 81$$

又∵将 $(2x)^n - 81$ 因式分解后得 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$,

$$\therefore (2x)^n - 81 = (2x)^4 - 81,$$

∴ $n = 4$ ，故 B 正确.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了因式分解的定义，多项式乘法，解题的关键是求出 $(4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^4 - 81$.

【变式 1-1】（2023 春·上海闵行·七年级上海市民办文绮中学校考期中）把多项式 $x^3 + ax$ 分解因式得 $x(x - \frac{1}{2})(x + b)$ ，求 a 、 b 的值.

【答案】 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

【分析】根据整式的乘法运算将 $x(x - \frac{1}{2})(x + b)$ 化为 $x^3 + (b - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{2}bx$ ，根据 $x^3 + ax = x^3 + (b - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{2}bx$ 可知 $b - \frac{1}{2} = 0$ ， $-\frac{1}{2}b = a$ ，求出 a 、 b 的值即可.

【详解】解： $x(x - \frac{1}{2})(x + b)$

$$= x \left[x^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}b \right]$$

$$= x^3 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}bx,$$



$$\because x^3 + ax = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + b),$$

$$\therefore x^3 + ax = x^3 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}bx,$$

$$\therefore b - \frac{1}{2} = 0, \quad -\frac{1}{2}b = a,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查分解因式的知识及整式的乘法，正确计算出整式乘法的式子得出 $b - \frac{1}{2} = 0$ ， $-\frac{1}{2}b = a$ 是解答本题的关键。

【变式 1-2】 (2023 春·七年级单元测试) 已知三次四项式 $2x^3 - 5x^2 - 6x + k$ 分解因式后有一个因式是 $x - 3$ ，试求 k 的值及另一个因式。

【答案】 $k = 9$ ， $2x^2 + x - 3$

【分析】 根据题意，当 $x = 3$ 时，代数式的值为 0，进而求得 k 的值，然后因式分解即可求解。

【详解】 解：依题意，三次四项式 $2x^3 - 5x^2 - 6x + k$ 分解因式后有一个因式是 $x - 3$ ，

$$\therefore x = 3 \text{ 时，原式} = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 6 \times 3 + k = -9 + k = 0$$

$$\therefore k = 9,$$

$$\therefore 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = 2x^2(x - 3) + x^2 - 6x + 9$$

$$= 2x^2(x - 3) + (x - 3)^2$$

$$= (x - 3)(2x^2 + x - 3)$$

$$\therefore \text{另一个因式为 } 2x^2 + x - 3$$

【点睛】 本题考查了因式分解的意义，解题时要根据分组分解法、提公因式法、公式法分解因式，难点是采用两两分组还是三一分组，要考虑分组后还能进行下一步分解，注意分解因式要彻底，直到不能再分解为止。

【变式 1-3】 (2023 春·七年级单元测试) 若 $2x^2 - 6y^2 + xy + kx + 6$ 能分解成两个一次因式的积，则整数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 ± 7

【分析】 根据题意设多项式可以分解为： $(x + ay + c)(2x + by + d)$ ，则 $2c + d = k$ ，根据 $cd = 6$ ，求出所有符合条件的 c 、 d 的值，然后再代入 $ad + bc = 0$ 求出 a 、 b 的值，与 $2a + b = 1$ 联立求出 a 、 b 的值， a 、 b 是整数则符合，否则不符合，最后把符合条件的值代入 k 进行计算即可。



【详解】解：设 $2x^2 - 6y^2 + xy + kx + 6$ 能分解成： $(x+ay+c)(2x+by+d)$ ，

即 $2x^2+aby^2+(2a+b)xy+(2c+d)x+(ad+bc)y+cd$ ，

$\therefore cd=6$ ，

$\because 6=1 \times 6=2 \times 3=(-2) \times (-3)=(-1) \times (-6)$ ，

\therefore ① $c=1, d=6$ 时， $ad+bc=6a+b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$ ，

或 $c=6, d=1$ 时， $ad+bc=a+6b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=\frac{6}{11} \\ b=-\frac{1}{11} \end{cases}$ ，

② $c=2, d=3$ 时， $ad+bc=3a+2b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$ ，

或 $c=3, d=2$ 时， $ad+bc=2a+3b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ，

③ $c=-2, d=-3$ 时， $ad+bc=-3a-2b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$ ，

或 $c=-3, d=-2$ ， $ad+bc=-2a-3b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ，

④ $c=-1, d=-6$ 时， $ad+bc=-6a-b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$ ，

或 $c=-6, d=-1$ 时， $ad+bc=-a-6b=0$ ，与 $2a+b=1$ 联立求解得 $\begin{cases} a=\frac{6}{11} \\ b=-\frac{1}{11} \end{cases}$ ，

$\therefore c=2, d=3$ 时， $c=-2, d=-3$ 时，符合，

$\therefore k=2c+d=2 \times 2+3=7, k=2c+d=2 \times (-2)+(-3)=-7$ ，

\therefore 整数 k 的值是 $7, -7$ 。

故答案为： ± 7 。

【点睛】 本题考查因式分解的意义， 设成两个多项式的积的形式是解题的关键， 要注意 6 的所有分解结果， 还需要用 $a、b$ 进行验证， 注意不要漏解。

【题型 2 因式分解在有理数简算中的应用】

【例 2】 (2023 春·七年级课时练习) 利用因式分解计算：

(1) $(-2)^{101} + (-2)^{100}$;



(2) $3^{2021} - 3^{2020}$;

(3) $121 \times 0.13 + 12.1 \times 0.9 - 12 \times 1.21$;

(4) $202^2 + 98^2 + 202 \times 196$.

【答案】 (1) -2^{100}

(2) 2×3^{2020}

(3) 12.1

(4) 90000

【分析】 (1) 提取 $(-2)^{100}$ 后计算即可;

(2) 提取 3^{2020} 后计算即可;

(3) 原式变形为 $1.21 \times 13 + 1.21 \times 9 - 1.21 \times 12$, 然后提取 1.21 后计算即可;

(4) 利用完全平方公式计算即可.

【详解】 (1) 解: $(-2)^{101} + (-2)^{100}$

$$= (-2)^{100} \times (-2 + 1)$$

$$= -2^{100};$$

(2) 解: $3^{2021} - 3^{2020}$

$$= 3^{2020} \times (3 - 1)$$

$$= 2 \times 3^{2020};$$

(3) 解: $121 \times 0.13 + 12.1 \times 0.9 - 12 \times 1.21$

$$= 1.21 \times 13 + 1.21 \times 9 - 1.21 \times 12$$

$$= 1.21 \times (13 + 9 - 12)$$

$$= 1.21 \times 10$$

$$= 12.1;$$

(4) 解: $202^2 + 98^2 + 202 \times 196$

$$= 202^2 + 98^2 + 2 \times 202 \times 98$$

$$= (202 + 98)^2$$

$$= 300^2$$

$$= 90000.$$



【点睛】 本题考查了利用因式分解进行简便计算，掌握因式分解的方法是解题的关键。

【变式 2-1】 (2023 春·全国·七年级专题练习) 计算： $2020 \times 51^2 - 2020 \times 49^2$ 的结果是_____。

【答案】 404000

【分析】 先提取公因式 2020，再根据平方差公式分解后计算可得答案。

【详解】 $2020 \times 51^2 - 2020 \times 49^2$

$$= 2020 \times (51^2 - 49^2)$$

$$= 2020 \times (51 + 49) \times (51 - 49)$$

$$= 2020 \times 100 \times 2$$

$$= 404000,$$

故答案为：404000。

【点睛】 此题考查提公因式法，平方差公式，熟练掌握计算公式及因式分解的方法是解题的关键。

【变式 2-2】 (2023 春·七年级单元测试) 计算：(1) $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{9^2}) \times (1 - \frac{1}{10^2})$;

