



专题 7.18 平面图形的认识（二）章末十四大题型总结（拔尖篇）

【苏科版】

► 题型梳理

【题型 1 平行线在三角板中的运用】	1
【题型 2 平行线在折叠中的运用】	15
【题型 3 旋转使平行】	21
【题型 4 利用平行线求角度之间的关系】	26
【题型 5 利用平行线解决角度定值问题】	37
【题型 6 平行线的阅读理解类问题】	46
【题型 7 平行线的性质在生活中的应用】	56
【题型 8 平行线与动点的综合应用】	60
【题型 9 利用三角形的中线求面积】	71
【题型 10 利用三角形的三边关系求线段的最值或取值范围】	77
【题型 11 利用三角形的三边关系化简或证明】	80
【题型 12 与角平分线有关的三角形角的计算问题】	84
【题型 13 与平行线有关的三角形角的计算问题】	93
【题型 14 与折叠有关的三角形角的计算问题】	106

► 举一反三

【题型 1 平行线在三角板中的运用】

【例 1】（2023 下·浙江温州·七年级校考期中）将一副直角三角板如图 1，摆放在直线 MN 上（直角三角板 ABC 和直角三角板 EDC ， $\angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ），保持三角板 EDC 不动，将三角板 ABC 绕点 C 以每秒 5° 的速度，顺时针方向旋转，旋转时间为 t 秒，当 AC 与射线 CN 重合时停止旋转。

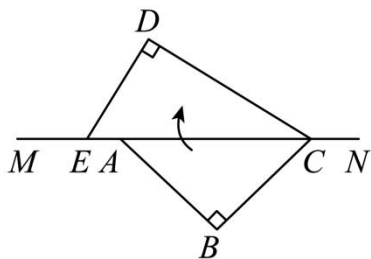


图1

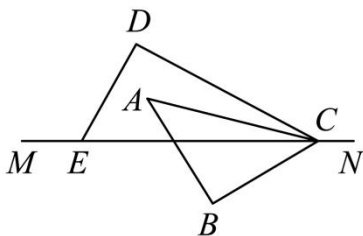


图2

- (1) 如图 2，当 AC 为 $\angle DCE$ 的角平分线时，直接写出此时 t 的值；
- (2) 当 AC 旋转至 $\angle DCE$ 的内部时，求 $\angle DCA$ 与 $\angle ECB$ 的数量关系。
- (3) 在旋转过程中，当三角板 ABC 的其中一边与 ED 平行时，请直接写出此时 t 的值。



【答案】(1)3

(2) $\angle ECB - \angle DCA = 15^\circ$

(3)15 或 24 或 33

【分析】(1) 根据角平分线的定义求出 $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle DCE = 15^\circ$ ，然后求出 t 的值即可；

(2) 根据旋转得： $\angle ACE = 5t$ ，表示出 $\angle DCA = 30^\circ - 5t$ ， $\angle ECB = 45^\circ - 5t$ ，即可得出 $\angle ECB - \angle DCA = 15^\circ$ ；

(3) 分三种情况进行讨论，分别画出图形，求出 t 的值即可．

【详解】(1) 解：如图 2， $\because \angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ，

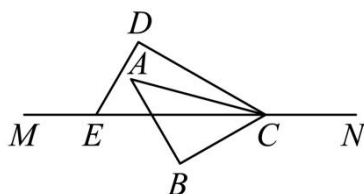


图2

$$\therefore \angle DCE = 30^\circ,$$

$\because AC$ 平分 $\angle DCE$ ，

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2}\angle DCE = 15^\circ,$$

$$\therefore t = \frac{15}{5} = 3,$$

答：此时 t 的值是 3；

(2) 解：当 AC 旋转至 $\angle DCE$ 的内部时，如图 3；

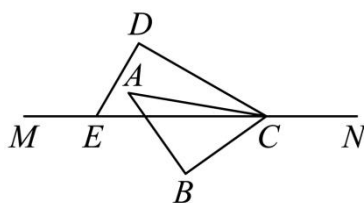


图3

由旋转得： $\angle ACE = 5t$ ，

$$\therefore \angle DCA = 30^\circ - 5t, \angle ECB = 45^\circ - 5t,$$

$$\therefore \angle ECB - \angle DCA = (45^\circ - 5t) - (30^\circ - 5t) = 15^\circ;$$

(3) 解：分三种情况：

①当 $AB \parallel DE$ 时，如图 4，

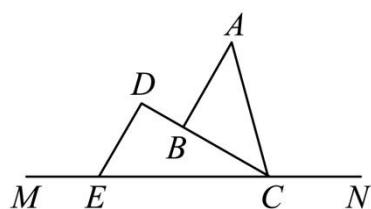


图4

此时 BC 与 CD 重合,

$$t = (30 + 45) \div 5 = 15;$$

②当 $AC \parallel DE$ 时, 如图 5,

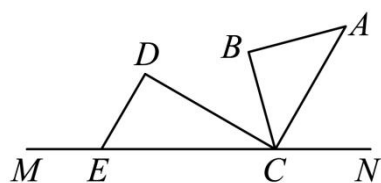


图5

$\because AC \parallel DE$,

$$\therefore \angle ACD = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

$$t = 120 \div 5 = 24;$$

③当 $BC \parallel DE$ 时, 如图 6,

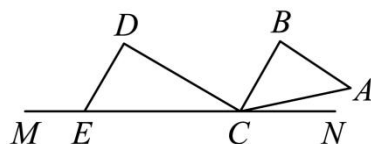


图6

$\because BC \parallel DE$

$$\therefore \angle BCD = \angle CDE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ + 30^\circ + 45^\circ = 165^\circ$$

$$\therefore t = 165 \div 5 = 33$$

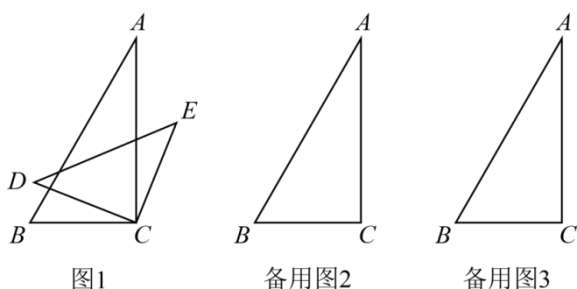
综上, t 的值是 15 或 24 或 33.

故答案为: 15 或 24 或 33.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质, 角平分线的计算, 平行线的性质, 解题的关键是数形结合, 注意分类讨论.



【变式 1-1】（2023 下·河南安阳·七年级统考期末）如图 1，将一副三角板中的两个直角顶点 C 叠放在一起，其中 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle D = \angle E = 45^\circ$ 。



- (1) 观察猜想， $\angle BCD$ 与 $\angle ACE$ 的数量关系是_____； $\angle BCE$ 与 $\angle ACD$ 的数量关系是_____；
- (2) 类比探究，若按住三角板 ABC 不动，顺时针绕直角顶点 C 转动三角形 DCE ，试探究当 $\angle ACD$ 等于多少度时 $CE \parallel AB$ ，画出图形并简要说明理由；
- (3) 拓展应用，若 $\angle BCE = 3\angle ACD$ ，求 $\angle ACD$ 的度数；并直接写出此时 DE 与 AC 的位置关系。

【答案】(1) $\angle BCD = \angle ACE$ ， $\angle BCE + \angle ACD = 180^\circ$

(2) 当 $\angle ACD = 60^\circ$ 或 120° 时， $CE \parallel AB$

(3) $\angle ACD = 45^\circ$ ， $AC \perp DE$ 或 $AC \parallel DE$

【分析】(1) 由三角板的特点可知 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，即可求出 $\angle BCD = \angle ACE$ 。再根据 $\angle BCE = \angle ACB + \angle ACE$ ， $\angle ACD = \angle DCE - \angle ACE$ ，即可求出 $\angle BCE + \angle ACD = 180^\circ$ ；

(2) 分类讨论结合平行线的性质即可求解；

(3) 由 (1) $\angle BCE + \angle ACD = 180^\circ$ ，即可求出 $\angle ACD = 45^\circ$ ，再分类讨论结合平行线的判定和性质即可得出 DE 与 AC 的位置关系。

【详解】(1) $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB - \angle ACD = \angle DCE - \angle ACD$ ，即 $\angle BCD = \angle ACE$ 。

$\because \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE$ ， $\angle ACD = \angle DCE - \angle ACE$ ，

$\therefore \angle BCE + \angle ACD = \angle ACB + \angle DCE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ 。

故答案为： $\angle BCD = \angle ACE$ ， $\angle BCE + \angle ACD = 180^\circ$ ；

(2) 分类讨论：①如图 1 所示，

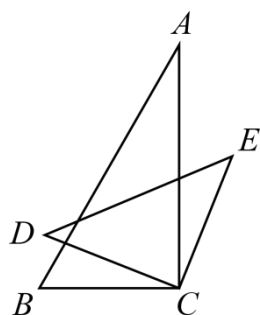


图1

$\because CE \parallel AB,$

$\therefore \angle ACE = \angle BAC = 30^\circ,$

$\therefore \angle ACD = \angle DCE - \angle ACE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ;$

②如图2所示,

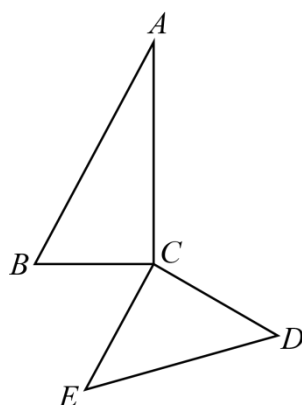


图2

$\because CE \parallel AB,$

$\therefore \angle BCE = \angle B = 60^\circ,$

$\therefore \angle ACD = 360^\circ - \angle ACB - \angle DCE - \angle BCE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

综上所述可知当 $\angle ACD = 60^\circ$ 或 120° 时, $CE \parallel AB$;

(3) 根据(1)可知 $\angle BCE + \angle ACD = 180^\circ,$

$\therefore 3\angle ACD + \angle ACD = 180^\circ,$

$\therefore \angle ACD = 45^\circ.$

分类讨论: ①如图3所示,

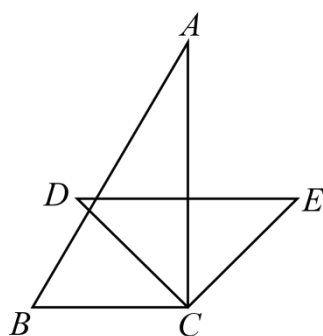


图3

$$\because \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ = \angle CDE,$$

$$\therefore BC \parallel DE.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp BC,$$

$$\therefore AC \perp DE;$$

②如图4所示,

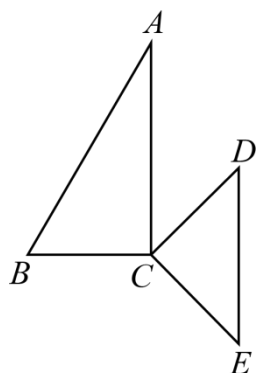


图4

$$\because \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 45^\circ = \angle CDE,$$

$$\therefore AC \parallel DE.$$

【点睛】本题考查三角板中的角度计算，平行线的判定和性质．利用数形结合和分类讨论的思想是解题关键．

【变式 1-2】（2023 上·湖南长沙·七年级校考期末）如图，两个形状，大小完全相同的含有 30° 、 60° 的三角板如图放置，PA、PB 与直线 MN 重合，且三角板 PAC，三角板 PBD 均可以绕点 P 逆时针旋转．

(1) ①如图 1， $\angle DPC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度．

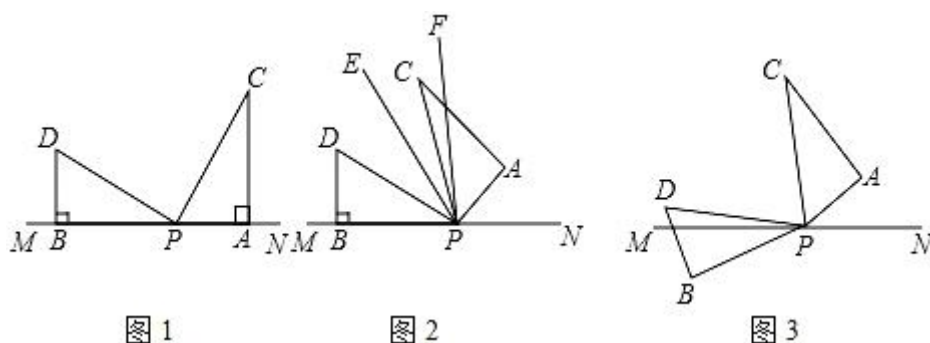
②我们规定，如果两个三角形只要有一组边平行，我们就称这两个三角形为“孪生三角形”，如图 1，三角板



润禾托管

BPD 不动, 三角板 PAC 从图示位置开始每秒 10° 逆时针旋转一周 ($0^\circ < \text{旋转} < 360^\circ$), 问旋转时间 t 为多少时, 这两个三角形是“孪生三角形”.

(2) 如图 3, 若三角板 PAC 的边 PA 从 PN 处开始绕点 P 逆时针旋转, 转速 $3^\circ/\text{秒}$, 同时三角板 PBD 的边 PB 从 PM 处开始绕点 P 逆时针旋转, 转速 $2^\circ/\text{秒}$, 在两个三角板旋转过程中, (PC 转到与 PM 重合时, 两三角板都停止转动). 设两个三角板旋转时间为 t 秒, 以下两个结论: ① $\frac{\angle CPD}{\angle BPN}$ 为定值; ② $\angle BPN + \angle CPD$ 为定值, 请选择你认为对的结论加以证明.



【答案】(1) ① 90° ; ② t 为 3s 或 6s 或 9s 或 18s 或 21s 或 24s 或 27s; (2) ① 正确, ② 错误, 证明见解析.

【分析】(1) ① 由平角的定义, 结合已知条件可得: $\angle DPC = 180^\circ - \angle CPA - \angle DPB$, 从而可得答案; ② 当 $BD \parallel PC$ 时, 有两种情况, 画出符合题意的图形, 利用平行线的性质与角的和差求解旋转角, 可得旋转时间; 当 $PA \parallel BD$ 时, 有两种情况, 画出符合题意的图形, 利用平行线的性质与角的和差关系求解旋转角, 可得旋转时间; 当 $AC \parallel DP$ 时, 有两种情况, 画出符合题意的图形, 利用平行线的性质与角的和差关系求解旋转角, 可得旋转时间; 当 $AC \parallel BD$ 时, 画出符合题意的图形, 利用平行线的性质与角的和差关系求解旋转角, 可得旋转时间; 当 $AC \parallel BP$ 时的旋转时间与 $PA \parallel BD$ 相同;

(2) 分两种情况讨论: 当 PD 在 MN 上方时, 当 PD 在 MN 下方时, ① 分别用含 t 的代数式表示 $\angle CPD, \angle BPN$, 从而可得 $\frac{\angle CPD}{\angle BPN}$ 的值; ② 分别用含 t 的代数式表示 $\angle CPD, \angle BPN$, 得到 $\angle BPN + \angle CPD$ 是一个含 t 的代数式, 从而可得答案.

