



## 专题 8.1 幂的运算【八大题型】

【苏科版】

### ▶ 题型梳理

【题型 1 利用幂的运算法则进行简便运算】 .....	1
【题型 2 利用幂的运算法则求式子的值】 .....	2
【题型 3 利用幂的运算法则比较大小】 .....	2
【题型 4 利用幂的运算法则整体代入求值】 .....	3
【题型 5 利用幂的运算法则求字母的值】 .....	3
【题型 6 利用幂的运算法则表示代数式】 .....	3
【题型 7 幂的混合运算】 .....	4
【题型 8 新定义下的幂的运算】 .....	4

### ▶ 举一反三

#### 【知识点 1 幂的运算】

- ①同底数幂的乘法： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 。同底数幂相乘，底数不变，指数相加。
- ②幂的乘方： $(a^m)^n = a^{mn}$ 。幂的乘方，底数不变，指数相乘。
- ③积的乘方： $(ab)^n = a^n b^n$ 。积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。
- ④同底数幂的除法： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。同底数幂相除，底数不变，指数相减。

#### 【题型 1 利用幂的运算法则进行简便运算】

【例 1】（2023 春·河北保定·七年级校联考期末）用简便方法计算：

$$(1) \left(\frac{4}{5}\right)^{2019} \times (-1.25)^{2020};$$

$$(2) (-9)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

【变式 1-1】（2023 春·山东烟台·六年级统考期中）计算 $\left(-\frac{5}{4}\right)^{2023} \times (-0.8)^{2022}$ 的结果是（ ）

- A. 1                      B. -1                      C.  $\frac{5}{4}$                       D.  $-\frac{5}{4}$

【变式 1-2】（2023 春·上海杨浦·七年级统考期中）用简便方法计算： $-3^5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \times (-5)^6$

【变式 1-3】（2023 春·上海·七年级上海市西延安中学校考期中）简便方法计算：

$$(1) 3\frac{2}{5} \times 202.3 + 87\% \times 2023 - 21 \times 20.23;$$



## 润禾托管

$$(2)(-1.5)^{2024} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}$$

### 【题型2 利用幂的运算法则求式子的值】

【例2】(2023春·江苏宿迁·七年级校考期中)若 $x^m = 2$ ,  $x^n = 5$ , 则 $x^{3m-2n} =$ \_\_\_\_\_.

【变式2-1】(2023春·四川自贡·七年级四川省荣县中学校校考阶段练习)已知 $2^a = 18$ ,  $2^b = 3$ , 则 $2^{a-2b+1}$ 的值为\_\_\_\_\_.

【变式2-2】(2023春·广东深圳·七年级深圳外国语学校校考期中)已知 $x^{3m} = 2$ ,  $y^{2m} = 3$ , 求 $(x^{2m})^3 + (y^m)^6 - (x^2y)^{3m} \cdot y^m$ 的值.

【变式2-3】(2023春·浙江温州·七年级温州市第二十三中学校考期中)已知整数 $a, b, c, d$ 满足 $a < b < c < d$ 且 $2^a 3^b 4^c 5^d = 10000$ , 则 $4a + 3b + 2c + d$ 的值为\_\_\_\_\_.

### 【题型3 利用幂的运算法则比较大小】

【例3】(2023春·浙江杭州·七年级期中)如 $A = \frac{99^9}{99^9}$ ,  $B = \frac{11^9}{99^9}$ , 是比较 $A, B$ 大小( )

- A.  $A > B$       B.  $A < B$       C.  $A = B$       D.  $A, B$ 大小不能正确

【变式3-1】(2023春·山西晋中·七年级统考期中)阅读探究题:

#### 【阅读材料】

比较两个底数大于1的正数幂的大小, 可以在底数(或指数)相同的情况下, 比较指数(或底数)的大小,

如:  $2^5 > 2^3$ ,  $5^5 > 4^5$ .

在底数(或指数)不相同的情况下, 可以化相同, 进行比较, 如:  $27^{10}$ 与 $3^{25}$ ,

解:  $27^{10} = (3^3)^{10} = 3^{30}$ ,

$\because 30 > 25$ ,

$\therefore 3^{30} > 3^{25}$ .

$\therefore 27^{10} > 3^{25}$ .

(1)上述求解过程中, 运用了哪一条幂的运算性质(\_\_\_\_\_)

- A. 同底数幂的乘法    B. 同底数幂的除法    C. 幂的乘方    D. 积的乘方

(2)类比解答: 比较 $25^4$ ,  $125^3$ 的大小.

(3)拓展提高: 比较 $3^{555}$ ,  $4^{444}$ ,  $5^{333}$ 的大小.