(2) $2021^2 - 2021 \times 4040 + 2020^2$

【答案】 (1) $\frac{11}{20}$; (2) 1

【分析】 (1) 先根据平方差公式分解，算出结果后计算乘法即可得到答案；

(2) 利用完全平方公式分解计算。

【详解】 (1) $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{9^2}) \times (1 - \frac{1}{10^2})$

$$= (1 - \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{9}) \times (1 + \frac{1}{9}) \times (1 - \frac{1}{10}) \times (1 + \frac{1}{10})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{10}$$

$$= \frac{11}{20};$$

(2) $2021^2 - 2021 \times 4040 + 2020^2$

$$= 2021^2 - 2 \times 2021 \times 2020 + 2020^2$$

$$= (2021 - 2020)^2$$

$$= 1.$$

【点睛】 此题考查因式分解进行有理数的混合计算，正确掌握因式分解的方法：平方差公式和完全平方公式



是解题的关键.

【变式 2-3】 (2023 春·七年级单元测试) 利用因式分解计算:

(1) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$

(2) $1 + 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \cdot \dots \cdot (5^{32} + 1)$

(3) $\frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+2})}$

【答案】 (1) 5050; (2) 5^{64} ; (3) $\frac{7}{4}$

【分析】 (1) 原式结合后, 利用平方差公式计算即可得到结果;

(2) 原式第二项分子分母乘以 $5^2 - 1$, 利用平方差公式化简, 计算即可得到结果;

(3) 原式计算后, 提取公因式, 约分即可得到结果.

【详解】解: (1) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$

$$= (100+99)(100-99) + (98+97)(98-97) + \dots + (4+3)(4-3) + (2-1)(2+1)$$

$$= 100+99+98+97+\dots+4+3+2+1$$

$$= 101 \times 50$$

$$= 5050;$$

(2) $1 + 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \cdot \dots \cdot (5^{32} + 1)$

$$= 1 + 24 \times \frac{5^2 - 1}{5^2 - 1} \times (5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \cdot \dots \cdot (5^{32} + 1)$$

$$= 1 + 5^{64} - 1$$

$$= 5^{64};$$

(3) $\frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+2})}$

$$\frac{2^{n+1} \times 8 - 2^{n+1}}{2^{n+1} \times 4}$$

$$\frac{2^{n+1} \times 7}{2^{n+1} \times 4}$$

$$\frac{7}{4}$$

【点睛】此题考查了因式分解的应用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

【题型 3 利用因式分解确定整除问题】

【例 3】 (2023 春·全国·七年级专题练习) 某兴趣小组为探究被 3 整除的数的规律, 提出了以下问题:

(1) 在 312, 465, 522, 458 中不能被 3 整除的数是_____;



(2) 一个三位数 \overline{abc} 表示百位、十位、个位上的数字分别是 a 、 b 、 c (a, b, c 为 $0-9$ 之间的整数, 且 $a \neq 0$), 那么 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. 若 $a + b + c$ 是 3 的倍数 (设 $a + b + c = 3t$, t 为正整数), 那么 \overline{abc} 能被 3 整除吗? 如果能, 请证明; 如果不能, 请说明理由.

(3) 若一个能被 3 整除的两位正整数 \overline{ab} (a, b 为 $1-9$ 之间的整数), 交换其个位上的数字与十位上的数字得到一个新数, 新数减去原数等于 54 , 求这个正整数 \overline{ab} .

【答案】 (1) 458; (2) 能, 见解析; (3) 39

【分析】 (1) 把各个数除以 3 即可得出结果;

(2) 由题意可列出式子 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, 进行整理可得: $3(t + 33a + 3b)$ 从而可判断;

(3) 根据题意可得: $\overline{ba} - \overline{ab} = 54$, 把各个数表示出来代入进行求解, 可以得出结果.

【详解】解: (1) $312 \div 3 = 104$, 能被 3 整除;

$465 \div 3 = 155$, 能被 3 整除;

$522 \div 3 = 174$, 能被 3 整除;

$458 \div 3 = 152 \dots 2$, 不能被 3 整除;

故答案为: 458;

(2) 此时 \overline{abc} 能被 3 整除,

证明: 若 $a + b + c$ 是 3 的倍数, 则令 $a + b + c = 3t$ (t 为正整数),

则有 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$,

$= (a + b + c) + (99a + 9b)$,

$= 3t + 3(33a + 3b)$,

$= 3(t + 33a + 3b)$,

故 \overline{abc} 能被 3 整除;

(3) $\because \overline{ab}$ 交换后为 \overline{ba} , 由题意得:

$\overline{ba} - \overline{ab} = 54$,

有 $(10b + a) - (10a + b) = 54$,

整理得: $9(b - a) = 54$,

得: $b - a = 6$,

$\because a, b$ 为 $1-9$ 之间的整数,

\therefore 有 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \end{cases}, \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \end{cases}$,



∴ \overline{ab} 能被 3 整除,

∴ 这个正整数是 39.

【点睛】 本题主要考查了因式分解的应用, 解答的关键是理解清楚题意, 表示出相应两位数或三位数.

【变式 3-1】 (2023 春·辽宁沈阳·七年级统考期末) 利用因式分解说明: 当 n 为自然数时, $(n+7)^2 - (n-5)^2$ 能被 24 整除.

【答案】 见解析

【分析】 将 $n+7$ 和 $n-5$ 分别看做整体, 用平方差公式进行因式分解, 所得的结果中含有因式 24, 即可求证.

【详解】 解: $(n+7)^2 - (n-5)^2$

$$= [(n+7) + (n-5)][(n+7) - (n-5)]$$

$$= 12(2n+2)$$

$$= 24(n+1),$$

∴ $(n+7)^2 - (n-5)^2$ 能被 24 整除.

【点睛】 本题主要考查了用平方差公式进行因式分解, 解题的关键是掌握平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

【变式 3-2】 (2023 春·湖南永州·七年级校联考期中) 已知 $4^{32} - 1$ 可以被 10 到 20 之间的某两个整数整除, 则这两个数是 ()

- A. 12, 14 B. 13, 15 C. 14, 16 D. 15, 17

【答案】 D

【分析】 把 $4^{32} - 1$ 因式分解即可看出可以被 10 至 20 之间的哪两个整数整除.

【详解】 $4^{32} - 1 = (4^{16} + 1)(4^{16} - 1)$

$$= (4^{16} + 1)(4^8 + 1)(4^8 - 1)$$

$$= (4^{16} + 1)(4^8 + 1)(4^4 + 1)(4^4 - 1)$$

$$= (4^{16} + 1)(4^8 + 1)(4^4 + 1)(4^2 + 1)(4^2 - 1)$$

$$= (4^{16} + 1)(4^8 + 1)(4^4 + 1) \times 17 \times 15$$

∴ 可以被 10 至 20 之间的 17 和 15 两个整数整除.

故选 D.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 熟练掌握平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解答本题的关键.