【详解】解: (1) ① $\because \angle DPC = 180^\circ - \angle CPA - \angle DPB$, $\angle CPA = 60^\circ$, $\angle DPB = 30^\circ$,
 $\therefore \angle DPC = 180 - 30 - 60 = 90^\circ$,
 故答案为 90° ;

② 如图 1-1, 当 $BD \parallel PC$ 时,

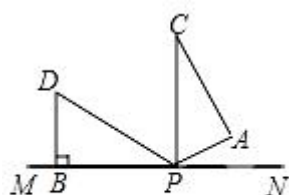


图 1-1

$\because PC \parallel BD, \angle DBP = 90^\circ,$

$\therefore \angle CPN = \angle DBP = 90^\circ,$

$\because \angle CPA = 60^\circ,$

$\therefore \angle APN = 30^\circ,$

$\because$ 转速为 $10^\circ/\text{秒},$

$\therefore$ 旋转时间为 3 秒;

如图 1 - 2, 当 $PC \parallel BD$ 时,

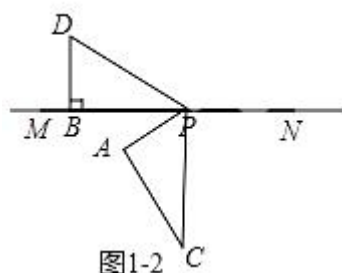


图1-2

$\because PC \parallel BD, \angle PBD = 90^\circ,$

$\therefore \angle CPB = \angle DBP = 90^\circ,$

$\because \angle CPA = 60^\circ,$

$\therefore \angle APM = 30^\circ,$

$\because$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ,$

$\because$ 转速为 $10^\circ/\text{秒},$

$\therefore$ 旋转时间为 21 秒,

如图 1 - 3, 当 $PA \parallel BD$ 时, 即点 D 与点 C 重合, 此时 $\angle ACP = \angle BPD = 30^\circ,$ 则 $AC \parallel BP,$

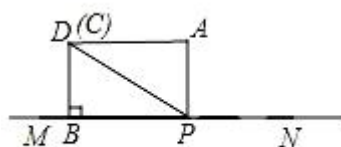


图1-3

$\because PA \parallel BD,$

$\therefore \angle DBP = \angle APN = 90^\circ,$

$\therefore$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 90° ,

$\therefore$ 转速为 $10^\circ/\text{秒}$,

$\therefore$ 旋转时间为 9 秒,

如图 1 - 4, 当 $PA \parallel BD$ 时,

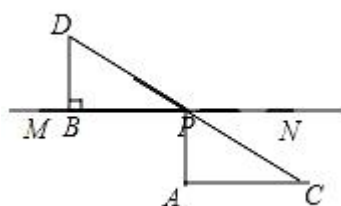


图1-4

$\because \angle DPB = \angle ACP = 30^\circ,$

$\therefore AC \parallel BP,$

$\because PA \parallel BD,$

$\therefore \angle DBP = \angle BPA = 90^\circ,$

$\therefore$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 $90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$,

$\therefore$ 转速为 $10^\circ/\text{秒}$,

$\therefore$ 旋转时间为 27 秒,

如图 1 - 5, 当 $AC \parallel DP$ 时,

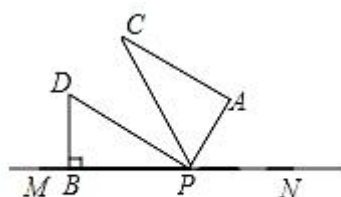


图1-5



$\because AC \parallel DP,$

$\therefore \angle C = \angle DPC = 30^\circ,$

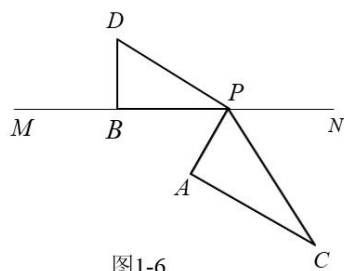
$\therefore \angle APN = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$

$\therefore$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 60° ,

$\therefore$ 转速为 $10^\circ/\text{秒}$,

$\therefore$ 旋转时间为 6 秒,

如图 1 - 6, 当 $AC \parallel DP$ 时,



$\because AC \parallel DP,$

$\therefore \angle DPA = \angle PAC = 90^\circ,$

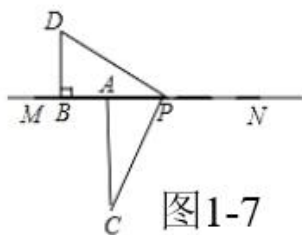
$\angle DPN + \angle DPA = 180^\circ - 30^\circ + 90^\circ = 240^\circ,$

$\therefore$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 240° ,

$\therefore$ 转速为 $10^\circ/\text{秒}$,

$\therefore$ 旋转时间为 24 秒,

如图 1 - 7, 当 $AC \parallel BD$ 时,



$\because AC \parallel BD,$

$\therefore \angle DBP = \angle BAC = 90^\circ,$

$\therefore$ 点 A 在 MN 上,

$\therefore$ 三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 180° ,

$\therefore$ 转速为 $10^\circ/\text{秒}$,



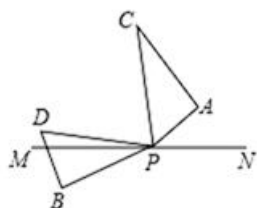
润禾托管

∴ 旋转时间为 18 秒，

当 $AC \parallel BP$ 时，如图 1-3，1-4，旋转时间分别为：9s，27s.

综上所述：当 t 为 3s 或 6s 或 9s 或 18s 或 21s 或 24s 或 27s 时，这两个三角形是“孪生三角形”；

(2) 如图，当 PD 在 MN 上方时，



① 正确，

理由如下：设运动时间为 t 秒，则 $\angle BPM = 2t$ ，

$$\therefore \angle BPN = 180^\circ - 2t, \quad \angle DPM = 30^\circ - 2t, \quad \angle APN = 3t.$$

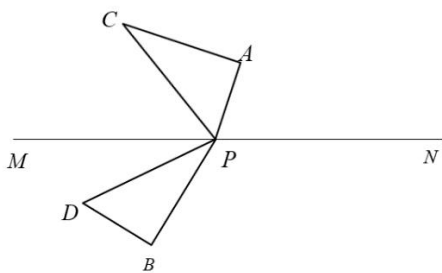
$$\therefore \angle CPD = 180^\circ - \angle DPM - \angle CPA - \angle APN = 90^\circ - t,$$

$$\therefore \angle BPN = 2\angle CPD = 180^\circ - 2t,$$

$$\therefore \frac{\angle CPD}{\angle BPN} = \frac{1}{2}.$$

② $\angle BPN + \angle CPD = 180^\circ - 2t + 90^\circ - t = 270^\circ - 3t$ ，可以看出 $\angle BPN + \angle CPD$ 随着时间在变化，不为定值，结论错误.

当 PD 在 MN 下方时，如图，



① 正确，

理由如下：设运动时间为 t 秒，则 $\angle BPM = 2t$ ，

$$\therefore \angle BPN = 180^\circ - 2t, \quad \angle DPM = 2t - 30^\circ, \quad \angle APN = 3t.$$

$$\therefore \angle CPD = 360^\circ - \angle CPA - \angle APN - \angle DPB - \angle BPN$$

$$= 360^\circ - 60^\circ - 3t - 30^\circ - (180^\circ - 2t)$$

$$= 90^\circ - t$$



$$\therefore \angle BPN = 2\angle CPD = 180^\circ - 2t,$$

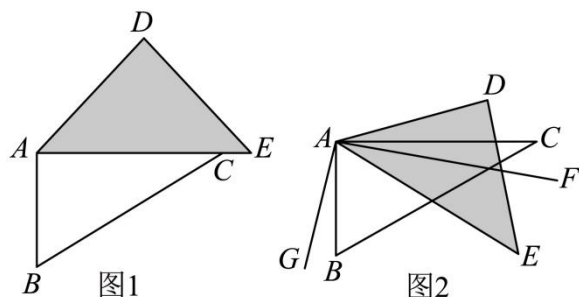
$$\therefore \frac{\angle CPD}{\angle BPN} = \frac{1}{2}.$$

② $\angle BPN + \angle CPD = 180^\circ - 2t + 90^\circ - t = 270^\circ - 3t$, 可以看出 $\angle BPN + \angle CPD$ 随着时间的变化, 不为定值, 结论错误.

综上: ①正确, ②错误.

【点睛】本题考查的是角的和差倍分关系, 平行线的性质与判定, 角的动态定义(旋转角)的理解, 掌握分类讨论的思想是解题的关键.

【变式 1-3】(2023 上·福建泉州·七年级统考期末) 如图 1, 将三角板 ABC 与三角板 ADE 摆放在一起, 其中 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle DAE = 45^\circ$, $\angle BAC = \angle D = 90^\circ$, 固定三角板 ABC , 将三角板 ADE 绕点 A 按顺时针方向旋转, 当点 E 落在射线 AC 的反向延长线上时, 即停止旋转.



(1) 如图 2, 当边 AC 落在 $\angle DAE$ 内,

① $\angle CAD$ 与 $\angle BAE$ 之间存在怎样的数量关系? 试说明理由;

② 过点 A 作射线 AF , AG , 若 $\angle CAF = \frac{1}{3}\angle CAD$, $\angle BAG = \frac{1}{4}\angle EAG$, 求 $\angle FAG$ 的度数;

(2) 设 $\triangle ADE$ 的旋转速度为 $3^\circ/\text{秒}$, 旋转时间为 t , 若它的一边与 $\triangle ABC$ 的某一边平行(不含重合情况), 试写出所有符合条件的 t 的值.

【答案】(1) ① $\angle BAE - \angle CAD = 45^\circ$ (或 $\angle BAE = \angle CAD + 45^\circ$), 理由见解析; ② 105°
(2) 5 或 15 或 35 或 45 或 50

【分析】(1) ① 由角的和差关系可得 $\angle BAE + \angle CAE = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle CAE = 45^\circ$, 再把两式相减即可得到结论; ② 先求解 $\angle FAE = 45^\circ - \angle DAF = 45^\circ - \frac{4}{3}\angle CAD$, $\angle EAG = \angle BAE + \angle BAG = \frac{4}{3}\angle BAE$, 结合 $\angle FAG = \angle FAE + \angle EAG$, $= 45^\circ - \frac{4}{3}\angle CAD + \frac{4}{3}\angle BAE = 45^\circ + \frac{4}{3}(\angle BAE - \angle CAD)$, 从而可得答案;

(2) 分 5 种情况讨论: 如图, 当 $AD \parallel BC$ 时, 如图, 当 $DE \parallel AB$ 时, 如图, 当 $DE \parallel BC$ 时, 如图, 当 $DE \parallel AC$ 时,



如图，当 $AE \parallel BC$ 时，再结合平行线的性质可得答案.

【详解】（1）解：① $\angle BAE - \angle CAD = 45^\circ$ （或 $\angle BAE = \angle CAD + 45^\circ$ ）；

理由如下： $\angle BAE + \angle CAE = 90^\circ$ ，

$$\angle CAD + \angle CAE = 45^\circ,$$

两式相减得： $\angle BAE - \angle CAD = 45^\circ$ ，

$$\textcircled{2} \because \angle CAF = \frac{1}{3}\angle CAD,$$

$$\therefore \angle FAE = 45^\circ - \angle DAF = 45^\circ - \frac{4}{3}\angle CAD,$$

$$\because \angle BAG = \frac{1}{4}\angle EAG,$$

$$\therefore \angle BAG = \frac{1}{3}\angle BAE,$$

$$\therefore \angle EAG = \angle BAE + \angle BAG = \frac{4}{3}\angle BAE,$$

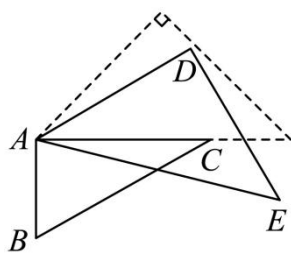
$$\therefore \angle FAG = \angle FAE + \angle EAG,$$

$$= 45^\circ - \frac{4}{3}\angle CAD + \frac{4}{3}\angle BAE$$

$$= 45^\circ + \frac{4}{3}(\angle BAE - \angle CAD)$$

$$= 45^\circ + \frac{4}{3} \times 45^\circ = 105^\circ ;$$

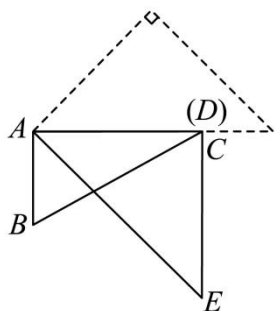
（2）如图，当 $AD \parallel BC$ 时，



$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = 30^\circ, \angle EAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore t = \frac{15}{3} = 5;$$

如图，当 $DE \parallel AB$ 时，

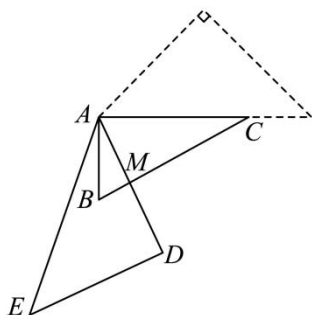


$\therefore \angle BAC + \angle ADE = 180^\circ$, 则 $\angle ADE = 90^\circ$,

此时 $\angle CAE = \angle DAE = 45^\circ$,

$$\therefore t = \frac{45}{3} = 15;$$

如图, 当 $DE \parallel BC$ 时,



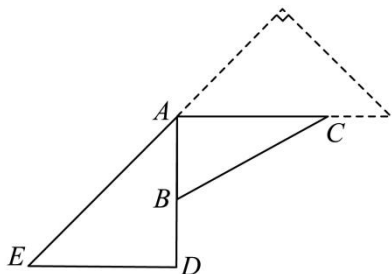
$\therefore \angle BMA = \angle D = 90^\circ$, $\angle AMC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle MAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle EAC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$,

$$\therefore t = \frac{105}{3} = 35;$$

如图, 当 $DE \parallel AC$ 时,



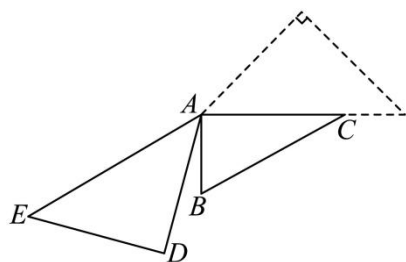
$\therefore \angle ADE = \angle BAC = 90^\circ$, 即 A, B, D 共线,

$\therefore \angle CAE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$,

$$\therefore t = \frac{135}{3} = 45;$$



如图，当 $AE \parallel BC$ 时，



$$\therefore \angle EAB = \angle B = 60^\circ,$$

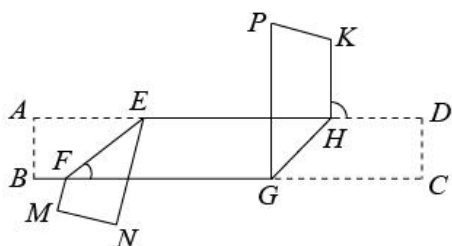
$$\therefore \angle EAC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore t = \frac{150}{3} = 50.$$

【点睛】本题考查的是角的和差运算，角的倍分关系，角的旋转定义的理解，平行线的性质，清晰的分类讨论是解本题的关键。

【题型2 平行线在折叠中的运用】

【例2】（2023下·浙江温州·七年级校联考期中）如图，已知长方形纸片 $ABCD$ ，点 E 和点 F 分别在边 AD 和 BC 上，且 $\angle EFC = 37^\circ$ ，点 H 和点 G 分别是边 AD 和 BC 上的动点，现将点 A, B, C, D 分别沿 EF, GH 折叠至点 N, M, P, K ，若 $MN \parallel PK$ ，则 $\angle KHD$ 的度数为（ ）



A. 37° 或 143°

B. 74° 或 96°

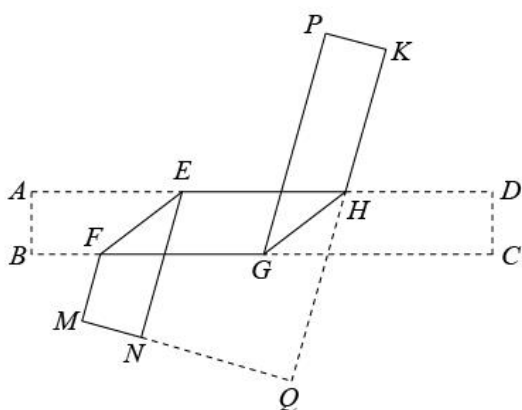
C. 37° 或 105°

D. 74° 或 106°

【答案】D

【分析】分两种情况讨论，①当 PK 在 AD 上方时，延长 MN, KH 相交于点 Q ，根据 $MN \parallel PK$ ，推出 $EN \parallel KQ$ ，得到 $\angle AEN = \angle AHQ$ ，求出 $\angle AEN$ 的度数，再根据 $\angle KHD = \angle AHQ$ 即可求解；②当 PK 在 BC 下方时，延长 MN, HK 相交于点 O ，根据 $MN \parallel PK$ ，推出 $EN \parallel HO$ ，得到 $\angle AEN = \angle AHO$ ，再根据 $\angle AHO + \angle KHD = 180^\circ$ 即可求解。

【详解】解：①当 PK 在 AD 上方时，延长 MN, KH 相交于点 Q ，如图所示



$$\because MN \parallel PK$$

$$\therefore \angle K = \angle Q$$

$$\because \angle K = 90^\circ$$

$$\therefore \angle Q = 90^\circ$$

$$\because \angle MNE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MNE = \angle Q$$

$$\therefore EN \parallel KQ$$

$$\therefore \angle AEN = \angle AHQ$$

$$\because \angle EFC = 37^\circ, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle AEF = \angle EFC = 37^\circ$$

$\because$ 翻折

$$\therefore \angle AEF = \angle NEF = 37^\circ$$

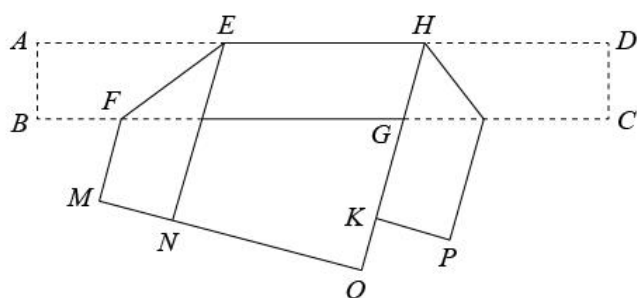
$$\therefore \angle AEN = 74^\circ$$

$$\therefore \angle AHQ = 74^\circ$$

$$\because \angle KHD = \angle AHQ$$

$$\therefore \angle KHD = 74^\circ$$

②当PK在BC下方时，延长MN、HK相交于点O，如图所示



$$\because MN \parallel PK$$

$$\therefore \angle O = \angle OKP = 90^\circ$$

$$\because \angle MNE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MNE = \angle O$$

$$\therefore EN \parallel HO$$

$$\therefore \angle AEN = \angle AHO$$

$$\because \angle EFC = 37^\circ, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle AEF = \angle EFC = 37^\circ$$

$\because$ 翻折

$$\therefore \angle AEF = \angle NEF = 37^\circ$$

$$\therefore \angle AEN = 74^\circ$$

$$\therefore \angle AHO = 74^\circ$$

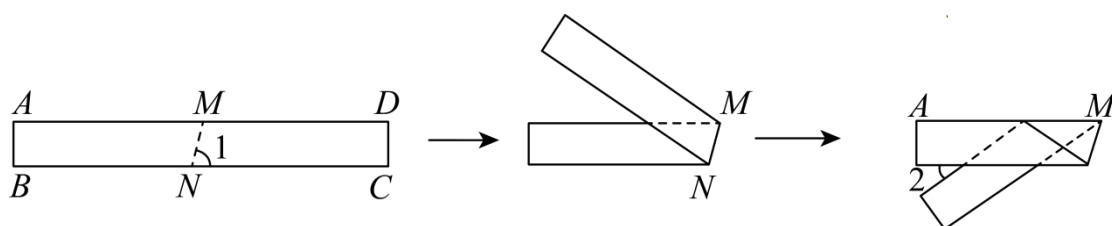
$$\because \angle AHO + \angle KHD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle KHD = 106^\circ$$

故选 D.