【变式3-2】(2023春·江苏·七年级期末)若 $a^3 = 2$ ,  $b^5 = 3$ , 比较 $a, b$ 大小关系的方法: 因为 $a^{15} = (a^3)^5 = 2^5 = 32$ ,  $b^{15} = (b^5)^3 = 3^3 = 27$ ,  $32 > 27$ , 所以 $a^{15} > b^{15}$ , 所以 $a > b$ . 已知 $x^5 = 2$ ,  $y^7 = 3$ , 则 $x, y$ 的大小关系



## 润禾托管

是 $x$ \_\_\_\_\_ $y$  (填“ $<$ ”或“ $>$ ”).

**【变式 3-3】** (2023 春·河北张家口·七年级统考阶段练习) 阅读: 已知正整数 $a, b, c$ , 对于同底数, 不同指数的两个幂 $a^b$ 和 $a^c$  ( $a \neq 1$ ), 若 $b > c$ , 则 $a^b > a^c$ ; 对于同指数, 不同底数的两个幂 $a^b$ 和 $c^b$ , 若 $a > c$ , 则 $a^b > c^b$ . 根据上述材料, 回答下列问题.

(1) 比较大小:  $2^8$   $8^2$  (填“ $>$ ”“ $<$ ”或“ $=$ ”);

(2) 比较 $2^{33}$ 与 $3^{22}$ 的大小 (写出具体过程);

(3) 比较 $99^{13} \times 102^{10}$ 与 $99^{10} \times 102^{13}$ 的大小 (写出具体过程).

### 【题型 4 利用幂的运算法则整体代入求值】

**【例 4】** (2023 春·江苏盐城·七年级统考期中) 若 $a + b + c = 1$ , 则 $(-2)^{a-1} \times (-2)^{3b+2} \times (-2)^{2a+3c}$ 的值为\_\_\_\_\_.

**【变式 4-1】** (2023 春·江苏苏州·七年级统考期末) 已知 $2x + y = 1$ , 则 $4^x \cdot 2^y$ 的值为\_\_\_\_\_.

**【变式 4-2】** (2023 春·四川成都·七年级成都嘉祥外国语学校校考期中) 已知 $2x + 4y - 3 = 0$ , 则 $4^x \cdot 16^y - 8$ 的值为 ( )

- A. 3                      B. 8                      C. 0                      D. 4

**【变式 4-3】** (2023 春·广西崇左·七年级统考期中) 若 $2a + 3b - 4c - 2 = 0$ , 则 $9^a \times 27^b \div 81^c$ 的值为\_\_\_\_\_.

### 【题型 5 利用幂的运算法则求字母的值】

**【例 5】** (2023 春·上海浦东新·七年级统考期中) 已知 $4^{2x} \cdot 5^{2x+1} - 4^{2x+1} \cdot 5^{2x} = 20^{3x-4}$ , 求 $x$ 的值;

**【变式 5-1】** (2023 春·河北邯郸·七年级校考期中) 计算:

(1) 已知 $2 \cdot 8^n \cdot 32^n = 2^{25}$ , 求 $n$ 的值;

(2) 已知 $n$ 是正整数, 且 $x^{3n} = 2$ , 求 $(3x^{3n})^2 + (-2x^{2n})^3$ 的值.

**【变式 5-2】** (2023 春·浙江绍兴·七年级统考期末) 若 $2^a = 3$ ,  $2^b = 7$ ,  $2^c = m$ , 且 $a + b = c$ , 则此时 $m$ 值为\_\_\_\_\_.

**【变式 5-3】** (2023 春·山东淄博·六年级统考期中) 若 $5^2 \times 5^m = 5^{10}$ ,  $9^n \div 3^n = 3$ , 则 $m + n =$ \_\_\_\_\_.

### 【题型 6 利用幂的运算法则表示代数式】

**【例 6】** (2023 春·江苏泰州·七年级校考期中) 若 $x = 2^m + 1$ ,  $y = 4^m - 1$ .

(1) 当 $m = 2$ 时, 分别求 $x, y$ 的值.

(2) 用只含 $x$ 的代数式表示 $y$ .



## 润禾托管

【变式 6-1】(2023 春·福建漳州·七年级漳州三中校考期中) 已知  $2^{x-4} = m$ , 用含  $m$  的代数式表示  $2^x$  正确的是 ( )

- A.  $16m$       B.  $8m$       C.  $m + 4$       D.  $\frac{m}{4}$

【变式 6-2】(2023 春·江苏扬州·七年级统考期中) 若  $43^x = 2021$ ,  $47^y = 2021$ , 则代数式  $xy$  与  $x + y$  之间关系是\_\_\_\_\_.

【变式 6-3】(2023 春·江西南昌·七年级南昌市第十九中学校考期末) 若  $a^m = a^n$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $m$ 、 $n$  是正整数), 则  $m = n$ . 利用上面结论解决下面的问题:

- (1) 如果  $8^x = 2^5$ , 求  $x$  的值;  
 (2) 如果  $2^{x+2} + 2^{x+1} = 24$ , 求  $x$  的值;  
 (3) 若  $x = 5^m - 3$ ,  $y = 4 - 25^m$ , 用含  $x$  的代数式表示  $y$ .