【变式 3-3】 (2023·河北衡水·统考三模) 某数学兴趣小组研究如下等式:



$$38 \times 32 = 1216,$$

$$53 \times 57 = 3021,$$

$$71 \times 79 = 5609,$$

$$84 \times 86 = 7224.$$

观察发现以上等式均是“十位数字相同，个位数字之和是 10 的两个两位数相乘，且积有一定的规律”。

(1)根据上述的运算规律，直接写出结果： $58 \times 52 =$ _____； $75^2 =$ _____。

(2)设其中一个数的十位数字为 a ，个位数字为 b ($a, b > 0$)，

①请用含 a, b 的等式表示这个运算规律，并用所学的数学知识证明；

②上述等式中，分别将左边两个乘数的十位和个位调换位置，得到新的两个两位数相乘（如： 38×32 调换为 83×23 ）。若分别记新的两个两位数的乘积为 m ，①中的运算结果为 n ，求证： $m - n$ 能被 99 整除。

【答案】 (1)3016; 5625

(2)① $(10a + b)(10a + 10 - b) = 100a(a + 1) + b(10 - b)$ ；证明见解析；②见解析

【分析】 (1) 根据上述的运算规律计算，即可求解；

(2)①根据题意可得这两个两位数分别为 $10a + b, 10a + 10 - b$ ，从而得到这个运算规律为 $(10a + b)(10a + 10 - b) = 100a(a + 1) + b(10 - b)$ ，然后分别计算等式的左右两边，即可；②由①得： $n = 100a^2 + 100a + 10b - b^2$ ，可得新的两个两位数分别为 $10b + a, 10(10 - b) + a$ ，进而得到 $m = (10b + a)[10(10 - b) + a]$ ，然后计算出 $m - n$ ，即可。

【详解】 (1) 解：根据题意得： $58 \times 52 = (5 \times 6) \times 100 + 8 \times 2 = 3016$ ，

$$75^2 = (7 \times 8) \times 100 + 5 \times 5 = 5625;$$

故答案为：3016; 5625

(2) 解：①∵其中一个数的十位数字为 a ，个位数字为 b ($a, b > 0$)，

∴另一个数的十位数字为 a ，个位数字为 $10 - b$ ，

∴这两个两位数分别为 $10a + b, 10a + 10 - b$ ，

根据题意得：这个运算规律为 $(10a + b)(10a + 10 - b) = 100a(a + 1) + b(10 - b)$ ，

证明：左边 $= 100a^2 + 10ab + 100a + 10b - 10ab - b^2$

$$= 100a^2 + 100a + 10b - b^2$$

右边 $= 100a^2 + 100a + 10b - b^2$ ，



∴ 左边=右边;

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 得: } n = 100a^2 + 100a + 10b - b^2,$$

∴ 分别将左边两个乘数的十位和个位调换位置, 得到新的两个两位数相乘,

∴ 新的两个两位数分别为 $10b + a$, $10(10 - b) + a$,

$$\therefore m = (10b + a)[10(10 - b) + a]$$

$$= (10b + a)(100 - 10b + a)$$

$$= 1000b + 100a - 100b^2 - 10ab + 10ab + a^2$$

$$= 1000b - 100b^2 + 100a + a^2,$$

$$\therefore m - n = (1000b - 100b^2 + 100a + a^2) - (100a^2 + 100a + 10b - b^2)$$

$$= 1000b - 100b^2 + 100a + a^2 - 100a^2 - 100a - 10b + b^2$$

$$= -99a^2 - 99b^2 + 990b,$$

$$= -99(a^2 + b^2 + 10b),$$

∴ a, b 为正整数,

∴ $a^2 + b^2 + 10b$ 为整数,

∴ $m - n$ 能被 99 整除.

【点睛】 本题主要考查了整式的混合运算, 因式分解的应用, 明确题意, 准确得到规律是解题的关键.

【题型 4 利用添项进行因式分解】

【例 4】 (2023 春·陕西榆林·七年级统考期末) 19 世纪的法国数学家苏菲·热门给出了一种分解因式 $x^4 + 4$ 的方法: 他抓住了该式只有两项, 而且属于平方和 $(x^2)^2 + 2^2$ 的形式, 要使用公式就必须添一项 $4x^2$, 随即将此项 $4x^2$ 减去, 即可得 $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, 人们为了纪念苏菲·热门给出这一解法, 就把它叫做“热门定理”.

根据以上方法, 把下列各式因式分解:

(1) $4x^4 + y^4$;

(2) $a^2 - 4am - n^2 + 4mn$.

【答案】 (1) $(2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy)$;

(2) $(a - n)(a - 4m + n)$.

【分析】 (1) 根据苏菲·热门的做法, 将原式配上 $4x^2y^2$ 后, 根据完全平方公式和平方差公式即可进行因式



分解;

(2) 先分组, 再利用提公因式法因式分解.

【详解】(1) 原式 = $4x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2$

$$= (2x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$$

$$= (2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy);$$

(2) 原式 = $a^2 - 4am + 4m^2 - 4m^2 - n^2 + 4mn$

$$= (a^2 - 4am + 4m^2) - (4m^2 + n^2 - 4mn)$$

$$= (a - 2m)^2 - (2m - n)^2$$

$$= (a - 2m + 2m - n)(a - 2m - 2m + n)$$

$$= (a - n)(a - 4m + n).$$

【点睛】本题考查因式分解, 掌握平方差公式、完全平方公式的结构特征是正确应用的前提, 理解苏菲·热门的做法是正确进行因式分解的关键.

【变式 4-1】(2023 春·广东佛山·七年级专题练习) 添项、拆项是因式分解中常用的方法, 比如分解多项式 $a^2 - 1$

可以用如下方法分解因式:

$$\textcircled{1} a^2 - 1 = a^2 - a + a - 1 = a(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(a + 1);$$

又比如多项式 $a^3 - 1$ 可以这样分解:

$$\textcircled{2} a^3 - 1 = a^3 - a^2 + a^2 - a + a - 1 = a^2(a - 1) + a(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1);$$

仿照以上方法, 分解多项式 $a^5 - 1$ 的结果是_____.

【答案】 $(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

【分析】 直接根据添项、拆项的方法进行因式分解即可.

【详解】 解: $a^5 - 1$

$$= a^5 - a^4 + a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a + a - 1$$

$$= a^4(a - 1) + a^3(a - 1) + a^2(a - 1) + a(a - 1) + a - 1$$

$$= (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1),$$

故答案为: $(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

【点睛】 本题考查添项与拆项法对多项式进行因式分解, 解题的关键是熟练运用提公因式法, 也考查了学生的观察能力和整体思想.

【变式 4-2】 (2023 春·湖南常德·七年级统考期中) 阅读与思考



在因式分解中，有些多项式看似不能分解，如果添加某项，可以达到因式分解的效果，此类因式分解的方法称之为“添项法”。

例如： $a^4 + 4 = a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$ 。

参照上述方法，我们可以对 $a^3 + b^3$ 因式分解，下面是因式分解的部分解答过程。

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = (a^3 + a^2b) - (a^2b - b^3) = (a + b) \cdot a^2 - (a + b) \cdot b(a - b) = \dots$$

任务：

(1)请根据以上阅读材料补充完整对 $a^3 + b^3$ 因式分解的过程。

(2)已知 $a + b = 2$ ， $ab = -4$ ，求 $a^3 + b^3$ 的值。

【答案】 (1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) $a^3 + b^3 = 32$

【分析】 (1) 在题干的基础上再提取公因式 $(a + b)$ ，整理即可；

(2) 由(1)可知求出 $a^2 - ab + b^2$ 的值即可求出 $a^3 + b^3$ 的值。将 $a^2 - ab + b^2$ 变形为 $(a + b)^2 - 3ab$ ，再代入 $a + b$ 和 ab 的值即得出 $a^2 - ab + b^2$ 的值，由此即得出结果。