【点睛】本题考查了翻折、平行线的判定和性质、对顶角等知识点，分情况讨论，画出对应图形进行求解是解答本题的关键.

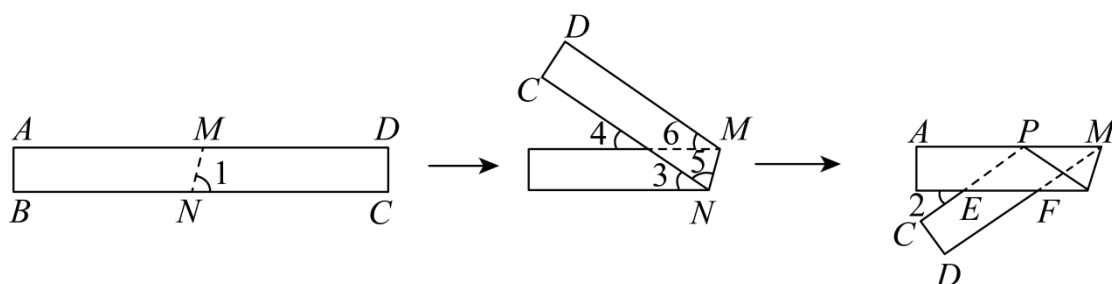
【变式 2-1】（2023 下·福建宁德·七年级统考期末）如图，将一条长方形彩带 $ABCD$ 进行两次折叠，先沿折痕 MN 向上折叠，再沿折痕 AM 向背面折叠，若要使两次折叠后彩带的夹角 $\angle 2 = 26^\circ$ ，则第一次折叠时 $\angle 1$ 应等于 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】77

【分析】如图所示，根据平行的性质可以得出答案.

【详解】解：如图：



∵ 折叠，

$$\therefore \angle 1 = \angle 5,$$

$$\therefore \angle 3 + 2\angle 5 = \angle 3 + 2\angle 1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 3),$$

∵ 彩带两边平行，

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \angle 6,$$

∵ 折叠，彩带两边平行，

$$\therefore \angle 2 = \angle PEF = \angle PMF = \angle 6,$$

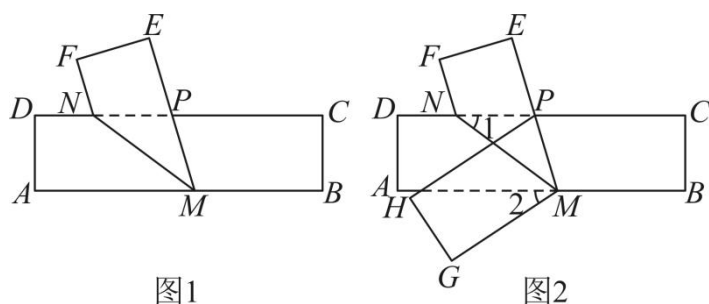
$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 26^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 3) = \frac{1}{2}(180^\circ - 26^\circ) = 77^\circ.$$

故答案为：77.

【点睛】此题考查了平行线的性质，熟知两直线平行，内错角相等是解题的关键.

【变式 2-2】（2023 下·浙江温州·七年级温州市第十二中学校联考期中）已知 M, N 分别是长方形纸条 $ABCD$ 边 AB, CD 上两点 ($AM > DN$)，如图 1 所示，沿 M, N 所在直线进行第一次折叠，点 A, D 的对应点分别为点 E, F ， EM 交 CD 于点 P ；如图 2 所示，继续沿 PM 进行第二次折叠，点 B, C 的对应点分别为点 G, H ，若 $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $\angle CPM$ 的度数为 ()



- A. 74° B. 72° C. 70° D. 68°

【答案】B

【分析】由翻折的性质和长方形的性质可得出： $\angle AMN = \angle NMP = \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle CPM = \angle HPM$ ，据此可得 $\angle AMP = 2\angle 1$ ， $\angle GMP = 3\angle 1$ ，再根据 $HP \parallel GM$ 得 $\angle HPM + \angle GMP = 180^\circ$ ，根据 $CP \parallel BM$ 得 $\angle CPM = \angle AMP = 2\angle 1$ ，据此可求出 $\angle 1 = 36^\circ$ ，进而可求出 $\angle CPM$ 的度数.

【详解】解：由翻折的性质得： $\angle AMN = \angle NMP$ ， $\angle CPM = \angle HPM$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle AMN = \angle 1$ ，

$\therefore \angle NMP = \angle 1$ ，

又 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle AMN = \angle NMP = \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle AMP = 2\angle 1$ ， $\angle GMP = 3\angle 1$ ，

$\because HP \parallel GM$ ，

$\therefore \angle HPM + \angle GMP = 180^\circ$ ，

即： $\angle HPM + 3\angle 1 = 180^\circ$ ，

$\because CP \parallel BM$ ，

$\therefore \angle CPM = \angle AMP = 2\angle 1$ ，

$\therefore \angle HPM = \angle CPM = 2\angle 1$ ，

$\therefore 2\angle 1 + 3\angle 1 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 36^\circ$ ，

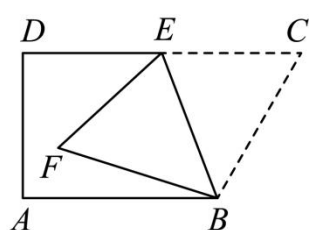
$\therefore \angle CPM = 2\angle 1 = 72^\circ$.

故选：B.

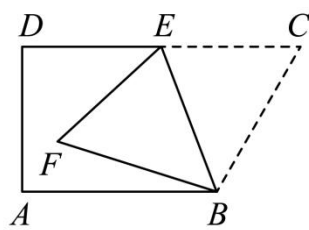


【点睛】此题主要考查了图形的翻折变换和性质，平行线的性质，解答此题的关键是准确识图，利用图形翻折性质及平行线的性质准确的找出相关的角的关系。

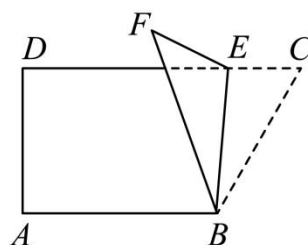
【变式 2-3】（2023 下·河南南阳·七年级统考期末）如图，已知四边形纸片 $ABCD$ 的边 $AB \parallel CD$ ， E 是边 CD 上任意一点， $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，点 C 落在点 F 的位置。



图①



图②



图③

(1) 观察发现：如图①所示： $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，则 $\angle ABF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 拓展探究：如图②，点 F 落在四边形 $ABCD$ 的内部，探究 $\angle FED$ ， $\angle ABF$ ， $\angle C$ 之间的数量关系，并证明；

(3) 迁移应用：如图③，点 F 落在边 CD 的上方，则 (2) 中的结论是否成立？若成立，请证明；若不成立，请写出它们的数量关系并证明。

【答案】(1) 15°

(2) $\angle FED + \angle ABF = \angle C$ ，证明见解析

(3) 不成立，数量关系应为： $\angle ABF - \angle FED = \angle C$ ，证明见解析

【分析】(1) 根据已知条件，结合平行线的性质，算出 $\angle ABC$ ，再结合折叠、四边形内角和，算出 $\angle FBC$ ，最后根据 $\angle ABF = \angle ABC - \angle FBC$ 计算即可；

(2) 过点 F 作 $MN \parallel CD$ ，交 AD 于点 M ，交 BC 于点 N ，由平行线的性质可得 $\angle FED = \angle EFN$ ，根据平行公理的推论可得 $MN \parallel AB$ ，继而得到 $\angle NFB = \angle ABF$ ，再结合折叠的性质可得数量关系；

(3) 过点 F 作 $GH \parallel CD$ ，由平行线的性质可得 $\angle FED = \angle HFE$ ，根据平行公理的推论可得 $GH \parallel AB$ ，继而得到 $\angle ABF = \angle HFB$ ，再结合折叠的性质可得数量关系。

【详解】(1) 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，点 C 落在点 F 的位置， $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle C = 120^\circ$ ，（两直线平行，同旁内角互补）

$\angle FEC = 180^\circ - \angle FED = 135^\circ$ ，

$\angle F = \angle C = 60^\circ$ ，

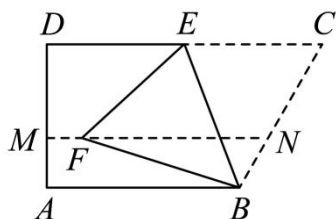
$\therefore \angle FBC = 360^\circ - \angle F - \angle C - \angle FEC = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 135^\circ = 105^\circ$ ，（四边形内角和为 360° ）

$\therefore \angle ABF = \angle ABC - \angle FBC = 120^\circ - 105^\circ = 15^\circ$ ，



故答案为：15°

(2) 解：如下图，过点F作 $MN \parallel CD$ ，交AD于点M，交BC于点N



则 $\angle FED = \angle EFN$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore MN \parallel AB$,

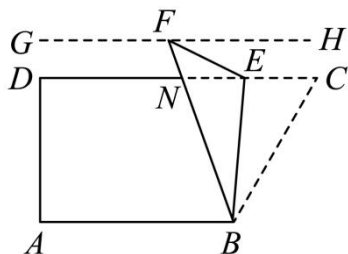
$\therefore \angle NFB = \angle ABF$,

$\therefore \angle FED + \angle ABF = \angle EFN + \angle NFB = \angle EFB$,

由折叠的性质得， $\angle EFB = \angle C$

$\therefore \angle FED + \angle ABF = \angle C$

(3) 解：如下图，过点F作 $GH \parallel CD$ ，则 $\angle FED = \angle HFE$,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore GH \parallel AB$,

$\therefore \angle ABF = \angle HFB = \angle HFE + \angle BFE = \angle FED + \angle BFE$,

由折叠的性质得， $\angle BFE = \angle C$

$\therefore \angle ABF = \angle FED + \angle C$ ，即 $\angle ABF - \angle FED = \angle C$

【点睛】本题考查了折叠的性质、平行线的性质、平行公理的推论。掌握折叠的性质和平行线的性质是解题的关键。

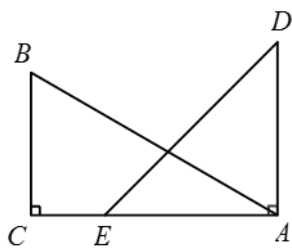
【题型3 旋转使平行】

【例3】（2023下·江苏苏州·七年级统考期末）在一次课外活动中，小明将一副直角三角板如图放置，E在AC上， $\angle C = \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ 。小明将 $\triangle ADE$ 从图中位置开始，绕点A按每秒 6° 的速



润禾托管

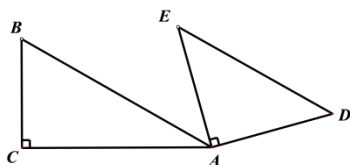
度顺时针旋转一周，在旋转过程中，第____秒时，边 AB 与边 DE 平行.



【答案】 $\frac{25}{2}$ 或 $\frac{85}{2}$

【分析】分两种情况：① DE 在 AB 上方；② DE 在 AB 下方，画出相应的图形，利用平行线的性质即可求得答案.

【详解】①当 DE 在 AB 上方，



$$\because \angle C = \angle DAE = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle D = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ, \angle E = 45^\circ,$$

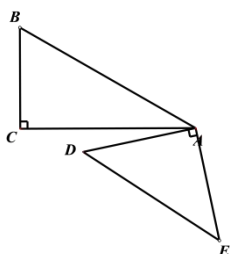
$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAC + \angle BAE = 75^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转时间为: } \frac{75^\circ}{6^\circ} = \frac{25}{2} \text{ (秒)};$$

②当 DE 在 AB 下方，



$$\because \angle C = \angle DAE = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle D = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ, \angle E = 45^\circ,$$

$$\because AB \parallel DE,$$



$$\therefore \angle BAE + \angle E = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 180^\circ - \angle E = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAE - \angle BAC = 105^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转角度为: } 360^\circ - \angle CAE = 255^\circ,$$

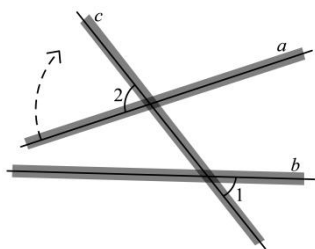
$$\therefore \text{旋转时间为: } \frac{255^\circ}{6^\circ} = \frac{85}{2} \text{ (秒)},$$

综上所述: 在旋转过程中, 第 $\frac{25}{2}$ 或 $\frac{85}{2}$ 秒时, 边 AB 与边 DE 平行,

故答案为: $\frac{25}{2}$ 或 $\frac{85}{2}$.

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质, 解题的关键是对 DE 的位置进行讨论, 画出相应图形解答.

【变式 3-1】(2023 下·河北唐山·七年级统考期末)如图, 分别将木条 a, b 与固定的木条 c 钉在一起, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, 顺时针转动木条 a , 下列选项能使木条 a 与 b 平行的是 ()



A. 旋转 30°

B. 旋转 50°

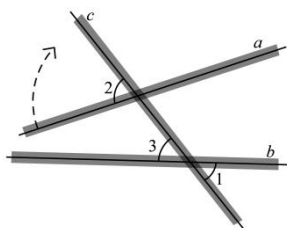
C. 旋转 80°

D. 旋转 130°

【答案】A

【分析】根据平行线的判定定理即可求解.