### 【题型 7 幂的混合运算】

【例 7】(2023 春·山东枣庄·七年级统考期中) 计算:

- (1)  $a^4 + (-2a^2)^3 - a^8 \div a^4$ ;  
 (2)  $2a^2b \cdot 5ab^2 - 3ab \cdot (ab)^2$ .

【变式 7-1】(2023 春·浙江金华·七年级校考期中) 计算:

- (1)  $2x^3y^2 \cdot (-2xy^2z)^2$ ;  
 (2)  $(-2x^2)^3 + x^2 \cdot x^4 - (-3x^3)^2$ .

【变式 7-2】(2023 春·上海青浦·七年级校考期中) 计算:  $(-\frac{1}{2}xy^2)^2 \cdot 8x^4y^2 - (2x^2y^2)^3$ .

【变式 7-3】(2023 春·湖南邵阳·七年级统考期中) 计算:  $a^{n-5}(a^{n+1}b^{3m-2})^2 + (a^{n-1}b^{m-2})^3(-b^{3m+2})$ .

### 【题型 8 新定义下的幂的运算】

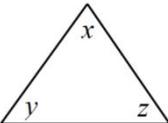
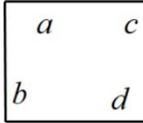
【例 8】(2023 春·上海徐汇·七年级上海市第四中学校考期中) 阅读下列材料: 一般地,  $n$  个相同的因数  $a$  相乘  $a \cdot a \cdots$ , 记为  $a^n$ . 如  $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ , 此时, 3 叫做以 2 为底 8 的对数, 记为  $\log_2 8$  (即  $\log_2 8 = 3$ ). 一般地, 若  $a^n = b$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ), 则  $n$  叫做以  $a$  为底  $b$  的对数, 记为  $\log_a b$  (即  $\log_a b = n$ . 如  $3^4 = 81$ , 则 4 叫做以 3 为底 81 的对数, 记为  $\log_3 81$  (即  $\log_3 81 = 4$ )).

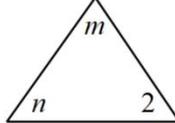
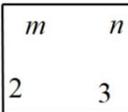
- (1) 计算以下各对数的值:  $\log_2 4 = \underline{\quad}$ ,  $\log_2 16 = \underline{\quad}$ ,  $\log_2 64 = \underline{\quad}$ .  
 (2) 写出 (1)  $\log_2 4$ 、 $\log_2 16$ 、 $\log_2 64$  之间满足的关系式\_\_\_\_\_.  
 (3) 由 (2) 的结果, 请你能归纳出一个一般性的结论:  $\log_a M + \log_a N = \underline{\quad}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $M > 0$ ,  $N > 0$ ).



## 润禾托管

(4) 设  $a^n = N$ ,  $a^m = M$ , 请根据幂的运算法则以及对数的定义说明上述结论的正确性.

【变式 8-1】(2023 春·广东揭阳·七年级校考期中) 若定义  表示  $3xyz$ ,  表示  $-2a^b c^d$ ,

则运算   $\times$   的结果为 ( )

- A.  $-12m^3n^4$       B.  $-6m^2n^5$       C.  $12m^4n^3$       D.  $12m^3n^4$

【变式 8-2】(2023 春·江苏淮安·七年级期中) 定义一种幂的新运算:  $x^a \oplus x^b = x^{ab} + x^{a+b}$ , 请利用这种运算规则解决下列问题:

(1)  $2^2 \oplus 2^3$  的值为  $\underline{\quad}$ ;

(2) 若  $2^p = 3$ ,  $2^q = 5$ ,  $3^q = 7$ , 求  $2^p \oplus 2^q$  的值;

【变式 8-3】(2023 春·江苏·七年级期中) 规定两数  $a, b$  之间的一种运算, 记作  $(a, b)$ , 如果  $a^c = b$ . 我们叫  $(a, b)$  为“雅对”.

例如: 因为  $2^3 = 8$ , 所以  $(2, 8) = 3$ . 我们还可以利用“雅对”定义说明等式  $(3, 3) + (3, 5) = (3, 15)$  成立. 证明如下:

设  $(3, 3) = m$ ,  $(3, 5) = n$ , 则  $3^m = 3$ ,  $3^n = 5$ , 故  $3^m \cdot 3^n = 3^{m+n} = 3 \times 5 = 15$ ,

则  $(3, 15) = m + n$ , 即  $(3, 3) + (3, 5) = (3, 15)$ .

(1) 根据上述规定, 填空:  $(2, 4) = \underline{\quad}$ ;  $(5, 1) = \underline{\quad}$ ;  $(3, 27) = \underline{\quad}$ .

(2) 计算  $(5, 2) + (5, 7) = \underline{\quad}$ , 并说明理由.

(3) 利用“雅对”定义证明:  $(2^n, 3^n) = (2, 3)$ , 对于任意自然数  $n$  都成立.