【详解】 (1) $a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3$

$$= (a^3 + a^2b) - (a^2b - b^3)$$

$$= (a + b) \cdot a^2 - b(a + b) \cdot (a - b)$$

$$= (a + b) \cdot [a^2 - b(a - b)]$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(2) \because a^2 - ab + b^2$$

$$= (a + b)^2 - 3ab$$

$$= 2^2 - 3 \times (-4)$$

$$= 16$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 2 \times 16 = 32.$$

【点睛】 本题考查因式分解，代数式求值。读懂题干，理解题意，掌握因式分解的方法是解题关键。

【变式 4-3】 (2023·重庆九龙坡·重庆市育才中学校考三模) 阅读理解：



润禾托管

添项法是代数变形中非常重要的一种方法，在整式运算和因式分解中使用添项法往往会起到意想不到的作用，例如：

例 1：计算 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

解：原式 $=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$

.....

$$=\frac{3^{64}-1}{2}$$

例 2：因式分解： x^4+x^2+1

解：原式 $=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$$=(x^2+1)^2-x^2$$

$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

根据材料解决下列问题：

(1)计算： $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdots(1+\frac{1}{2^{512}})$ ；

(2)小明在作业中遇到了这样一个问题，计算 $\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}$ ，通过思考，他发现计算式中的式子可以用代数式之 x^4+4 来表示，所以他决定先对 x^4+4 先进行因式分解，最后果然发现了规律；轻松解决了这个计算问题.请你根据小明的思路解答下列问题：

①分解因式： x^4+4 ；

②计算： $\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}$.

【答案】 (1) $\frac{2^{1024}-1}{2^{1023}}$ ； (2)① $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ ； ② $\frac{1}{52^2+1}$.

【分析】 (1)配成平方差公式只要在前面乘以 $2\times(1-\frac{1}{2})$ 即可，连续使用平方差公式，得出最后结果，

(2)①根据配方法在原式的基础上 $(+4x^2-4x^2)$ ，转化为完全平方公式，再利用拆项法配方，最后化为两个因式的积，

②根据 x^4+4 的分解结果，分别求出当 $x=1, x=3, x=5, x=7, x=9, x=11\cdots$ 所对应的 x^4+4 个结果，从而得到一个规律，再代入求值即可.



【详解】解：(1)原式 $=2\times(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdots(1+\frac{1}{2^{512}})$

$$=2\times(1-\frac{1}{2^{1024}})$$

$$=\frac{2^{1024}-1}{2^{1023}}$$

(2)① $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2),$$

② $\because x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$$\therefore x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=[(x+1)^2+1]\cdot[(x-1)^2+1]$$

$$\text{原式}=\frac{(0^2+1)(2^2+1)(4^2+1)(6^2+1)(8^2+1)\cdots(50^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)(6^2+1)(8^2+1)\cdots(50^2+1)(52^2+1)}=\frac{1}{52^2+1}$$

【点睛】考查因式分解，平方差公式、完全平方公式等知识，掌握公式，通过因式分解的变形，找出存在的规律是解决问题的关键。

【题型 5 利用拆项进行因式分解】

【例 5】（2023 春·七年级课时练习）阅读理解，并解答下面的问题：

拆项法原理：在多项式乘法运算中，常经过整理、化简，通常将几个同类项合并为一项，或相互抵消为零。反过来，在对某些多项式分解因式时，需要恢复那些被合并或相互抵消的项，即把多项式中的某一项拆成两项或多项（拆项）。

例：分解因式： x^2+4x+3

解：原式 $=x^2+x+3x+3$ 把 $4x$ 分成 x 和 $3x$ ，

$= (x^2+x) + (3x+3)$ 将原式分成两组

$=x(x+1) + 3(x+1)$ 对每一组分别提取公因式

$= (x+3)(x+1)$ 继续提公因式

请类比上面的示例，分解因式： x^2+5x+6

【答案】 $(x+2)(x+3)$

【分析】根据题意中的分解因式的方法求解即可。

【详解】解：原式 $=x^2+2x+3x+6$

$$= (x^2+2x) + (3x+6)$$



$$= x(x+2) + 3(x+2)$$

$$= (x+2)(x+3).$$

【点睛】 题目主要考查多项式乘法及因式分解，理解题中分解因式的方法是解题关键。

【变式 5-1】 (2023 春·黑龙江鸡西·七年级校考期末) 利用拆项法，分解因式： $x^2 - 6x - 7$ ；

【答案】 $(x+1)(x-7)$

【详解】 解： $x^2 - 6x - 7$

$$= x^2 - 6x + 9 - 16$$

$$= (x-3)^2 - 4^2$$

$$= (x-3+4)(x-3-4)$$

$$= (x+1)(x-7);$$

【点睛】 本题考查因式分解、完全平方公式、平方差公式，熟记公式，理解题中的分解因式方法并能灵活运用是解答的关键。

【变式 5-2】 (2023 春·陕西榆林·七年级统考期末) 利用拆项法，解决下列问题：

(1) 分解因式： $x^2 - 6x + 5$ ；

(2) 分解因式： $a^2 + 4ab - 5b^2$ 。

【答案】 (1) $(x-1)(x-5)$

(2) $(a+5b)(a-b)$

【分析】 (1) 将 5 拆解成 $9 - 4$ ，再根据完全平方公式得 $(x-3)^2 - 2^2$ ，然后利用平方差公式进一步分解。

(2) 将 $-5b^2$ 拆解成 $4b^2 - 9b^2$ ，再根据完全平方公式得 $(a+2b)^2 - 9b^2$ ，然后利用平方差公式进一步分解。

【详解】 (1) 原式 $= x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-1)(x-5)$

(2) 原式 $= a^2 + 4ab + 4b^2 - 9b^2 = (a+2b)^2 - 9b^2 = (a+2b+3b)(a+2b-3b) = (a+5b)(a-b)$

【点睛】 本题考查了因式分解的应用，解题时要注意在变形的过程中不要改变式子的值。

【变式 5-3】 (2023 春·七年级单元测试) 阅读理解题：

拆项法是因式分解中一种技巧较强的方法，它通常是把多项式中的某一项拆成几项，再分组分解，因而有时需要多次实验才能成功，例如把 $x^3 - 3x^2 + 4$ 分解因式，这是一个三项式，最高次项是三次项，一次项系数为零，本题既没有公因式可提取，又不能直接应用公式，因而考虑制造分组分解的条件，把常数项拆成 1 和 3，原式就变成 $(x^3 + 1) - (3x^2 - 3)$ ，再利用立方和与平方差先分解，解法如下：



$$\text{原式} = x^3 + 1 - (3x^2 - 3) = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3(x + 1)(x - 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = (x + 1)(x - 2)^2$$

$$\text{公式: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

根据上述论法和解法,

(1) 因式分解: $x^3 + x^2 - 2$;

(2) 因式分解: $x^3 - 7x + 6$;

(3) 因式分解: $x^4 + x^2 + 1$.

【答案】 (1) $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$; (2) $(x - 1)(x + 3)(x - 2)$; (3) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

【分析】 (1) 将原式拆成 $(x^3 - 1) + (x^2 - 1)$, 然后分别利用立方差和平方差公式因式分解后再提起公因式 $x-1$ 即可;

(2) 将原式拆成 $x^3 - 1 - 7x + 7$, 然后前两项利用立方差公式因式分解, 后两项提取公因式即可确定答案;

(3) 将原式拆成 $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$, 然后利用平方差公式因式分解即可.

【详解】 解: (1) $x^3 + x^2 - 2 = (x^3 - 1) + (x^2 - 1)$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$$

(2) $x^3 - 7x + 6 = x^3 - 1 - 7x + 7$

$$= (x^3 - 1) - 7(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 7(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 6)$$

$$= (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

(3) $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 解题的关键是仔细阅读题目, 从题目中得到因式分解的方法, 难度不大.