【详解】解: 在图中标注出 $\angle 3$, 如图所示:



若 $a \parallel b$, 则 $\angle 2 = \angle 3$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 50^\circ$$

故应将木条 a 顺时针转动 30°

故选: A



【点睛】本题考查平行线的判定定理，根据题意选择合适的判定定理是解题的关键。

【变式 3-2】（2023 下·安徽六安·七年级统考期末）两块不同的三角板按如图 1 所示摆放， AC 边与 $A'C$ 边重合， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle DAC = 30^\circ$ ，接着如图 2 保持三角板 ABC 不动，将三角板 $A'CD$ 绕着点 C （点 C 不动）按顺时针（如图标示方向）旋转，在旋转的过程中， $\angle ACA'$ 逐渐增大，当 $\angle ACA'$ 第一次等于 90° 时，停止旋转，在此旋转过程中， $\angle ACA' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 时，三角板 $A'CD$ 有一条边与三角板 ABC 的一条边恰好平行。

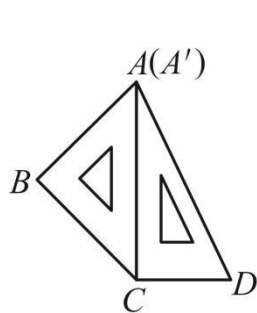


图1

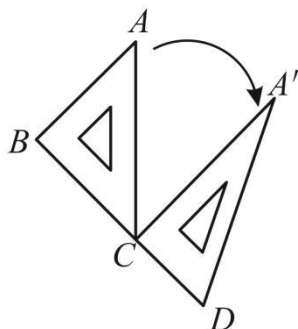


图2

【答案】 30° 或 45°

【分析】分 $CA' \parallel AB$ 和 $A'D \parallel AC$ 两种情况求解。

【详解】当 $CA' \parallel AB$ 时，

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA' = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\angle ACA' = 45^\circ;$$

当 $A'D \parallel AC$ 时，

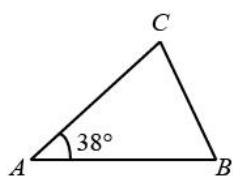
$$\because \angle CA'D = 30^\circ,$$

$$\angle ACA' = 30^\circ;$$

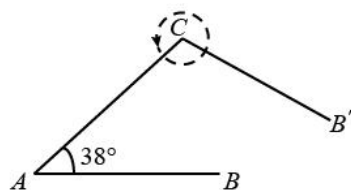
故答案为： 30° 或 45° 。

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角板中的计算，熟练掌握平行线的性质是解题的关键。

【变式 3-3】（2023 下·河北唐山·七年级统考期中）如图（1），在三角形 ABC 中， $\angle A = 38^\circ$ ， BC 边绕点 C 按逆时针方向旋转一周回到原来的位置。在旋转的过程中（图（2）），使 $CB' \parallel AB$ ，则 $\angle B'CA = (\quad)$



图(1)



图(2)

A. 38°

B. 142°

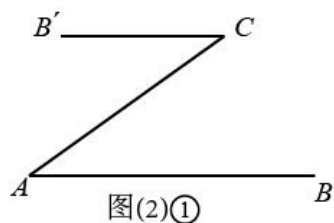
C. 38° 或 142°

D. 38° 或 52°

【答案】C

【分析】结合旋转的过程可知，因为 CB' 位置的改变， $\angle ACB'$ 与 $\angle A$ 可能构成内错角，也有可能构成同旁内角，所以需分两种情况加以计算即可。

【详解】解：如图（2）①，



图(2)①

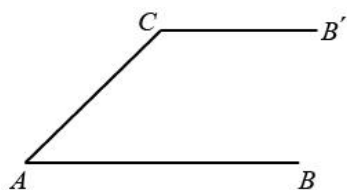
当 $\angle ACB' = 38^\circ$ 时，

$$\because \angle A = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB' = \angle A.$$

$$\therefore CB' \parallel AB.$$

如图（2）②，



图(2)②

当 $\angle ACB' = 142^\circ$ 时，

$$\because \angle A = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB' + \angle A = 142^\circ + 38^\circ = 180^\circ.$$

$$\therefore CB' \parallel AB.$$

综上所述，当 $\angle ACB' = 38^\circ$ 或 $\angle ACB' = 142^\circ$ 时， $CB' \parallel AB$ 。

故选：C。



【点睛】本题考查了平行线的判定、分类讨论的数学思想等知识点，根据 CB' 在旋转过程中的不同位置，进行分类讨论是解题的关键。

【题型 4 利用平行线求角度之间的关系】

【例 4】（2023 下·广东广州·七年级统考期末）点 A, C, E 在直线 l 上，点 B 不在直线 l 上，把线段 AB 沿直线 l 向右平移得到线段 CD 。

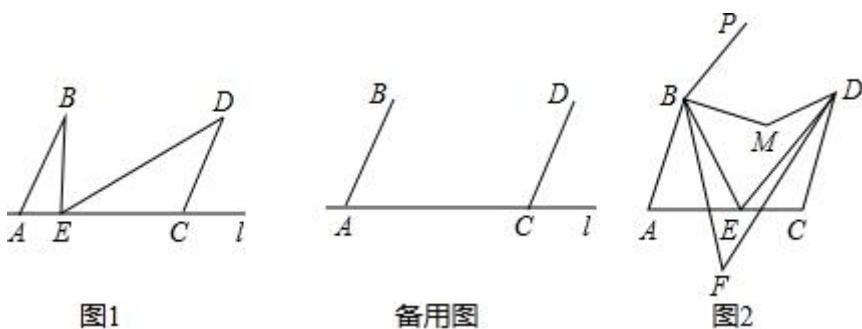


图1

备用图

图2

- (1) 如图 1，若点 E 在线段 AC 上，求证： $\angle B + \angle D = \angle BED$ ；
- (2) 若点 E 不在线段 AC 上，试猜想并证明 $\angle B, \angle D, \angle BED$ 之间的等量关系；
- (3) 在 (1) 的条件下，如图 2 所示，过点 B 作 $PB \parallel ED$ ，在直线 BP, ED 之间有点 M ，使得 $\angle ABE = \angle EBM, \angle CDE = \angle EDM$ ，同时点 F 使得 $\angle ABE = n\angle EBF, \angle CDE = n\angle EDF$ ，其中 $n \geq 1$ ，设 $\angle BMD = m$ ，利用 (1) 中的结论求 $\angle BFD$ 的度数（用含 m, n 的代数式表示）。

【答案】(1) 见解析；(2) 当点 E 在 CA 的延长线上时， $\angle BED = \angle D - \angle B$ ；当点 E 在 AC 的延长线上时， $\angle BED = \angle BET - \angle DET = \angle B - \angle D$ ；(3) $\frac{m(n-1)}{2n}$

- 【分析】(1) 如图 1 中，过点 E 作 $ET \parallel AB$ ，利用平行线的性质解决问题。
- (2) 分两种情形：如图 2-1 中，当点 E 在 CA 的延长线上时，如图 2-2 中，当点 E 在 AC 的延长线上时，构造平行线，利用平行线的性质求解即可。
- (3) 利用 (1) 中结论，可得 $\angle BMD = \angle ABM + \angle CDM, \angle BFD = \angle ABF + \angle CDF$ ，由此解决问题即可。

【详解】解：(1) 证明：如图 1 中，过点 E 作 $ET \parallel AB$ 。由平移可得 $AB \parallel CD$ ，

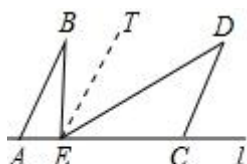


图1

$\because AB \parallel ET, AB \parallel CD,$

$\therefore ET \parallel CD \parallel AB,$



$$\therefore \angle B = \angle BET, \quad \angle TED = \angle D,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BET + \angle DET = \angle B + \angle D.$$

(2) 如图 2-1 中, 当点 E 在 CA 的延长线上时, 过点 E 作 $ET \parallel AB$.

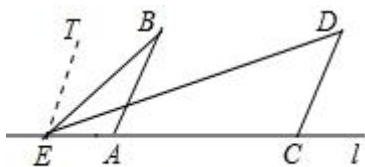


图2-1

$$\because AB \parallel ET, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore ET \parallel CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BET, \quad \angle TED = \angle D,$$

$$\therefore \angle BED = \angle DET - \angle BET = \angle D - \angle B.$$

如图 2-2 中, 当点 E 在 AC 的延长线上时, 过点 E 作 $ET \parallel AB$.

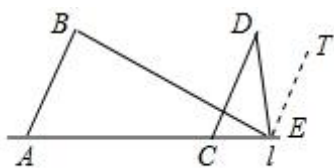


图2-2

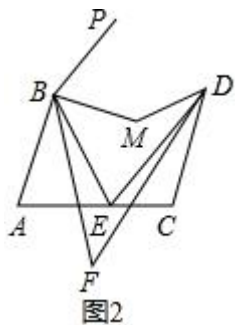
$$\because AB \parallel ET, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore ET \parallel CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BET, \quad \angle TED = \angle D,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BET - \angle DET = \angle B - \angle D.$$

(3) 如图, 设 $\angle ABE = \angle EBM = x$, $\angle CDE = \angle EDM = y$,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BMD = \angle ABM + \angle CDM,$$



润禾托管

$$\therefore m=2x+2y,$$

$$\therefore x+y=\frac{1}{2}m,$$

$$\because \angle BFD = \angle ABF + \angle CDF, \angle ABE = n \angle EBF, \angle CDE = n \angle EDF,$$

$$\therefore \angle BFD = \frac{n-1}{n}x + \frac{n-1}{n}y = \frac{n-1}{n}(x+y) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{2}m = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

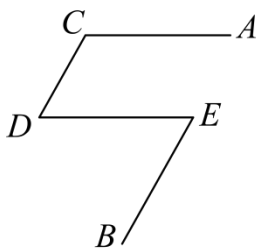
【点睛】本题属于几何变换综合题，考查了平行线的性质，角平分线的定义等知识，解题的关键是学会条件常用辅助线，构造平行线解决问题，属于中考常考题型。

【变式 4-1】（2023 下·广东广州·七年级统考期末）甲同学在学完《相交线与平行线》后，想通过折铁丝的方式进一步探索相交线与平行线的知识，他的具体操作步骤如下：

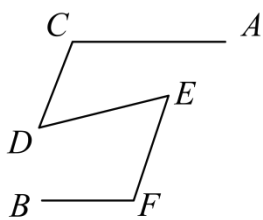
第一步：将一根铁丝 AB 在 C, D, E 处弯折得到如下图①的形状，其中 $AC \parallel DE, CD \parallel BE$ 。

第二步：将 DE 绕点 D 旋转一定角度，再将 BE 绕点 E 旋转一定角度并在 BE 上某点 F 处弯折，得到如下图②的形状。

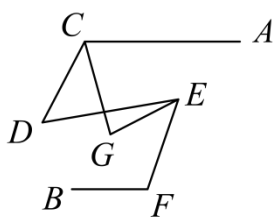
第三步：再拿出另外一根铁丝弯折成 $\angle G$ ，跟前面弯折的铁丝叠放成如下图③的形状。



图①



图②



图③

请根据上面的操作步骤，解答下列问题：

(1) 如图①，若 $\angle C = 2\angle D$ ，求 $\angle E$ ；

(2) 如图②，若 $AC \parallel BF$ ，请判断 $\angle C, \angle D, \angle E, \angle F$ 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，如图③，若 $\angle ACD = 3\angle DCG, \angle DEF = 3\angle DEG$ ，设 $\angle D = x, \angle F = y$ ，求 $\angle G$ 。（用含 x, y 的式子表示）

【答案】(1) $\angle E = 60^\circ$

(2) $\angle C + \angle CDE = \angle DEF + \angle F$ ，理由见解析

(3) $\angle G = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$

【分析】(1) 根据平行线的性质得出 $\angle C + \angle D = 180^\circ$ ，根据题意得出 $\angle D = 60^\circ$ ，进而根据 $CD \parallel BE$ ，即可求解；



(2) 过点 D, E 分别作 AC 的平行线 DN, EM , 根据平行线的性质得出 $\angle MED = \angle NDE$ 设 $\angle MED = \angle NDE = \alpha$, 进而根据平行线的性质得出 $\angle C + \angle CDE + \alpha = 180^\circ$, $\angle DEF + \alpha + \angle F = 180^\circ$, 即可得出结论;

(3) 根据(2)的结论可得 $\angle ACD + x = \angle DEF + y$, $\angle G + \angle ACG = \angle F + \angle GEF$, 根据已知 $\angle ACD = 3\angle DCG$, $\angle DEF = 3\angle DEG$, 可得 $\angle G + \frac{2}{3}\angle ACD = \frac{2}{3}\angle DEF + y$, 进而即可求解.

【详解】(1) 解: $\because AC \parallel DE$,

$$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ,$$

$$\because \angle C = 2\angle D,$$

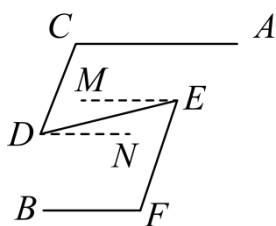
$$\therefore 3\angle D = 180$$

解得: $\angle D = 60^\circ$,

$$\because CD \parallel BE.$$

$$\therefore \angle E = \angle D = 60^\circ;$$

(2) 解: 如图所示,



图②

过点 D, E 分别作 AC 的平行线 DN, EM ,

$$\therefore EM \parallel DN,$$

$$\therefore \angle MED = \angle NDE,$$

设 $\angle MED = \angle NDE = \alpha$,

又 $\because AC \parallel BF$,

$$\therefore AC \parallel DN, ME \parallel BF,$$

$$\therefore \angle C + \angle CDE + \alpha = 180^\circ, \angle DEF + \alpha + \angle F = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C + \angle CDE = \angle DEF + \angle F, ;$$

$$(3) \because \angle D = x, \angle F = y, \angle C + \angle CDE = \angle DEF + \angle F,$$

即 $\angle ACD + x = \angle DEF + y$,

$$\therefore \angle DEF - \angle ACD = x - y,$$



润禾托管

由(2)可得 $\angle G + \angle ACG = \angle F + \angle GEF$,

$\because \angle ACD = 3\angle DCG, \angle DEF = 3\angle DEG$,

$\therefore \angle G + \frac{2}{3}\angle ACD = \frac{2}{3}\angle DEF + \angle F$,

即 $\angle G + \frac{2}{3}\angle ACD = \frac{2}{3}\angle DEF + y$,

$\therefore \angle G = y + \frac{2}{3}(\angle DEF - \angle ACD) = y + \frac{2}{3}(x - y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$,

$\therefore \angle G = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$.

【点睛】本题考查了平行线的性质与判定，熟练掌握平行线的性质与判定是解题的关键.

【变式 4-2】(2023 下·安徽·七年级统考期末)如图，直线 $m \parallel n$ ， $\text{Rt} \triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\text{Rt} \triangle ABC$ 的边 AC 、 AB 与直线 m 相交于 D 、 E 两点，边 BC 、 AB 与直线 n 交于 F 、 G 两点.

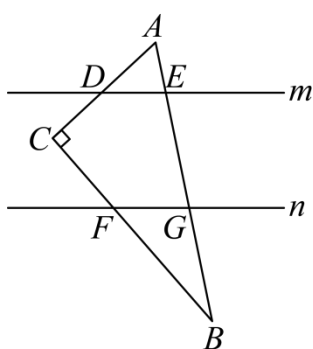


图1

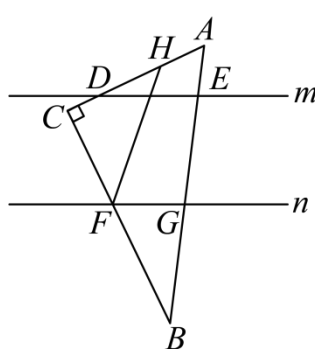


图2

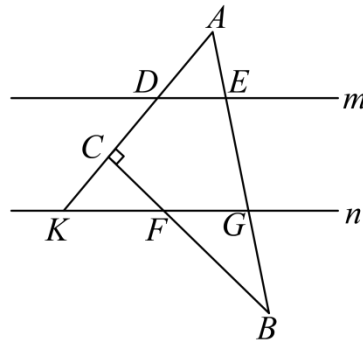


图3

(1) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$

如图 1 位置摆放，如果 $\angle ADE = 46^\circ$ ，则 $\angle CFG =$ _____；

(2) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$ 如图 2 位置摆放， H 为 AC 上一点， $\angle HFG + \angle CFG = 180^\circ$ ，请写出 $\angle HFG$ 与 $\angle ADE$ 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 将 $\text{Rt} \triangle ABC$ 如图 3 位置摆放，若 $\angle EDC = 140^\circ$ ，延长 AC 交直线 n 于点 K ，点 P 是射线 EG 上一动点，探究 $\angle PDK$ ， $\angle DPK$ 与 $\angle PKG$ 的数量关系，请直接写出结论（题中的所有角都大于 0° 小于 180° ）.

【答案】(1) $\angle CFG = 136^\circ$

(2) $\angle HFG + \angle ADE = 90^\circ$ ，理由见解析

(3) $\angle PDK + \angle DPK - \angle PKG = 140^\circ$ 或 $\angle PDK + \angle DPK + \angle PKG = 140^\circ$

【分析】(1) 过点 C 作 $CH \parallel m$ ，由 $m \parallel n$ 知， $CH \parallel m \parallel n$ ，则可得 $\angle ACH = \angle ADE = 46^\circ$ ， $\angle HCB + \angle CFG = 180^\circ$ ，再由 $\angle ACB = 90^\circ$ ，求得 $\angle HCB$ ，进而求得 $\angle CFG$ 的度数；



(2) 过点 C 作 $CQ \parallel m$, 则 $CQ \parallel m \parallel n$, 则 $\angle ADE = \angle ACQ$, $\angle CFG + \angle QCF = 180^\circ$, 结合已知即可求得 $\angle HFG$ 与 $\angle ADE$ 之间的数量关系;

(3) 分点 P 在线段 EG 上或 EG 的延长线上两种情况考虑即可求得.

【详解】(1) 解: 过点 C 作 $CH \parallel m$, 如图,

$$\because m \parallel n,$$

$$\therefore CH \parallel m \parallel n,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle ADE = 46^\circ, \angle HCB + \angle CFG = 180^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HCB = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ,$$

$$\therefore \angle CFG = 180^\circ - \angle HCB = 136^\circ;$$

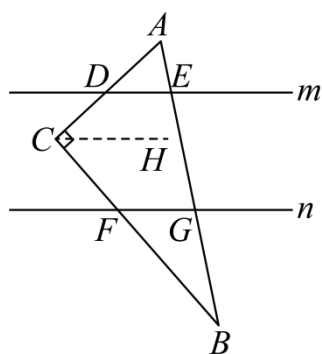
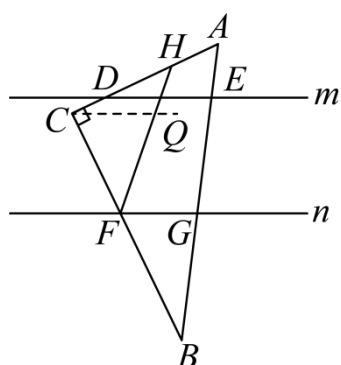


图1

故答案为: 136° ;

(2) 解: $\angle HFG + \angle ADE = 90^\circ$, 理由如下:

过点 C 作 $CQ \parallel m$, 则 $CQ \parallel m \parallel n$,



$$\therefore \angle ADE = \angle ACQ, \angle CFG + \angle QCF = 180^\circ,$$

$$\because \angle HFG + \angle CFG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle QCF = \angle HFG,$$

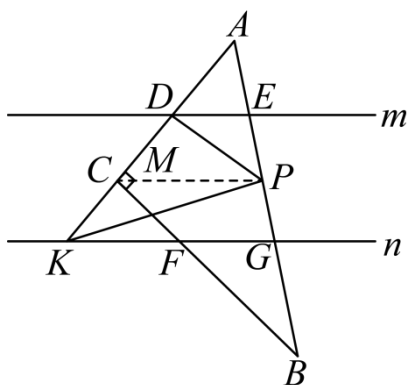


$$\because \angle ACQ + \angle QCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HFG + \angle ADE = 90^\circ,$$

(3) 解: 过点 P 作 $PM \parallel m$, 则 $PM \parallel m \parallel n$;

① 点 P 在线段 EG 上时, 如图,

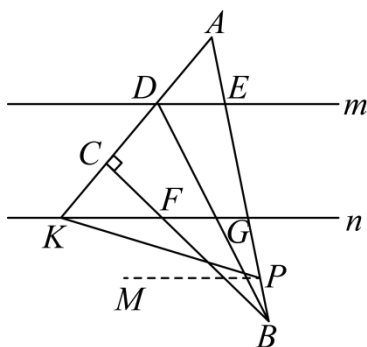


$$\therefore \angle DPM = \angle EDP = \angle EDC - \angle PDK = 140^\circ - \angle PDK, \angle MPK = \angle PKG,$$

$$\therefore \angle DPK = \angle DPM + \angle MPK = 140^\circ - \angle PDK + \angle PKG,$$

$$\therefore \angle PDK + \angle DPK - \angle PKG = 140^\circ;$$

② 点 P 在线段 EG 的延长线上时, 如图,



$$\because PM \parallel m \parallel n,$$

$$\therefore \angle KPM = \angle PKG, \angle PDE = \angle DPM,$$

$$\because \angle PDE = \angle EDC - \angle PDK = 140^\circ - \angle PDK, \angle DPM = \angle DPK + \angle KPM = \angle DPK + \angle PKG,$$

$$\therefore \angle DPK + \angle PKG = 140^\circ - \angle PDK,$$

$$\text{即 } \angle PDK + \angle DPK + \angle PKG = 140^\circ,$$

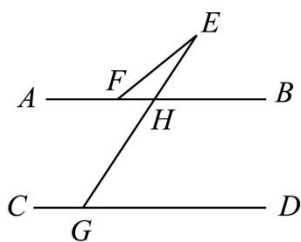
综上: $\angle PDK + \angle DPK - \angle PKG = 140^\circ$ 或 $\angle PDK + \angle DPK + \angle PKG = 140^\circ$.

【点睛】 本题考查了平行线的性质, 平行公理推论, 角的和差关系, 构造平行线是本题的关键, 注意分类讨论.

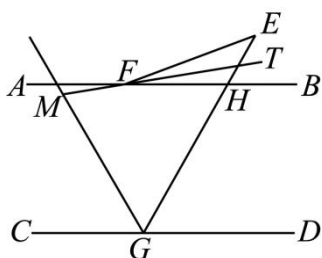


润禾托管

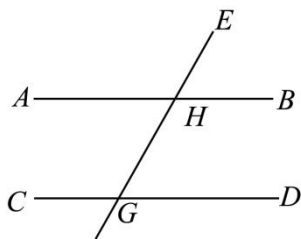
【变式 4-3】（2023 下·湖北武汉·七年级统考期末）【问题情境】如图 1， $AB \parallel CD$ ，直线 EG 交 AB 于点 H ，交 CD 于点 G ，点 F 在直线 AB 上．直接写出 $\angle E$ ， $\angle EFH$ ， $\angle EGD$ 之间的数量关系为_.



【实践运用】如图 2， $AB \parallel CD$ ，直线 EG 交 AB 于点 H ，交 CD 于点 G ，点 F 在直线 AB 上． FT 平分 $\angle EFH$ ， GM 平分 $\angle EGC$ ，若 $\angle E = 40^\circ$ ，求 $\angle FMG$ 的度数.



【拓广探索】如图 3， $AB \parallel CD$ ，直线 EG 交 AB 于点 H ，交 CD 于点 G ，点 P 为平面内不在直线 AB ， CD ， EG 上的一点，若 $\angle BHP = x$ ， $\angle DGP = y$ ，则 $\angle HPG =$ _（直接写出答案，用 x ， y 表示）.



【答案】【问题情境】 $\angle EGD = \angle FEH + \angle EFH$ ；【实践运用】 $\angle FMG$ 的度数为 70° ；【拓广探索】 $\angle HPG$ 的大小为 $x - y$ 或 $y - x$ 或 $x + y$ 或 $360^\circ - x - y$.

【分析】问题情境：如图，作 $EQ \parallel AB$ ，而 $AB \parallel CD$ ，则 $EQ \parallel AB \parallel CD$ ，再利用平行线的性质可得结论；

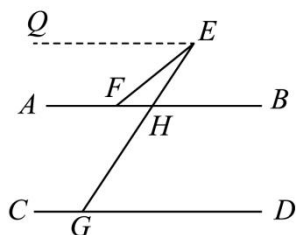
实践运用：设 $\angle EFT = x$ ， FT 平分 $\angle EFH$ ，可得 $\angle EFT = \angle TFH = \angle AFM = x$ ，由 (1) 得： $\angle EGD = \angle EFH + \angle E = 2x + 40^\circ$ ，可得 $\angle MGC = \frac{1}{2} \angle HCG = 70^\circ - x$ ．过点 M 作 $MK \parallel AB$ ，则 $MK \parallel AB \parallel CD$ ，可得

$\angle FMK = \angle AFM = x$ ． $\angle KMG = \angle MGC = 70^\circ - x$ ，再利用角的和差关系可得答案；

拓广探索：对 P 点的位置有六种可能，再分情况画出图形，利用数形结合的方法解题即可．

【问题情境】如图，作 $EQ \parallel AB$ ，而 $AB \parallel CD$ ，

$\therefore EQ \parallel AB \parallel CD$ ，



$$\therefore \angle EGD = \angle QEG = \angle EHB, \angle QEF = \angle EFB,$$

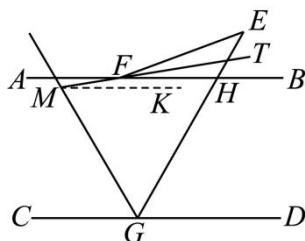
$$\because \angle FEH = \angle QEG - \angle QEF,$$

$$\therefore \angle FEH = \angle EHB - \angle EFH,$$

$$\therefore \angle EGD = \angle FEH + \angle EFH.$$

【实践运用】设 $\angle EFT = x$, FT 平分 $\angle EFH$,

$$\therefore \angle EFT = \angle TFH = \angle AFM = x,$$



$$\text{由 (1) 得: } \angle EGD = \angle EFH + \angle E = 2x + 40^\circ,$$

$$\therefore \angle HCG = 140^\circ - 2x.$$

$$\because GM \text{ 平分 } \angle EGC.$$

$$\therefore \angle MGC = \frac{1}{2} \angle HCG = 70^\circ - x.$$

过点 M 作 $MK \parallel AB$, 则 $MK \parallel AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle FMK = \angle AFM = x.$$

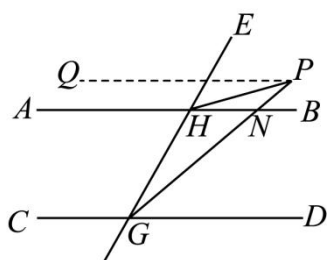
$$\because MK \parallel CD,$$

$$\therefore \angle KMG = \angle MGC = 70^\circ - x,$$

$$\therefore \angle FMG = \angle KMG + \angle FMK = 70^\circ - x + x = 70^\circ.$$

【拓广探索】对 P 点的位置有六种可能,

①如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$,

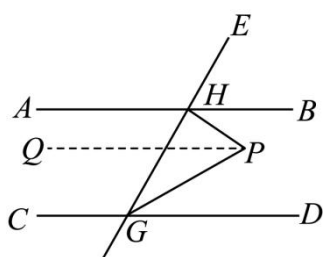


$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$, 而 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$,

$\therefore \angle DGP = \angle QPG = y$, $\angle BHP = \angle QPH = x$,

$\therefore \angle HPG = \angle QPG - \angle HPQ = y - x$,

②如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$,

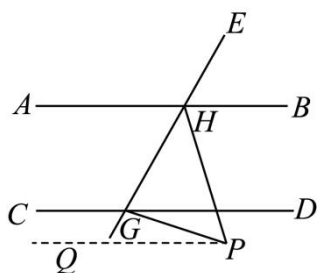


$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DGP = \angle QPG = y$, $\angle BHP = \angle QPH = x$,

$\therefore \angle HPG = \angle QPG + \angle HPQ = y + x$,

③如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$,

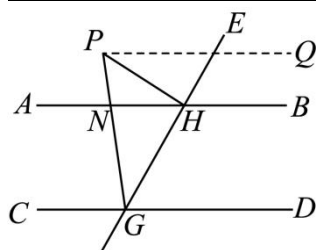


$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$, 而 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$,

$\therefore \angle DGP = \angle QPG = y$, $\angle BHP = \angle QPH = x$,

$\therefore \angle HPG = \angle HPQ - \angle QPG = x - y$,

④如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$, 记 PG, AB 的交点为 N ,

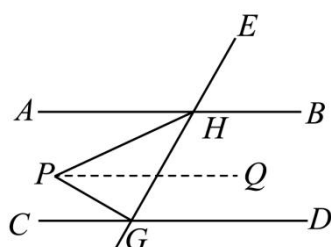


$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$, 而 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$,

$\therefore \angle QPG = 180^\circ - \angle DGP = 180^\circ - y$, $\angle QPH = 180^\circ - \angle PHB = 180^\circ - x$,

$\therefore \angle HPG = \angle GPQ - \angle QPH = 180^\circ - y - 180^\circ + x = x - y$,

⑤如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$,

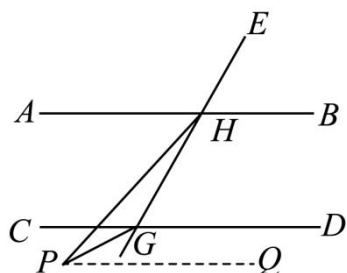


$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$, 而 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$,

$\therefore \angle QPG = 180^\circ - \angle DGP = 180^\circ - y$, $\angle QPH = 180^\circ - \angle PHB = 180^\circ - x$,

$\therefore \angle HPG = \angle GPQ + \angle QPH = 180^\circ - y + 180^\circ - x = 360^\circ - x - y$,

⑥如图所示, 作 $PQ \parallel AB$, 而 $AB \parallel CD$,



$\therefore PQ \parallel AB \parallel CD$, 而 $\angle BHP = x$, $\angle DGP = y$,

$\therefore \angle QPG = 180^\circ - \angle DGP = 180^\circ - y$, $\angle QPH = 180^\circ - \angle PHB = 180^\circ - x$,

$\therefore \angle HPG = \angle QPH - \angle GPQ = 180^\circ - x - 180^\circ + y = y - x$,

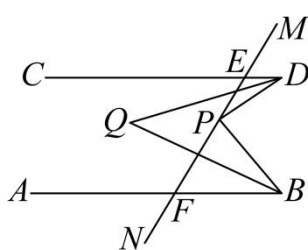
综上: $\angle HPG$ 的大小为 $x - y$ 或 $y - x$ 或 $x + y$ 或 $360^\circ - x - y$.

【点睛】 本题考查的是平行公理的应用, 平行线的性质, 角平分线的性质, 掌握“利用平行线的性质探究角与角之间的数量关系”是解本题的关键.

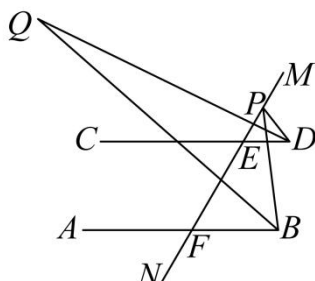


【题型 5 利用平行线解决角度定值问题】

【例 5】（2023 下·河南商丘·七年级统考期末）已知 $AB \parallel CD$ ， P 是截线 MN 上的一点， MN 与 CD ， AB 分别交于 E ， F 。



图(1)



图(2)

- (1) 如图(1)， P 在 AB 、 CD 之间，若 $\angle EFB = 50^\circ$ ， $\angle EDP = 35^\circ$ ，求 $\angle MPD$ 的度数；
- (2) 如图(1)，当点 P 在线段 EF 上运动时， $\angle CDP$ 与 $\angle ABP$ 的平分线交于 Q ，则 $\frac{\angle Q}{\angle DPB}$ 是否为定值？若是定值，请求出定值；若不是，说明其范围；
- (3) 如图(2)，当点 P 在线段 FE 的延长线上运动时， $\angle CDP$ 与 $\angle ABP$ 的平分线交于 Q ， $\frac{\angle Q}{\angle DPB}$ 的值是否为定值？若是，求出定值，若不是，请说明理由。

【答案】(1) 15°

(2) 是定值， $\frac{\angle Q}{\angle DPB} = \frac{1}{2}$

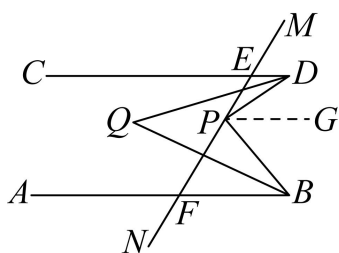
(3) 是， $\frac{1}{2}$

【分析】(1) 过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，利用平行线的性质进行角得相关计算可求 $\angle MPD$ 的度数；

(2) 由(1)的结论结合角平分线的性质可以解决问题；

(3) 过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，过点 Q 作 $QH \parallel AB$ ，由平行线性得 $\angle DPG = \angle CDP$ ， $\angle BPG = \angle ABP$ ，从而得 $\angle DPB = \angle BPG - \angle DPG = \angle ABP - \angle CDP$ ，同理可得 $\angle Q = \angle CDQ + \angle ABQ$ ，再由角平分线的定义即可求解。

【详解】(1) 解：(1) 如图，当点 P 在线段 AB ， CD 之间时，过点 P 作 $PG \parallel AB$ 。





$\because AB \parallel CD, PG \parallel AB,$

$\therefore PG \parallel CD.$

$\because \angle EFB = 50^\circ, \angle EDP = 35^\circ$

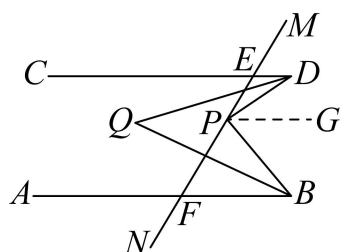
$\therefore \angle EPG = \angle EFB = 50^\circ,$