【题型 6 利用因式分解确定三角形的形状】

【例 6】 (2023 春·全国·七年级专题练习) 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 且满足 $a^2c^2 - b^2c^2 = a^4 - b^4$, 则 $\triangle ABC$



为_____三角形.

【答案】 等腰或直角或等腰直角.

【分析】 首先提取公因式, 进而利用平方差公式分解因式, 然后分三种情况进行讨论.

【详解】 $\because a^2c^2 - b^2c^2 = a^4 - b^4,$

$$\therefore c^2(a+b)(a-b) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b),$$

\therefore 当 $a=b$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

当 $a \neq b$, 则 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形,

当 $a=b$, 且 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角或等腰直角三角形.

故答案为: 等腰或直角或等腰直角.

【点睛】 本题考查了用提公因式法与平方差公式分解因式, 用提公因式法与平方差公式分解因式得到 a, b, c 的关系式是解题的关键, 注意考虑问题要全面.

【变式 6-1】 (2023 春·河南郑州·七年级校联考期中) 若 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足 $a^2 - ab - ac + bc = 0$, 则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

【答案】 等腰

【分析】 等式左边因式分解后, 利用两式相乘积为 0, 两因式中至少有一个为 0 即可确定 a, b, c 的关系, 即可作出判断.

【详解】 $\because a^2 - ab - ac + bc = 0,$

$$\therefore a(a-c) - b(a-c) = 0,$$

$$\therefore (a-b)(a-c) = 0,$$

$$\therefore a-b=0 \text{ 或 } a-c=0,$$

$$\therefore a=b \text{ 或 } a=c,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,

故答案为: 等腰.

【点睛】 本题考查因式分解的方法-分组分解法, 熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

【变式 6-2】 (2023 春·全国·七年级专题练习) 已知: a, b, c 是三角形的三边, 且满足 $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. 求证: 这个三角形是等边三角形.

【答案】 见解析



【分析】根据完全平方式将原式变形为 $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$ ，结合平方的非负性即可计算得到正确答案.

【详解】解：∵ $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$

$$= (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)c$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

∴原式可变形为： $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

∵ $(a-b)^2 \geq 0, (a-c)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$

$$\therefore a-b=0, a-c=0, b-c=0$$

$$\therefore a=b, a=c, b=c$$

$$\therefore a=b=c$$

即这个三角形是等边三角形.

【点睛】本题考查完全平方式的应用，平方非负性的应用，根据相关知识点灵活应用是解题关键.

【变式 6-3】（2023 春·七年级统考课时练习）已知等腰三角形 ABC 的三边长 a 、 b 、 c 均为整数，且满足 $a+bc+b+ca=24$ ，则这样的三角形共有_____个.

【答案】3

【分析】先将 $a+bc+b+ca=24$ 可以化为 $(a+b)(c+1)=24$ ，然后根据 24 分解为大于等于 2 的两个正整数的乘积有几种组合，讨论是否符合题意即可得出答案.

【详解】解：∵ $a+bc+b+ca=24$,

$$\therefore (a+b) + (bc+ca) = 24,$$

$$\therefore (c+1)(b+a) = 24,$$

∵等腰 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 均为整数，

∴ $a+b, c+1$ 为大于或等于 2 的正整数，

那么 24 分解为大于等于 2 的两个正整数的乘积有几种组合 $2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2$,

① $a+b=2, c+1=12$ 时， $c=11, a+b=2$ ，无法得到满足等腰三角形的整数解；

② $a+b=3, c+1=8$ 时， $c=7, a+b=3$ ，无法得到满足等腰三角形的整数解；

③ $a+b=4, c+1=6$ 时， $c=5, a+b=4$ ，无法得到满足等腰三角形的整数解；



④ $a+b=6$, $c+1=4$ 时, $c=3$, $a+b=6$, 可以得到 $a=b=c=3$, 可以组成等腰三角形;

⑤ $a+b=8$, $c+1=3$ 时, $c=2$, $a+b=8$, 可得 $a=b=4$, $c=2$, 可以组成等腰三角形;

⑥ $a+b=12$, $c+1=2$ 时, 可得 $a=b=6$, $c=1$, 可以组成等腰三角形.

\therefore 一共有 3 个这样的三角形.

故答案是: 3.

【点睛】 本题考查因式分解的应用及等腰三角形的知识, 难度一般, 在解答本题时将原式化为因式相乘的形式及将 24 分解为大于等于 2 的两个正整数的乘积有几种组合是关键.

【题型 7 利用因式分解求最值】

【例 7】 (2023 春·湖南株洲·七年级株洲二中校考期末) 整数 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三条边 ($a < b < c$), 若 $\triangle ABC$ 的周长为 30, 那么 $c^2 + 18a + 18b - 446$ 的最小值为_____.

【答案】 17

【分析】 根据三角形的周长得到 $a + b = 30 - c$, 整体代入 $c^2 + 18a + 18b - 446$, 得到 $(c - 9)^2 + 13$, 利用三角形的三边关系求出 $10 < c < 15$, 根据 c 是整数, 利用完全平方式的非负性求出最小值即可.

【详解】 解: $\because \triangle ABC$ 的周长为 30,

$$\therefore a + b + c = 30,$$

$$\therefore a + b = 30 - c,$$

而 $a + b > c$, 则 $30 - c > c$,

$$\therefore c < 15,$$

$$\because a < b < c,$$

$$\therefore 10 < c < 15,$$

$$\therefore c^2 + 18a + 18b - 446$$

$$= c^2 + 18(a + b) - 446$$

$$= c^2 + 18(30 - c) - 446$$

$$= (c - 9)^2 + 13$$

$\because c$ 是整数,

\therefore 当 $c = 11$ 时, $c^2 + 18a + 18b - 446$ 的值最小, 且为 17,

故答案为: 17.

【点睛】 本题考查了三角形的三边关系, 完全平方式, 解题的关键是熟练掌握完全平方公式, 正确求出自变



量 c 的取值范围.

【变式 7-1】（2023 春·辽宁阜新·七年级校考阶段练习）利用完全平方公式因式分解在数学中的应用，请回答下列问题：

(1) 因式分解： $x^2 - 4x + 4 =$ _____.

(2) 填空：当 $x =$ _____ 时，代数式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ；

(3) 阅读如下材料，完成下列问题：

对于二次三项式求最值问题，有如下示例：

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3 = (x - 1)^2 + 2.$$

因为 $(x - 1)^2 \geq 0$ ，所以 $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$ ，所以当 $x = 1$ 时，原式的最小值为 2.

① 代数式 $x^2 + 10x + 2$ 的最小值是_____；

② 拓展与应用：求代数式 $a^2 + b^2 - 4a - 6b + 15$ 的最小值（模仿示例详细说明）.

【答案】(1) $(x - 2)^2$

(2) 3

(3) ① -23；② 2

【分析】(1) 利用完全平方公式分解因式即可；

(2) 利用完全平方公式把原式分解因式即可得到答案；

(3) ① 仿照题意求解即可；

② 仿照题意求解即可.