$\angle DPG = \angle EDP = 35^\circ.$

$\therefore \angle MPD = \angle EPG - \angle DPG = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ.$

(2) 解: $\frac{\angle Q}{\angle DPB}$ 是定值,

如图,



由(1)知 $AB \parallel PG \parallel CD,$

$\therefore \angle DPG = \angle CDP, \angle BPG = \angle ABP,$

$\therefore \angle DPB = \angle DPG + \angle BPG = \angle CDP + \angle ABP,$

同理可得 $\angle Q = \angle CDQ + \angle ABQ,$

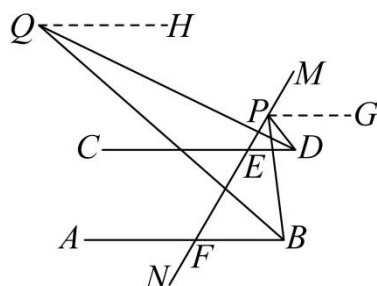
又 $\because DQ, BQ$ 分别平分 $\angle CDP, \angle ABP,$

$\therefore \angle CDQ = \frac{1}{2} \angle CDP, \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle ABP,$

$\therefore \angle Q = \angle CDQ + \angle ABQ = \frac{1}{2}(\angle CDP + \angle ABP) = \frac{1}{2} \angle DPB,$

$\therefore \frac{\angle Q}{\angle DPB} = \frac{1}{2}.$

(3) 解: 如图, 过点 P 作 $PG \parallel AB$, 过点 Q 作 $QH \parallel AB$,





$\because AB \parallel CD$,

$\therefore PG \parallel CD \quad QH \parallel CD$,

$\therefore \angle DPG = \angle CDP, \angle BPG = \angle ABP$,

$\therefore \angle DPB = \angle BPG - \angle DPG = \angle ABP - \angle CDP$,

同理可得 $\angle BQD = \angle ABQ - \angle CDQ$,

又 $\because DQ、BQ$ 分别平分 $\angle CDP$ 与 $\angle ABP$,

$\therefore \angle CDQ = \frac{1}{2} \angle CDP, \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle ABP$,

$\therefore \angle BQD = \angle ABQ - \angle CDQ = \frac{1}{2} (\angle ABP - \angle CDP) = \frac{1}{2} \angle DPB$,

$\therefore \frac{\angle BQD}{\angle DPB} = \frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质，及角平分线的定义，运用角的和与差解决问题，正确作出辅助线是解题的关键。

【变式 5-1】（2023 下·福建龙岩·七年级校考阶段练习）如图 1，点 $A、D$ 分别在射线 $BM、CN$ 线上， $BM \parallel CN$ ， $BM \perp BC$ 于点 B ， AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E ，连接 DE ， $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ 。

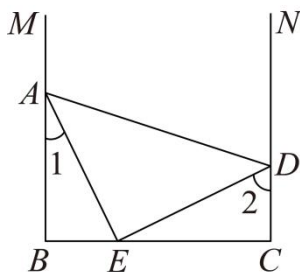


图1

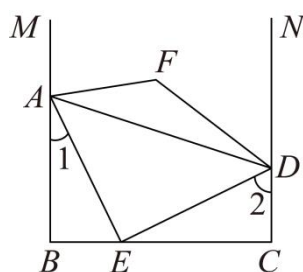


图2

(1) 求证： $AE \perp ED$ ；

(2) 求证： DE 平分 $\angle ADC$ ；

(3) 如图 2， $\angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点 F ，试猜想 $\angle F$ 的值是否为定值，若是，请予以证明；若不是，请说明理由。

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

(3) $\angle F$ 为定值， $\angle F = 135^\circ$ ，理由见解析



【分析】(1) 过点E作 $EG \parallel BM$ ，根据两直线平行内错角相等，得出 $\angle AED = \angle 1 + \angle 2$ ，即可求解.

(2) 根据两直线平行同旁内角互补，得出 $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$ ，再将各个角代入计算，得出 $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 1 + \angle 5) = 180^\circ$ ， $\angle 5 = \angle 2$ ，即可求解；

(3) 过点F作 $FH \parallel BM$ ， $\angle AFH = \alpha$ ， $\angle DFH = \beta$ ，根据平行线性质的得出 $\angle \alpha + \angle \beta = \angle 6 + \angle 7$ ，由于 $\angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点F，所以 $\angle \alpha + \angle \beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 1) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2)$ ，即可求解.

【详解】(1) 证明：如图1，

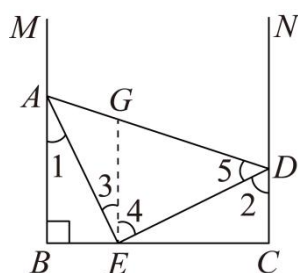


图1

过点E作 $EG \parallel BM$ ，则 $\angle 1 = \angle 3$ ，

$\because BM \parallel CN$ ，

$\therefore EG \parallel CN$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = 90^\circ$ ，

$\therefore AE \perp ED$.

(2) 证明： $\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle BAD = 2\angle 1$ ，

$\because BM \parallel CN$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$ ，

$\therefore 2\angle 1 + \angle CDA$ ，

$= 2\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ ，

$= (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 1 + \angle 5) = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle 5 = \angle 2,$$

$$\therefore DE \text{ 平分 } \angle ADC.$$

(3) $\angle F$ 为定值.

证明: 如图 2, 过点 F 作 $FH \parallel BM$, 设 $\angle AFH = \alpha$, $\angle DFH = \beta$,

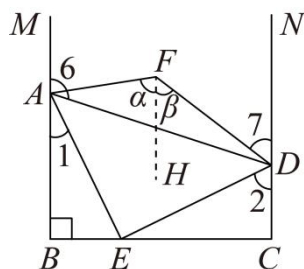


图2

$$\because BM \parallel CN,$$

$$\therefore FH \parallel CN,$$

$$\therefore \angle \alpha + \angle \beta = \angle 6 + \angle 7,$$

$\because \angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点 F ,

$$\therefore \angle \alpha + \angle \beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 1) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$$

$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

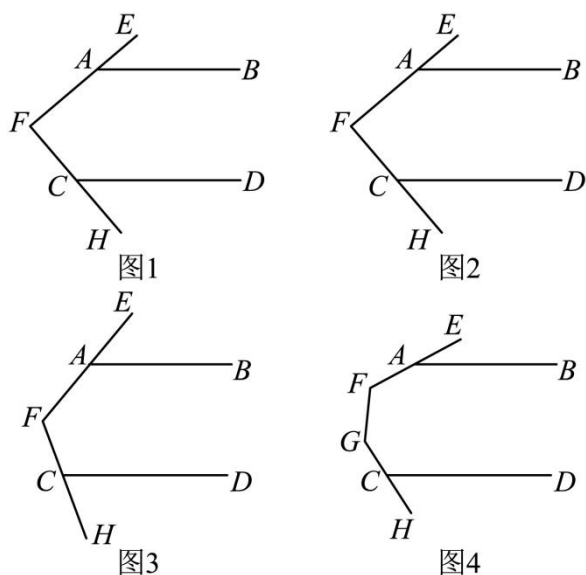
$$\therefore \angle F = \angle \alpha + \angle \beta = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle F \text{ 为定值, } \angle F = 135^\circ,$$

故答案为: $\angle F = 135^\circ$.

【点睛】本题主要考查垂线、角平分线的性质, 解题的关键是掌握垂垂线的概念和角平分线的性质及角的和差计算等知识点.

【变式 5-2】(2023 下·河北保定·七年级统考期末) 如图 1, 已知 $\angle EFH = 90^\circ$, 点 A, C 分别在射线 FE 和 FH 上, 在 $\angle EFH$ 内部作射线 AB, CD , 使 AB 平行于 CD .



- (1)如图 1, 若 $\angle FAB = 150^\circ$, 求 $\angle HCD$ 的度数;
- (2)小颖发现, 在 $\angle EFH$ 内部, 无论 $\angle FAB$ 如何变化, $\angle FAB - \angle HCD$ 的值始终为定值, 请你结合图 2 求出这一定值;
- (3)①如图 3, 把图 1 中的 $\angle EFH = 90^\circ$ 改为 $\angle EFH = 120^\circ$, 其他条件不变, 请直接写出 $\angle FAB$ 与 $\angle HCD$ 之间的数量关系;
- ②如图 4, 已知 $\angle EFG + \angle FGC = \alpha$, 点 A, C 分别在射线 FE, GH 上, 在 $\angle EFG$ 与 $\angle FGH$ 内部作射线 AB, CD , 使 AB 平行于 CD , 请直接写出 $\angle FAB$ 与 $\angle HCD$ 之间的数量关系.

【答案】 (1) 60°

(2) 90°

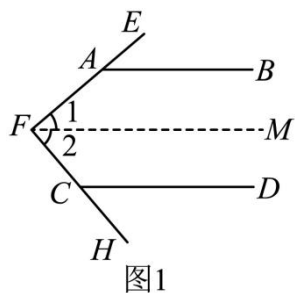
(3)① $\angle FAB - \angle HCD = 60^\circ$, ② $\angle FAB - \angle HCD = 360^\circ - \alpha$

【分析】 (1) 过点 F 作 $FM \parallel AB$, 可以求出 $\angle 1 = 30^\circ$, 结合 $AB \parallel CD$, 可以得到 $AB \parallel CD$, 即可求出 $\angle HCD$ 的度数;

(2) 过点 F 作 $FN \parallel AB$, 结合已知 $AB \parallel CD$ 可以得出 $FN \parallel CD$, 进而得到 $\angle HCD = \angle 2$, 即可求出, $\angle FAB - \angle HCD$ 的值;

(3) ①根据题意画出对应的图形, 结合平行线的性质和判定即可得到 $\angle FAB$ 与 $\angle HCD$ 之间的数量关系;
②根据题意画出对应的图形, 添加适当的辅助线, 结合平行线的性质与判定即可正确解答.

【详解】 (1) 过点 F 作 $FM \parallel AB$



$$\therefore \angle FAB + \angle 1 = 180^\circ$$

$$\because \angle FAB = 150^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = 30^\circ$$

$$\because AB \parallel CD$$

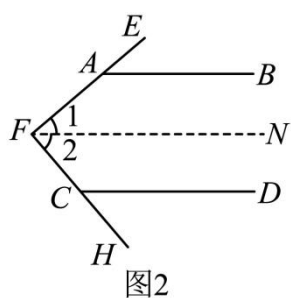
$$\therefore MN \parallel CD$$

$$\therefore \angle HCD = \angle 2$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle HCD = \angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$$

(2) 过点F作FN $\parallel$ AB



$$\therefore \angle FAB + \angle 1 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle FAB$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore FN \parallel CD$$

$$\therefore \angle HCD = \angle 2$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\therefore 180^\circ - \angle FAB + \angle HCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FAB - \angle HCD = 90^\circ$$

(3) ① $\angle FAB - \angle HCD = 60^\circ$

② $\angle FAB - \angle HCD = 360^\circ - \alpha$



润禾托管

【点睛】本题主要考查的是平行线模型，根据题意画出对应的图形，添加适当的辅助线是解题的关键。

【变式 5-3】（2023 下·湖北武汉·七年级统考期末）如图 1，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ，点 A 、 B 在直线 l_1 上，点 C 、 D 在 l_2 上，线段 AD 交线段 BC 于点 E ，且 $\angle BED = 60^\circ$ 。

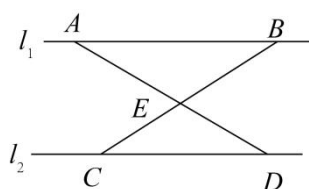


图 1

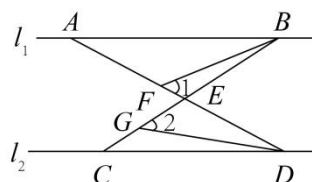


图 2

(1) 求证： $\angle ABE + \angle EDC = 60^\circ$ ；

(2) 如图 2，当 F 、 G 分别在线段 AE 、 EC 上，且 $\angle ABF = 2\angle FBE$ ， $\angle EDG = 2\angle GDC$ ，标记 $\angle BFE$ 为 $\angle 1$ ， $\angle BGD$ 为 $\angle 2$ 。

① 若 $\angle 1 - \angle 2 = 16^\circ$ ，求 $\angle ADC$ 的度数；

② 当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $(k\angle 1 + \angle 2)$ 为定值，此时定值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) ① 36° ；② 2； 140°

【分析】(1) 利用平行线的性质解答即可；

(2) ① 设 $\angle FBE = a$ ， $\angle GDC = b$ ，则 $\angle ABF = 2a$ ， $\angle EDG = 2b$ ，结合平行线的性质，利用方程的思想方法，依据已知条件列出方程组即可求解；

② 利用①中的方法，设 $\angle FBE = a$ ， $\angle GDC = b$ ，则 $\angle ABF = 2a$ ， $\angle EDG = 2b$ ，通过计算 $k\angle 1 + \angle 2$ ，令计算结果中的 a 的系数为 0 即可求得结论。

【详解】(1) 证明：如图，作 $EF \parallel l_2$ ，

$$\therefore \angle FED = \angle EDC,$$

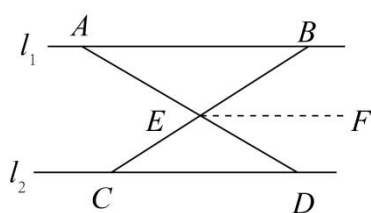
$$\because l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore EF \parallel l_1,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BEF,$$

$$\because \angle BED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle EDC = \angle BEF + \angle FED = \angle BED = 60^\circ$$



(2) 设 $\angle FBE = a$, $\angle GDC = b$,

$\because \angle ABF = 2\angle FBE$, $\angle EDG = 2\angle GDC$,

$\therefore \angle ABF = 2a$, $\angle EDG = 2b$,

$\because l_1 \parallel l_2$,

$\therefore \angle BAD = \angle ADC = 3b$, $\angle ABC = \angle BCD = 3a$,

由 (1) 可得:

$\angle 1 = 2a + 3b$, $\angle 2 = 3a + b$, $\angle BED = 3a + 3b = 60^\circ$,

$\therefore a + b = 20^\circ$,

$\therefore \angle 1 = 60^\circ - a$, $\angle 2 = 20^\circ + 2a$,

① $\because \angle 1 - \angle 2 = 16^\circ$,

$\therefore 60^\circ - a - (20^\circ + 2a) = 16^\circ$,

$\therefore a = 8^\circ$, $b = 12^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 3b = 36^\circ$;

② $k = 2$, 定值为 140° , 理由如下:

$k\angle 1 + \angle 2$

$= k(60^\circ - a) + (20^\circ + 2a)$

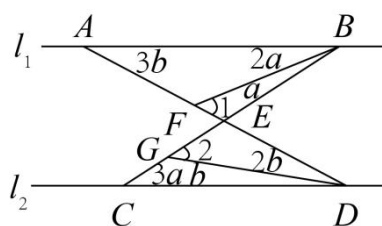
$= 60^\circ k - ka + 20^\circ + 2a$

$= (2 - k)a + 60^\circ k + 20^\circ$

当 $k = 2$ 时, $k\angle 1 + \angle 2 = 140^\circ$,

$\therefore$ 当 $k = 2$ 时, $k\angle 1 + \angle 2$ 为定值, 此时定值为 140° .

故答案为: 2; 140° .



【点睛】本题考查平行线的性质，利用方程或方程组的思想解答是解题的关键。

【题型 6 平行线的阅读理解类问题】

【例 6】（2023 下·江苏泰州·七年级泰州市海军中学校考阶段练习）【注重阅读理解】阅读以下材料：

已知点 B, D 分别在 AK 和 CF 上，且 $CF \parallel AK$ 。

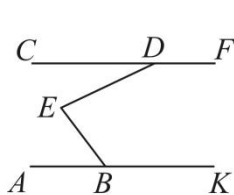


图1

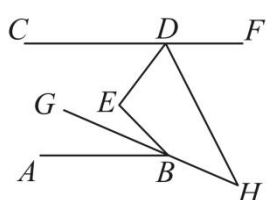


图2

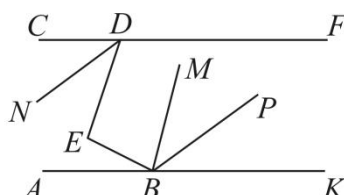


图3

- (1) 如图 1，若 $\angle CDE = 22^\circ$ ， $\angle DEB = 75^\circ$ ，则 $\angle ABE$ 的度数为_____；
- (2) 如图 2， BG 平分 $\angle ABE$ ， GB 延长线与 $\angle EDF$ 的平分线交于 H 点，若 $\angle DEB$ 比 $\angle DHB$ 大 60° ，求 $\angle DEB$ 的度数。
- (3) 保持 (2) 中所求的 $\angle DEB$ 的度数不变，如图 3， BM 平分 $\angle EBK$ ， DN 平分 $\angle CDE$ ，作 $BP \parallel DN$ ，则 $\angle PBM$ 的度数是否改变？若不变，请求值；若改变，请说明理由。

【答案】(1) 53°

(2) 100°

(3) 不变； 40°

【分析】(1) 过点 E 作 $ES \parallel CF$ ，根据 $CF \parallel AK$ ，则 $ES \parallel CF \parallel AK$ ，运用平行线的性质计算即可。

(2) 延长 DE ，交 AB 于点 M ，则 $\angle DEB = \angle EMB + \angle EBM$ ，利用平行线的性质，角平分线的定义，三角形外角的性质计算即可。

(3) 过点 E 作 $EQ \parallel DN$ ，则 $EQ \parallel DN \parallel BP$ ，利用前面的结论和方法，进行等量代换并推理计算即可。

【详解】(1) 解：如图 1，过点 E 作 $ES \parallel CF$ ，

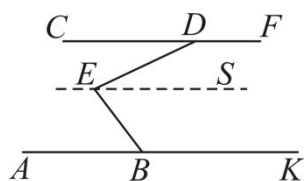


图1

$$\because CF \parallel AK,$$

$$\therefore ES \parallel CF \parallel AK,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle DES, \angle SEB = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle ABE = \angle DES + \angle SEB = \angle DEB,$$

$$\because \angle CDE = 22^\circ, \angle DEB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DEB - \angle CDE = 75^\circ - 22^\circ = 53^\circ.$$

故答案为: 53° .

(2) 解: 如图 2, 延长 DE , 交 AB 于点 M ,

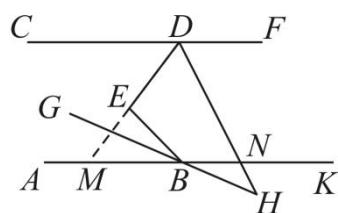


图2

$$\text{则 } \angle DEB = \angle EMB + \angle EBM,$$

$$\because CF \parallel AK, BG \text{ 平分 } \angle ABE,$$

$$\therefore \angle EMB = 180^\circ - \angle MDF, \angle EBM = 2\angle ABG = 2\angle HBN, \angle MDH = \angle HDF = \angle HNK = \frac{1}{2} \angle MDF,$$

$$\because \angle HBN + \angle DHB = \angle HNK,$$

$$\therefore \angle DEB = (180^\circ - \angle MDF) + 2\angle HBN = 180^\circ - \angle MDF + 2 \times \left(\frac{1}{2} \angle MDF - \angle DHB \right),$$

$$\therefore \angle DEB = 180^\circ - \angle MDF + \angle MDF - 2\angle DHB = 180^\circ - 2\angle DHB,$$

$$\because \angle DEB - \angle DHB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 180^\circ - 2(\angle DEB - 60^\circ),$$

$$\therefore 3\angle DEB = 300^\circ,$$

解得 $\angle DEB = 100^\circ$.

(3) 解: 过点 E 作 $EQ \parallel DN$, 则 $EQ \parallel DN \parallel BP$,



润禾托管

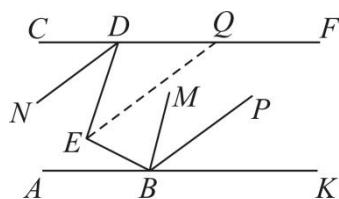


图3

根据 (1) 得, $\angle DEB = \angle CDE + \angle ABE$,

$\because BM$ 平分 $\angle EBK$, DN 平分 $\angle CDE$,

$\therefore \angle DEB = 2\angle NDE + 180^\circ - 2\angle EBM$,

$\because \angle DEB = 100^\circ$,

$\therefore \angle EBM - \angle NDE = 40^\circ$,

$\because EQ \parallel DN$,

$\therefore \angle DEQ = \angle NDE$,

$\therefore \angle EBM = 40^\circ + \angle DEQ$,

$\because EQ \parallel DN, DN \parallel BP$,

$\therefore EQ \parallel BP$,

$\therefore \angle EBM + \angle PBM + \angle BEQ = 180^\circ$,

$\therefore 40^\circ + \angle DEQ + \angle PBM + \angle BEQ = 180^\circ$,

$\therefore 40^\circ + \angle DEB + \angle PBM = 180^\circ$,

$\therefore \angle PBM = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ$,

$\therefore \angle PBM$ 的度数不变, 值为 40° .

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质, 三角形外角的性质, 角的平分线定义, 熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键.

【变式 6-1】(2023 下·湖北孝感·七年级统考期末) [课题学习]:

平行线的“等角转化”功能.

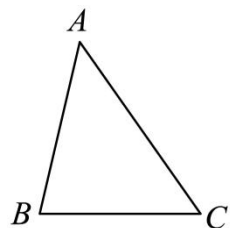


图1

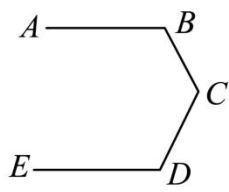


图2

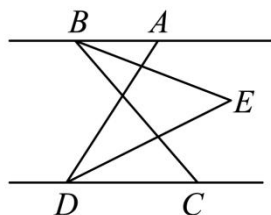


图3

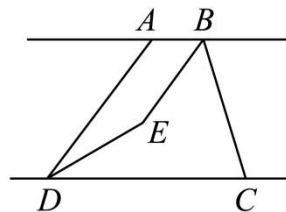


图4

[阅读理解]:



润禾托管

如图1, 已知点A是BC外一点, 连接AB, AC, 求 $\angle BAC + \angle B + \angle C$ 的度数.

(1) 阅读并补充下面推理过程.

解: 过点A作 $ED \parallel BC$, 所以 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$, $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$,

又因为 $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$.

[解题反思]:

从上面的推理过程中, 我们发现平行线具有“等角转化”的功能, 将 $\angle BAC$, $\angle B$, $\angle C$ “凑”在一起, 得到角的关系, 使问题得到解决.

[方法运用]:

(2) 如图2, 已知 $AB \parallel ED$, 求 $\angle B + \angle BCD + \angle D$ 的度数.

[深化拓展]:

(3) 已知 $AB \parallel CD$, 点C在D的右侧, $\angle ADC = 70^\circ$, BE平分 $\angle ABC$, DE平分 $\angle ADC$, BE, DE所在的直线交于点E, 点E在AB与CD两条平行线之间.

①如图3, 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\angle BED = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

②如图4, 点B在点A的右侧, 若 $\angle ABC = n^\circ$, 则 $\angle BED = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$. (用含n的代数式表示)

【答案】 (1) $\angle EAB$, $\angle DAC$; (2) 360° ; (3) ① 65° , ② $215^\circ - \frac{n^\circ}{2}$

【分析】(1) 根据两直线平行内错角相等即可得出结论; (2) 过点C作 $CF \parallel AB$, 根据平行线性质的性质得出 $\angle D = \angle FCD$ 和 $\angle B = \angle BCF$, 然后根据已知得出结果; (3) ①过点E作 $EF \parallel AB$, 根据两直线平行内错角相等即可求出 $\angle BED$ 的度数; ②过点E作 $EH \parallel AB$, 根据两直线平行同旁内角互补可求出 $\angle BEH = 180^\circ - \frac{n^\circ}{2}$, 再根据两直线平行内错角相等可求出 $\angle HED = 35^\circ$, 两角相加即可得出答案.

【详解】解: (1) 如图1过点A作 $ED \parallel BC$,

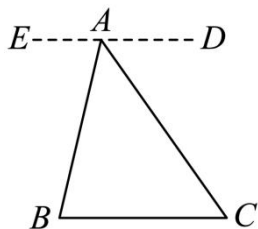


图1

$\therefore \angle B = \angle EAB$, $\angle C = \angle DAC$,

$\therefore \angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$,



$$\therefore \angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ,$$

故答案为: $\angle EAB$, $\angle DAC$;

(2) 如图 2, 过点 C 作 $CF \parallel AB$,

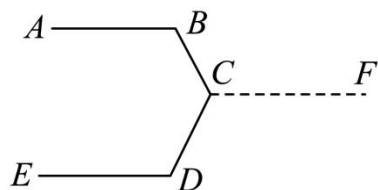


图2

$$\because AB \parallel ED,$$

$$\therefore CF \parallel ED,$$

$$\therefore \angle D = \angle FCD,$$

$$\because CF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF,$$

$$\because \angle BCF + \angle BCD + \angle DCF = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BCD + \angle D = 360^\circ;$$

(3) ①如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$

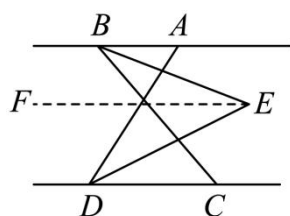


图3

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BEF, \angle CDE = \angle DEF,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC, DE \text{ 平分 } \angle ADC, \angle ABC = 60^\circ, \angle ADC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, \angle CDE = \frac{1}{2} \angle ADC = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BEF + \angle DEF = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ;$$

②过点 E 作 $EH \parallel AB$,

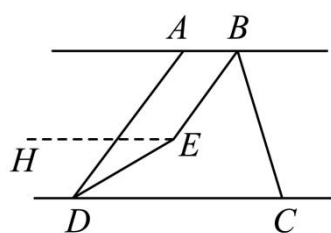


图4

$$\therefore \angle ABE + \angle BEH = 180^\circ,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{n^\circ}{2}$$

$$\therefore \angle BEH = 180^\circ - \frac{n^\circ}{2},$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore HE \parallel CD$$

$$\therefore \angle HED = \angle EDC$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC$$

$$\therefore \angle HED = \angle EDC = \frac{1}{2} \angle ADC = 35^\circ$$

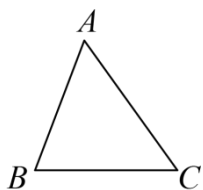
$$\therefore \angle BED = \angle BEH + \angle HED = 180^\circ - \frac{n^\circ}{2} + 35^\circ = 215^\circ - \frac{n^\circ}{2};$$

$$\text{故答案为: } \textcircled{1} 65^\circ; \textcircled{2} 215^\circ - \frac{n^\circ}{2}.$$

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质，正确添加辅助线是解答本题的关键。

【变式 6-2】（2023 下·山东烟台·六年级统考期末）课题学习：平行线的“等角转化”功能。

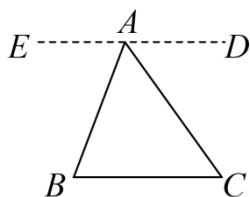
(1) 阅读理解：如图，已知点 A 是 BC 外一点，连接 AB、AC，求 $\angle B + \angle BAC + \angle C$ 的度数。阅读并补充下面推理过程。



解：过点 A 作 $ED \parallel BC$ ，所以 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

又因为 $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$ ，

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$ 。



解题反思：从上面的推理过程中，我们发现平行线具有“等角转化”的功能，将 $\angle BAC$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ “凑”在一起，得出角之间的关系，使问题得以解决.

(2)方法运用：如图1，已知 $AB \parallel CD$ ，求 $\angle B + \angle BPD + \angle D$ 的度数；

(3)深化拓展：已知直线 $AB \parallel CD$ ，点 P 为平面内一点，连接 PA 、 PD 。

①如图2，已知 $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle D = 140^\circ$ ，请直接写出 $\angle APD$ 的度数；

②如图3，请判断 $\angle PAB$ 、 $\angle CDP$ 、 $\angle APD$ 之间的数量关系，并说明理由。

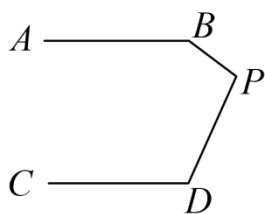


图1

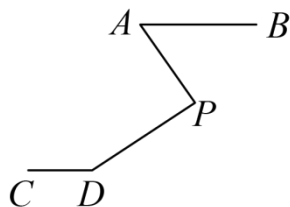


图2

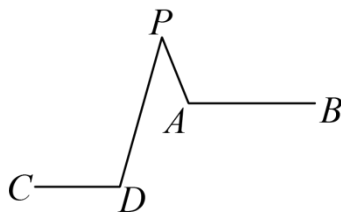


图3

【答案】(1) $\angle EAB$ ； $\angle DAC$

(2) $\angle B + \angle BPD + \angle D = 360^\circ$

(3)① 90° ；② $\angle PAB + \angle CDP - \angle APD = 180^\circ$ ，理由见解析

【分析】(1) 根据两直线平行内错角相等即可得出结论；

(2) 过点 P 作 $PF \parallel AB$ ，根据两直线平行同旁内角互补得出 $\angle D + \angle FPD = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle FPB = 180^\circ$ ，即可得到最后结论；

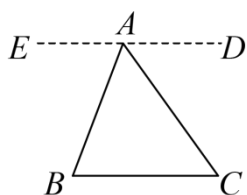
(3) ① $\angle APD$ 的度数为 90° ，过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，根据平行线性质求得 $\angle APG = 50^\circ$ ， $\angle GPD = 40^\circ$ ，即可求得 $\angle APD$ 的度数；② $\angle PAB + \angle CDP - \angle APD = 180^\circ$ ，过点 P 作 $PF \parallel AB$ ，根据平行线性质得到 $\angle CDP = \angle DPF$ ， $\angle PAB + \angle APE = 180^\circ$ ，即可退出最后结论。

【详解】(1) 解：过点 A 作 $ED \parallel BC$ ，

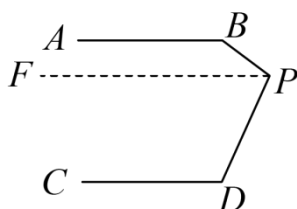
$\angle B = \angle EAB$ ， $\angle C = \angle DAC$ ，

又因为 $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$ ，

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$ ；



(2) 解：如图，过点 P 作 $PF \parallel AB$ ，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore PF \parallel CD$,

$\therefore \angle D + \angle FPD = 180^\circ$,

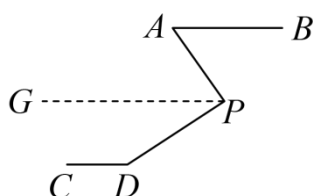
$\because PF \parallel AB$,

$\therefore \angle B + \angle FPB = 180^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle FPB + \angle FPD + \angle D = 360^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle BPD + \angle D = 360^\circ$;

(3) 解：① $\angle APD$ 的度数为 90° ；



理由：过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，

$\therefore \angle A = \angle APG = 50^\circ$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore GP \parallel CD$,

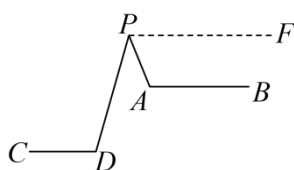
$\therefore \angle GPD + \angle D = 180^\circ$,

$\because \angle D = 140^\circ$,

$\therefore \angle GPD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\therefore \angle APD = \angle APG + \angle GPD = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$;

② $\angle PAB + \angle CDP - \angle APD = 180^\circ$,



理由：过点 P 作 $PF \parallel AB$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore PF \parallel CD$,

$\therefore \angle CDP = \angle DPF$,

$\because PF \parallel AB$,

$\therefore \angle PAB + \angle APE = 180^\circ$,

$\because \angle APF = \angle DPF - \angle APD$,

$\therefore \angle PAB + \angle DPF - \angle APD = 180^\circ$,

$\therefore \angle PAB + \angle CDP - \angle APD = 180^\circ$.

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质，解答本题的关键是正确作出辅助线，利用平行线的性质进行推理.

【变式 6-3】（2023 下·河南商丘·七年级永城市实验中学学校考期末）阅读材料：如图 1，若 $AB \parallel CD$ ，则 $\angle B + \angle D = \angle BED$.

理由：如图，过点 E 作 $EF \parallel AB$,

则 $\angle B = \angle BEF$.

因为 $AB \parallel CD$,

所以 $EF \parallel CD$,

所以 $\angle D = \angle DEF$,

所以 $\angle BED = \angle BEF + \angle DEF = \angle B + \angle D$.