【详解】(1) 解： $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ ，

故答案为： $(x - 2)^2$ ；

(2) $\because x^2 - 6x + 9 = 0$,

$$\therefore (x - 3)^2 = 0,$$

$$\therefore x = 3,$$

故答案为：3；

(3) ① $x^2 + 10x + 2 = x^2 + 10x + 25 - 23 = (x + 5)^2 - 23$,

$$\because (x + 5)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x + 5)^2 - 23 \geq -23,$$



∴当 $x = -5$ 时，原式的最小值为 -23 ；

故答案为： -23 ；

$$\textcircled{2} a^2 + b^2 - 4a - 6b + 15$$

$$= a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 + 2$$

$$= (a - 2)^2 + (b - 3)^2 + 2,$$

$$\because (a - 2)^2 \geq 0, (b - 3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a - 2)^2 + (b - 3)^2 + 2 \geq 2,$$

∴当 $a = 2, b = 3$ 时，原式的最小值为 2 。

【点睛】本题主要考查了完全平方公式分解因式的应用，正确理解题意是解题的关键。

【变式 7-2】（2023 春·七年级课时练习）已知 A 为多项式，且 $A = -2x^2 - y^2 + 12x + 4y + 1$ ，则 A 有（ ）

- A. 最大值 23 B. 最小值 23 C. 最大值 -23 D. 最小值 -23

【答案】A

【分析】利用分组分解法，变为完全平方解答即可。

$$\text{【详解】 } A = -2x^2 - y^2 + 12x + 4y + 1$$

$$= -2x^2 + 12x - 18 - y^2 + 4y - 4 + 1 + 18 + 4$$

$$= -2(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) + 23$$

$$= -2(x - 3)^2 - (y - 2)^2 + 23$$

$$\because -2(x - 3)^2 \leq 0, -(y - 2)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -2(x - 3)^2 - (y - 2)^2 + 23 \leq 23,$$

∴多项式的最大值是 23 ，

故选 A。

【点睛】本题考查了因式分解的应用，熟练掌握 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 是解答本题的关键。

【变式 7-3】（2023·安徽亳州·七年级专题练习）求 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 4y + 10$ 的最小值_____。

【答案】6

【分析】先对 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 4y + 10$ 进行变换，再根据平方的非负性质进行解答即可。

$$\text{【详解】解： } x^2 - 6xy + 10y^2 - 4y + 10$$

$$= x^2 - 6xy + 9y^2 + y^2 - 4y + 4 + 6$$

$$= (x - 3y)^2 + (y - 2)^2 + 6,$$



$$\because (x-3y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x-3y)^2 + (y-2)^2 + 6 \geq 6, \text{ 即 } x^2 - 6xy + 10y^2 - 4y + 10 \text{ 的最小值为 } 6,$$

故答案为：6.

【点睛】 本题考查了因式分解、完全平方公式和平方的非负性质，熟练运用完全平方公式是解题的关键.

【题型 8 因式分解在新定义问题中的运用】

【例 8】 (2023 春·全国·七年级期末) 整式乘法与多项式因式分解是既有联系又有区别的两种变形.

例如, $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ 是单项式乘多项式的法则; 把这个法则反过来, 得到 $ab+ac+ad = a(b+c+d)$, 这是运用提取公因式法把多项式因式分解.

又如 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 、 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 是多项式的乘法公式; 把这些公式反过来, 得到 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 、 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 这是运用公式法把多项式因式分解.

有时在进行因式分解时, 以上方法不能直接运用, 观察甲、乙两名同学的进行的因式分解.

$$\begin{aligned} \text{甲: } & x^2 - xy + 4x - 4y \\ &= (x^2 - xy) + (4x - 4y) \text{ (分成两组)} \\ &= x(x - y) + 4(x - y) \text{ (分别提公因式)} \\ &= (x - y)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{乙: } & a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \\ &= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) \text{ (分成两组)} \\ &= a^2 - (b - c)^2 \text{ (运用公式)} \\ &= (a + b - c)(a - b + c) \end{aligned}$$

请你在他们解法的启发下, 完成下面的因式分解

问题一: 因式分解:

(1) $m^3 - 2m^2 - 4m + 8$;

(2) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$.

问题二: 探究

对 x 、 y 定义一种新运算 F , 规定: $F(x, y) = (mx + ny)(3x - y)$ (其中 m, n 均为非零常数). 当 $x^2 \neq y^2$ 时, $F(x, y) = F(y, x)$ 对任意有理数 x, y 都成立, 试探究 m, n 的数量关系.

【答案】 问题一: 因式分解: (1) $(m-2)^2(m+2)$ (2) $(x-y-3)(x-y+3)$; 问题二: 探究 m, n 的数量关系 $3m + n = 0$.



【分析】问题一：因式分解：（1）按系数成比分组 $m^2(m-2) - 4(m-2)$ 提公因式 $(m-2)(m^2-4)$ 再利用平方差公式因式分解，最后整理为 $(m-2)^2$ 即可；

（2）按完全平方公式分组 $(x^2 - 2xy + y^2)$ ，然后利用公式变形为 $(x-y)^2$ 再利用平方差公式因式分解即可；

问题二：探究：先求 $F(x,y) = 3mx^2 + (3n-m)xy - ny^2$ ，再求 $F(y,x) = 3my^2 + (3n-m)xy - mx^2$ ，由 $F(x,y) = F(y,x)$ ，可得 $3mx^2 + (3n-m)xy - ny^2 = 3my^2 + (3n-m)xy - mx^2$ ，合并同类项 $(3m+n)x^2 = (3m+n)y^2$ ，由 $x^2 \neq y^2$ ，对任意有理数 x, y 都成立，可得 $3m+n=0$ 即可。

【详解】解：问题一：因式分解：

$$\begin{aligned} (1) & m^3 - 2m^2 - 4m + 8 \\ &= m^2(m-2) - 4(m-2), \\ &= (m-2)(m^2-4) \\ &= (m-2)(m-2)(m+2), \\ &= (m-2)^2(m+2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & x^2 - 2xy + y^2 - 9 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) - 9 \\ &= (x-y)^2 - 9 \\ &= [(x-y) - 3][(x-y) + 3] \\ &= (x-y-3)(x-y+3); \end{aligned}$$

问题二：探究 $F(xy) = (mx+m)(3x-y) = 3mx^2 + (3n-m)xy - ny^2$ ，

$$F(y,x) = (my+m)(3y-x) = 3my^2 + (3n-m)xy - nx^2,$$

$$\because F(x,y) = F(y,x),$$

$$\therefore 3mx^2 + (3n-m)xy - ny^2 = 3my^2 + (3n-m)xy - nx^2,$$

$$\therefore 3ma^2 - 3my^2 + mx^2 - my^2 = 0,$$

$$\therefore (3m+n)x^2 = (3m+n)y^2,$$

$\because x^2 \neq y^2$ ，对任意有理数 x, y 都成立，

$$\therefore 3m+n=0,$$

$\therefore m, n$ 的数量关系 $3m+n=0$ 。

【点睛】本题考查分组因式分解的方法，新定义实数运算，利用因式分解与多项式乘法之间关系，掌握分组因式分解的方法，利用因式分解与多项式乘法之间关系，构造恒等式找出 m 与 n 关系是解题关键。



【变式 8-1】定义：任意两个数 a, b ，按规则 $c = ab + a + b$ 扩充得到一个新数 c ，称所得的新数 c 为“如意数”。

- (1) 若 $a = 2, b = -1$ ，直接写出 a, b 的“如意数” c ；
 (2) 如果 $a = m - 4, b = -m$ ，求 a, b 的“如意数” c ，并证明“如意数” $c \leq 0$ ；
 (3) 已知 $a = x^2 (x \neq 0)$ ，且 a, b 的“如意数”为 $c = x^4 + 4x^2 + 2$ ，请用含 x 的式子表示 b 。

【答案】(1) $c = -1$ ；(2) 证明见解析；(3) $b = x^2 + 2$ 。

【分析】(1) 根据“如意数”的定义即可求出 c ；

(2) 先根据“如意数”的定义列出 c 的代数式，然后对等式右边因式分解，结合乘方的非负性即可证明 $c \leq 0$ ；

(3) 根据“如意数”的定义构建方程，求出 b 即可。

【详解】解：(1) 根据题意， $c = 2 \times (-1) + 2 + (-1) = -2 + 2 - 1 = -1$ ；

(2) 根据题意， $c = (m - 4) \cdot (-m) + (m - 4) + (-m) = -m^2 + 4m - 4 = -(m - 2)^2$ ，

$\because (m - 2)^2 \geq 0$ ，

$\therefore -(m - 2)^2 \leq 0$ 即 $c \leq 0$ ；

(3) $\because c = ab + a + b, a = x^2 (x \neq 0), c = x^4 + 4x^2 + 2$ ，

$\therefore x^4 + 4x^2 + 2 = bx^2 + x^2 + b$ ，

$\therefore b(x^2 + 1) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ ，

$\because x \neq 0$ ，

$\therefore x^2 + 1 \neq 0$ ，

$\therefore b = x^2 + 2$ 。

【点睛】本题考查因式分解的应用.能根据“如意数”的定义去计算（或列式）是解决此题的先决条件，能灵活运用因式分解法因式分解是解决此题的关键.尤其在(3)中能用因式分解法将 $x^4 + 3x^2 + 2$ 化为 $(x^2 + 2)(x^2 + 1)$ 是解决此问的关键。

【变式 8-2】(2023 春·河南周口·七年级校考期末) 设 m, n 是实数，定义一种新运算： $m \otimes n = (m - n)^2$ 。下

面四个推断正确的是 ()

A. $m \otimes n = n \otimes m$

B. $(m \otimes n)^2 = m^2 \otimes n^2$

C. $(m \otimes n) \otimes p = m \otimes (n \otimes p)$

D. $m \otimes (n - p) = (m \otimes n) - (m \otimes p)$

【答案】A

【分析】各式利用题中的新定义判断即可。

【详解】解：根据题中的新定义得：



- A. $m \otimes n = (m - n)^2$, $n \otimes m = (n - m)^2$, 故推断正确;
- B. $(m \otimes n)^2 = [(m - n)^2]^2 = (m - n)^4$, $m^2 \otimes n^2 = (m^2 - n^2)^2 = [(m + n)(m - n)]^2 = (m + n)^2(m - n)^2$, 故推断不正确;
- C. $(m \otimes n) \otimes p = (m - n)^2 \otimes p = [(m - n)^2 - p]^2$, $m \otimes (n \otimes p) = m \otimes (n - p)^2 = [m - (n - p)^2]^2$, 故推断不正确;
- D. $m \otimes (n - p) = [m - (n - p)]^2 = (m - n + p)^2$, $(m \otimes n) - (m \otimes p) = (m - n)^2 - (m - p)^2 = [(m - n) + (m - p)][(m - n) - (m - p)] = (2m - n - p)(p - n)$, 故推断不正确.
- 故选: A.

【点睛】 此题考查了整式的运算和因式分解, 弄清题中的新定义是解本题的关键.

【变式 8-3】 (2023 春·江苏·七年级期末) 定义: 若一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是正整数) 的形式, 则称这个数为“完美数”.

例如: 因为 $13 = 3^2 + 2^2$, 所以 13 是“完美数”;

再如: 因为 $a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2$, 所以 $a^2 + 2ab + 2b^2$ 也是“完美数”.

- (1) 请直接写出一个小于 10 的“完美数”, 这个“完美数”是_____;
- (2) 判断 53_____ (请填写“是”或“否”) 为“完美数”;
- (3) 已知 $M = x^2 + 4x + k$ (x 是整数, k 是常数), 要使 M 为“完美数”, 试求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由;
- (4) 如果数 m, n 都是“完美数”, 试说明 mn 也是“完美数”.

【答案】 (1) 2 或 5 或 8; (2) 是; (3) $k=5$, 理由见解答过程; (4) 见解析

【分析】 (1) $2=1^2+1^2$, $5=2^2+1^2$, $8=2^2+2^2$, 这些数都是小于 10 的“完美数”;

(2) 利用 $53=2^2+7^2$ 即可判断;

(3) 由 $M=x^2+4x+k$ 得 $M=(x+2)^2+k-4$, 则使 $k-4$ 为一个完全平方数即可;

(4) 设 $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$, 则 $mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, 进行整理可得: $mn=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, 从而可判断.

【详解】 解: (1) 根据题意可得: $2=1^2+1^2$, $5=2^2+1^2$, $8=2^2+2^2$,

故 2, 5, 8 都是“完美数”, 且都小于 10,

故答案为: 2 或 5 或 8 (写一个即可);

(2) $53=2^2+7^2$, 故 53 是“完美数”,



故答案为：是；

(3) $k=5$ (答案不唯一) ,

理由： $\because M=x^2+4x+k$

$$\therefore M=x^2+4x+4+k-4$$

$$M=(x+2)^2+k-4$$

则当 $k-4$ 为完全平方数时， M 为“完美数”，如当 $k-4=1$ 时，解得： $k=5$ 。

(4) 设 $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$,

则有 $mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

$$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2abcd-2abcd$$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

故 mn 是一个“完美数”。

【点睛】 本题考查了因式分解的应用，完全平方公式的运用，阅读理解题目表述的意思是本题的关键。

【题型 9 因式分解在阅读理解中的运用】

【例 9】(2023 春·七年级统考期末)(2023 春·陕西榆林·七年级统考期末)阅读下列材料：将一个形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式因式分解时，如果能满足 $q = mn$ 且 $p = m + n$ ，则可以把 $x^2 + px + q$ 因式分解成 $(x + m)(x + n)$ 。

例如：(1) $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ ；(2) $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$ 。

根据材料，把下列式子进行因式分解。

(1) $x^2 - 6x + 8$;

(2) $x^2 - 2x - 15$;

(3) $(x - 4)(x + 7) + 18$ 。

【答案】 (1) $(x - 2)(x - 4)$

(2) $(x + 3)(x - 5)$

(3) $(x - 2)(x + 5)$

【分析】 根据 $x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$ 进行解答即可。

【详解】 (1) 解： $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$;



(2) 解: $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$;

(3) 解: $(x - 4)(x + 7) + 18 = x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

【点睛】 本题考查了十字相乘法分解因式, 运用十字相乘法分解因式时, 要仔细观察, 尝试, 并体会它实质是二项式乘法的逆过程, 注意分解因式一定要彻底.

【变式 9-1】(2023 春·湖南湘潭·七年级统考期末)材料 1: 由多项式乘法, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, 将该式子从右到左使用, 即可对形如 $x^2 + (a + b)x + ab$ 的多项式进行因式分解: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$. 多项式 $x^2 + (a + b)x + ab$ 的特征是二次项系数为 1, 常数项为某两数之积, 一次项系数为这两数之和.

材料 2: 因式分解: $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$, 将“ $x + y$ ”看成一个整体, 令 $x + y = A$, 则原式 $= A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2$, 再将“ A ”还原得: 原式 $= (x + y + 1)^2$.

上述用到整体思想, 整体思想是数学解题中常见的一种思想方法.

请你根据以上阅读材料解答下列问题:

(1) 根据材料 1 将 $x^2 + 8x + 7$ 因式分解;

(2) 根据材料 2 将 $(x - y)^2 - 12(x - y) + 36$ 因式分解;

(3) 结合材料 1 和材料 2, 将 $(m^2 - 4m)(m^2 - 4m + 2) - 8$ 因式分解.

【答案】 (1) $(x + 7)(x + 1)$

(2) $(x - y - 6)^2$

(3) $(m - 2)^2(m^2 - 4m - 2)$

【分析】 (1) 利用公式 $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$, 直接进行因式分解即可;

(2) 令 $x - y = A$, 原式可化为 $A^2 - 12A + 36$, 再分解因式即可;

(3) 把 $m^2 - 4m$ 看作是整体, 再分解因式即可.

【详解】 (1) 解: $x^2 + 8x + 7 = (x + 7)(x + 1)$;

(2) 令 $x - y = A$,

则 $(x - y)^2 - 12(x - y) + 36 = A^2 - 12A + 36 = (A - 6)^2 = (x - y - 6)^2$

(3) $(m^2 - 4m)(m^2 - 4m + 2) - 8$

$= (m^2 - 4m)^2 + 2(m^2 - 4m) - 8$

$= (m^2 - 4m + 4)(m^2 - 4m - 2)$



$$= (m - 2)^2(m^2 - 4m - 2).$$

【点睛】 本题考查的是利用十字乘法分解因式，理解题意，熟练的利用整体进行因式分解是解本题的关键。

【变式 9-2】 (2023 春·全国·七年级期末) 阅读材料：利用公式法，可以将一些形如 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的多项式变形为 $a(x + m)^2 + n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的配方法，运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解。例如：

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{4}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5 \\ &= (x + 2)^2 - 9 \\ &= (x + 2 + 3)(x + 2 - 3) \\ &= (x + 5)(x - 1) \end{aligned}$$

即： $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$ 。

根据以上材料，解答下列问题：

(1) 把下列多项式因式分解：

① $x^2 + 2x - 8$ ；

② $x^2 - 3x - 18$ ；

(2) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【答案】 (1) ① $(x - 2)(x + 4)$ ； ② $(x + 3)(x - 6)$

(2) 12

【分析】 (1) 结合材料进行因式分解即可；

(2) 把 $a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c$ 凑成完全平方即可求解。

【详解】 (1) 解： ① $x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 8$

$$= (x + 1)^2 - 9$$

$$= (x + 1 - 3)(x + 1 + 3)$$

$$= (x - 2)(x + 4)；$$

$$\textcircled{2} x^2 - 3x - 18 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right)$$

$$= (x + 3)(x - 6).$$



(2) 解: $\because a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c,$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 50 - 6a - 8b - 10c = 0,$
 $\therefore a^2 - 6a + 9 + b^2 - 8b + 16 + c^2 - 10c + 25 - 9 - 16 - 25 + 50 = 0,$
 $\therefore (a - 3)^2 + (b - 4)^2 + (c - 5)^2 = 0,$
 $\therefore a - 3 = 0, b - 4 = 0, c - 5 = 0,$
 $\therefore a = 3, b = 4, c = 5$
 $\therefore \triangle ABC$ 的周长 $= 3 + 4 + 5 = 12.$

【点睛】 本题考查了因式分解, 灵活运用所学知识是解题关键.

【变式 9-3】 (2023 春·浙江宁波·七年级统考期末) [阅读材料] 分解因式: $x^2 + x - 2.$

解: 把 $x = 1$ 代入 $x^2 + x - 2$, 发现此多项式的值为 0, 由此确定 $x^2 + x - 2$ 中有因式 $x - 1$, 可设 $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + m)$ (m 为常数), 通过展开多项式或代入合适的 x 的值即可求出 m 的值. 我们把这种分解因式的方法叫“试根法”.

根据以上阅读材料, 完成下列问题:

(1) 请完成下列因式分解:

$x^2 + x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$; $2x^2 - 5x - 7 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 请你用“试根法”分解因式: $x^3 + 3x^2 - 4;$

(3) ①若多项式 $x^2 + mx - n$ (m, n 为常数) 分解因式后, 有一个因式是 $(x - 2)$, 求代数式 $\frac{9^m}{3^n}$ 的值;

②若多项式 $x^4 + mx^3 + nx - 16$ 含有因式 $(x - 2)$ 和 $(x + 1)$, 求 mn 的值.

【答案】 (1) $(x - 1)(x + 2), (x + 1)(2x - 7)$

(2) $(x - 1)(x + 2)^2$

(3) ① $\frac{1}{81}$; ② 100

【分析】 (1) 将 $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + m)$ 展开得到 $x^2 + x - 2 = x^2 + mx - x - m = x^2 + (m - 1)x - m$, 对应相等即可得到 m 的值, 从而得到答案, 同理即可求出因式分解 $2x^2 - 5x - 7$ 的答案;

(2) 当 $x = 1$ 时, $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, 设 $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$, 展开等式右边的括号之后, 对应相等, 即可得到 a, b 的值, 从而得到答案;

(3) ①根据题意得, $x = 2$ 时, $x^2 + mx - n = 0$, 把 $x = 2$ 代入可得 $2m - n = -4$, 由 $\frac{9^m}{3^n} = 3^{2m-n}$, 进行计



算即可得到答案；②根据题意得， $x = 2$ 和 $x = -1$ 时 $x^4 + mx^3 + nx - 16 = 0$ ，把 $x = 2$ 和 $x = -1$ 代入得关于 m 、 n 的二元一次方程组，解方程组即可得到答案。

【详解】(1) 解：把 $x = 1$ 代入 $x^2 + x - 2$ ，发现此多项式的值为 0，由此确定 $x^2 + x - 2$ 中有因式 $x - 1$ ，可设 $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + m)$ (m 为常数)，

$$\text{则 } x^2 + x - 2 = x^2 + mx - x - m = x^2 + (m - 1)x - m,$$

$$\therefore m = 2,$$

$$\therefore x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

把 $x = -1$ 代入 $2x^2 - 5x - 7$ ，发现此多项式的值为 0，由此确定 $2x^2 - 5x - 7$ 中有因式 $(x + 1)$ ，

可设 $2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(2x + n)$ (n 为常数)，

$$\text{则 } 2x^2 - 5x - 7 = 2x^2 + nx + 2x + n = 2x^2 + (n + 2)x + n,$$

$$\therefore n = -7,$$

$$\therefore 2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(2x - 7),$$

故答案为： $(x - 1)(x + 2)$ ， $(x + 1)(2x - 7)$ ；

(2) 解：当 $x = 1$ 时， $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ ，

$$\text{设 } x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + ax + b),$$

$$\text{则 } x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b,$$

$$\therefore x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b,$$

$$\therefore \begin{cases} -b = -4 \\ b - a = 0 \\ a - 1 = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2;$$

(3) 解：①根据题意得， $x = 2$ 时， $x^2 + mx - n = 0$ ，

$$\text{把 } x = 2 \text{ 代入 } x^2 + mx - n, \text{ 得 } 2^2 + 2m - n = 0,$$

$$\therefore 2m - n = -4,$$

$$\therefore \frac{9^m}{3^n} = 3^{2m-n} = 3^{-4} = \frac{1}{81};$$

②根据题意得， $x = 2$ 和 $x = -1$ 时 $x^4 + mx^3 + nx - 16 = 0$ ，

把 $x = 2$ 和 $x = -1$ 代入得，



$$\begin{cases} 16 + 8m + 2n - 16 = 0 \\ 1 - m - n - 16 = 0 \end{cases},$$

整理得: $\begin{cases} 8m + 2n = 0 \\ m + n = -15 \end{cases},$

解得: $\begin{cases} m = 5 \\ n = -20 \end{cases},$

$\therefore mn = -100.$

【点睛】 本题考查了因式分解，解二元一次方程组，解本题的关键是理解试根法进行因式分解.