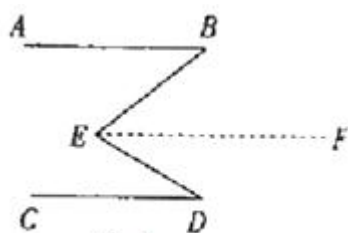


图 1

交流：（1）若将点 E 移至图 2 所示的位置， $AB \parallel CD$ ，此时 $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 之间有什么关系？请说明理由.



润禾托管

探究：（2）在图 3 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle E + \angle G$ 、 $\angle B + \angle F + \angle D$ 又有何关系？

应用：（3）在图 4 中，若 $AB \parallel CD$ ，又得到什么结论？请直接写出该结论。

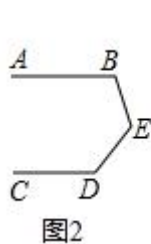


图2

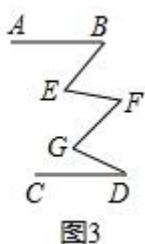


图3

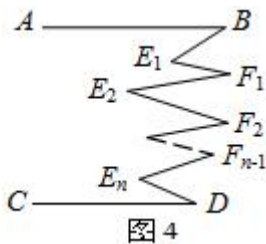


图4

【答案】（1） $\angle B + \angle D + \angle E = 360^\circ$ ；（2） $\angle E + \angle G = \angle B + \angle D + \angle F$ ；（3） $\angle B + \angle F_1 + \angle F_2 + \dots + \angle F_n + \angle D = \angle E_1 + \angle E_2 + \dots + \angle E_n$ 。

【分析】（1）过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，由平行线的性质可知 $\angle B + \angle BEF = 180^\circ$ ， $\angle D + \angle DEF = 180^\circ$ ，再由角之间的关系即可得出结论；

（2）过点 F 作 $FM \parallel AB$ ，用（1）的结论可知 $\angle E = \angle B + \angle EFM$ ， $\angle G = \angle GFM + \angle D$ ，再由角之间的关系即可得出结论；

（3）已知 $AB \parallel CD$ ，连接 AB、CD 的折线内折或外折，或改变 E 点位置、或增加折线的条数，通过适当地改变其中的一个条件，就能得出新的结论，给我们创造性的思考留下了极大的空间，解题的关键是过 E 点作 AB（或 CD）的平行线，把复杂的图形化归为基本图形。

【详解】（1）过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，如图 2 所示。

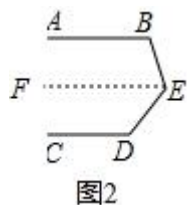


图2

$\because AB \parallel EF$,

$\therefore \angle B + \angle BEF = 180^\circ$,

$\because EF \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle D + \angle DEF = 180^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle BEF + \angle D + \angle DEF = 180^\circ + 180^\circ$,

$\because \angle E = \angle BEF + \angle DEF$,

$\therefore \angle B + \angle D + \angle E = 360^\circ$.

（2）过点 F 作 $FM \parallel AB$ ，如图 3 所示。

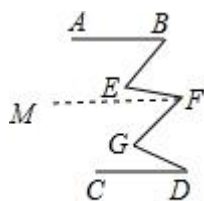


图3

$\because AB \parallel FM$, 结合 (1) 结论,

$$\therefore \angle E = \angle B + \angle EFM,$$

$\because FM \parallel AB \parallel CD$, 结合 (1) 结论,

$$\therefore \angle G = \angle GFM + \angle D,$$

$$\text{又} \because \angle F = \angle EFM + \angle GFM,$$

$$\therefore \angle E + \angle G = \angle B + \angle D + \angle F.$$

(3) 如图:

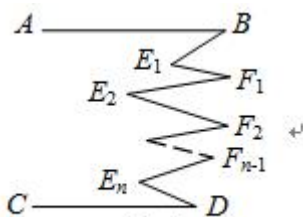


图4

根据 (1) 和 (2) 中的结论, 我们得到两条平行线之间, 内折的所有角的度数之和等于外折的所有角的度数之和, 即:

$$\angle B + \angle F_1 + \angle F_2 + \dots + \angle F_n + \angle D = \angle E_1 + \angle E_2 + \dots + \angle E_n.$$

【点睛】 本题考查了平行线的性质以及角的计算, 解题的关键是根据平行线的性质得出相等或互补的量. 本题属于一般题, 难度不大, 在计算该题型题目时, 根据平行线的性质找出相等 (或互补) 的角, 再根据角与角之间的关系即可得出结论.

【题型 7 平行线的性质在生活中的应用】

【例 7】 (2023 下·江苏泰州·七年级统考期末) 如图 1 是一盏可折叠台灯. 图 2、图 3 是其平面示意图, 支架 AB、BC 为固定支撑杆, 支架 OC 可绕点 C 旋转调节. 已知灯体顶角 $\angle DOE = 52^\circ$, 顶角平分线 OP 始终与 OC 垂直.



图 1

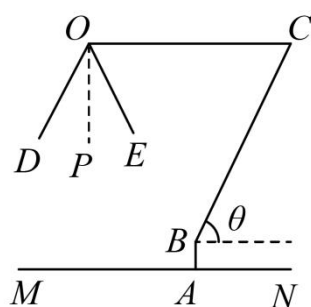


图 2

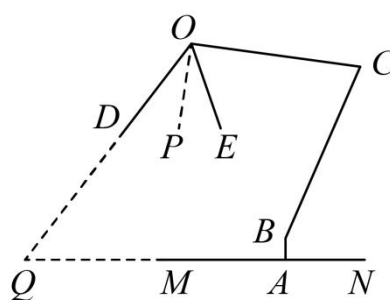


图 3

- (1)如图 2, 当支架 OC 旋转至水平位置时, OD 恰好与 BC 平行, 求支架 BC 与水平方向的夹角 $\angle\theta$ 的度数;
 (2)若将图 2 中的 OC 绕点 C 顺时针旋转 15° 到如图 3 的位置, 求此时 OD 与水平方向的夹角 $\angle OQM$ 的度数.

【答案】(1) 64°

(2) 49°

【分析】(1) 利用角平分线定义可得 $\angle DOP = \frac{1}{2}\angle DOE = 26^\circ$, 由垂直定义可得 $\angle COP = 90^\circ$, 得出 $\angle COD = \angle COP + \angle DOP = 116^\circ$, 再运用平行线性质的即可得出答案;

(2) 过点 C 作 $CG \parallel MN$, 过点 O 作 $OF \parallel CG$, 根据平行线的性质求解即可.

【详解】(1) 解: 如图 2, $\because \angle DOE = 52^\circ$, OP 平分 $\angle DOE$,

$$\therefore \angle DOP = \frac{1}{2}\angle DOE = 26^\circ,$$

$$\because OP \perp OC,$$

$$\therefore \angle COP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = \angle COP + \angle DOP = 90^\circ + 26^\circ = 116^\circ,$$

$$\because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ,$$

$$\because OC \parallel BF,$$

$$\therefore \angle COF = \angle C = 64^\circ,$$

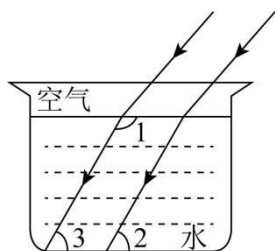
$$\text{即 } \angle\theta = 64^\circ;$$

(2) 如图 3, 过点 C 作 $CG \parallel MN$, 过点 O 作 $OF \parallel CG$,



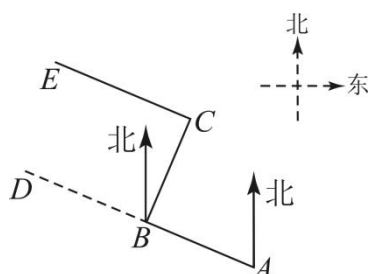
润禾托管

故答案为：58°.



【点睛】本题考查平行线的性质应用，熟练掌握平行线的性质是解答的关键.

【变式 7-2】（2023 下·七年级单元测试）如图，某工程队从A点出发，沿北偏西 67° 方向修一条公路AD，在BD路段出现塌陷区，就改变方向，在B点沿北偏东 23° 的方向继续修建BC段，到达C点又改变方向，使所修路段 $CE \parallel AB$ ，求 $\angle ECB$ 的度数.



【答案】 90°

【分析】先根据平行线的性质求出 $\angle 2$ 的度数，再由平角的定义求出 $\angle CBA$ 的度数，根据 $CE \parallel AB$ 即可得出结论.

【详解】 $\angle ECB = 90^\circ$.

理由： $\because \angle 1 = 67^\circ$,

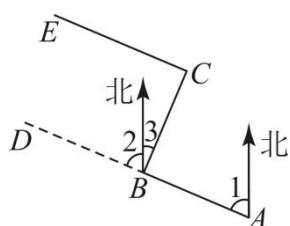
$\therefore \angle 2 = 67^\circ$.

$\because \angle 3 = 23^\circ$,

$\therefore \angle CBA = 180^\circ - 67^\circ - 23^\circ = 90^\circ$.

$\because CE \parallel AB$,

$\therefore \angle ECB = \angle CBA = 90^\circ$.

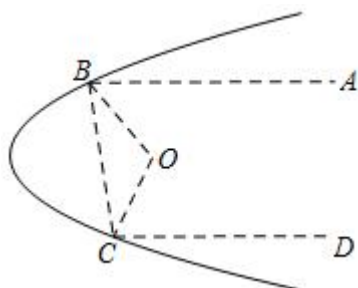


【点睛】本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，内错角相等.



润禾托管

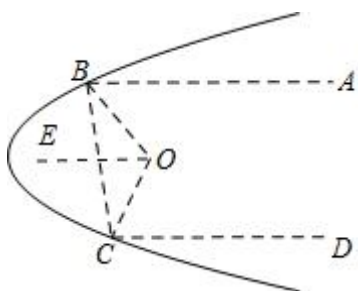
【变式 7-3】（2023 下·广东广州·七年级统考期末）探照灯、汽车灯等很多灯具的光线都与平行线有关，如图所示是一探照灯碗的剖面，从位于 O 点的灯泡发出的两束光线 OB ， OC ，经灯碗反射以后平行射出，其中 $\angle ABO = 38^\circ$ ， $\angle DCO = 78^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数是_____°。



【答案】116

【分析】过 O 点作 $OE \parallel AB$ ，则 $OE \parallel CD$ ，利用平行线的性质，得内错角相等，从而求解。

【详解】解：过 O 点作 $OE \parallel AB$ ，则 $OE \parallel CD$ ，



$$\therefore \angle EOB = \angle ABO, \quad \angle EOC = \angle DCO,$$

$$\because \angle ABO = 38^\circ, \quad \angle DCO = 78^\circ,$$

$$\therefore \angle EOB = 38^\circ, \quad \angle EOC = 78^\circ,$$

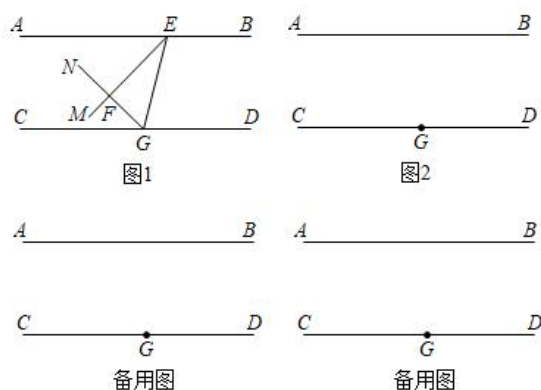
$$\text{即 } \angle BOC = \angle BOE + \angle EOC = 38^\circ + 78^\circ = 116^\circ.$$

故答案为：116.

【点睛】本题考查了平行线的性质，熟记两直线平行，内错角相等是解题的关键。

【题型 8 平行线与动点的综合应用】

【例 8】（2023 下·北京通州·七年级统考期末）已知：直线 $AB \parallel CD$ ，点 G 为直线 CD 上一定点，点 E 是直线 AB 上一动点，连结 EG 。在 EG 的左侧分别作射线 EM 、 GN ，两条射线相交于点 F ，设 $\angle AEF = \alpha$ 。



(1) 当 $\angle GEF = 30^\circ$, $\angle EGF = 60^\circ$ 时, 如图 1 位置所示, 求 $\angle FGC$ 的度数 (用含有 α 的式子表示), 并写出解答过程;

(2) 当 $\angle GEF = \angle EGF = 45^\circ$ 时, 过点 G 作 EG 的垂线 l .

① 请在图 2 中补全图形;

② 直接写出直线 l 与直线 CD 所夹锐角的度数_____ (用含有 α 的式子表示).

【答案】(1) $\angle FGC = 90^\circ - \alpha$, 解答过程见解析

(2) ① 补全图形见解析; ② 或 $45^\circ - \alpha$ 或 $\alpha - 45^\circ$ 或 $45^\circ + \alpha$

【分析】(1) 根据平行线的性质得出 $\angle AEG + \angle EGC = 180^\circ$, 则 $\angle AEF + \angle GEF + \angle EGF + \angle FGC = 180^\circ$, 然后把 $\angle AEF$, $\angle GEF$, $\angle EGF$ 代入计算即可求解;

(2) ① 分点 E 在 G 的左侧, F 不在 AB 、 CD 之间; 点 E 在 G 的左侧, F 在 AB 、 CD 之间; 点 E 在 G 的右侧, F 在 AB 、 CD 之间; 点 E 在 G 的右侧, F 不在 AB 、 CD 之间四种情形画图即可;

② 根据①中四种情形分别求解即可.

【详解】(1) 解: $\because AB \parallel CD$,

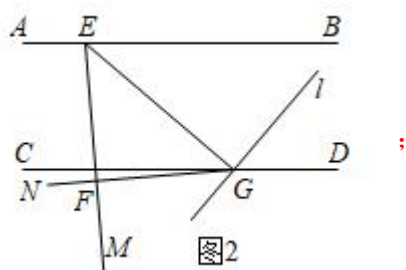
$$\therefore \angle AEG + \angle EGC = 180^\circ,$$

$$\text{即 } \angle AEF + \angle GEF + \angle EGF + \angle FGC = 180^\circ,$$

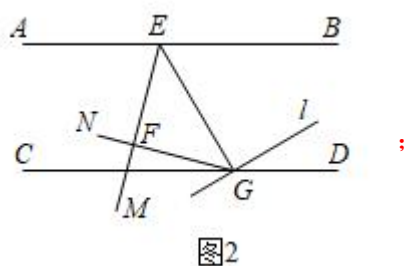
$$\text{又 } \angle AEF = \alpha, \angle GEF = 30^\circ, \angle EGF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FGC = 90^\circ - \alpha$$

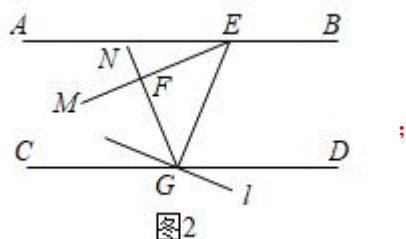
(2) 解: ① 当点 E 在 G 的左侧, F 不在 AB 、 CD 之间时, 如图,



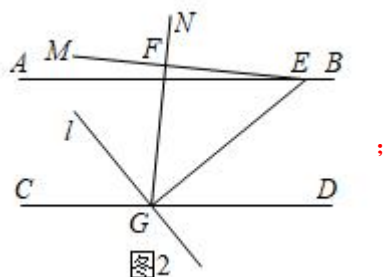
当点 E 在 G 的左侧, F 在 AB 、 CD 之间时, 如图,



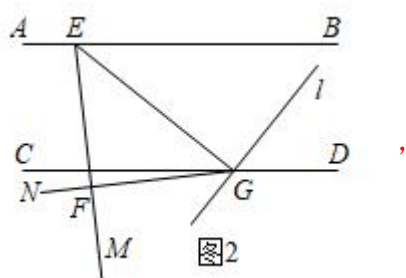
当点 E 在 G 的右侧, F 在 AB 、 CD 之间时, 如图,



当点 E 在 G 的右侧, F 不在 AB 、 CD 之间时, 如图,



②当点 E 在 G 的左侧, F 不在 AB 、 CD 之间时, 如图,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AEG + \angle EGC = 180^\circ$, 即 $\angle AEG + \angle FEG + \angle EGC = 180^\circ$,

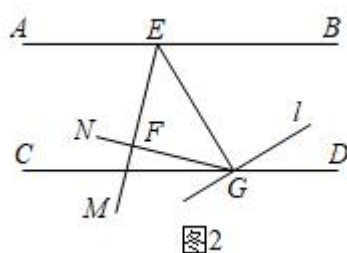
$\because \angle AEF = \alpha$, $\angle FEG = 45^\circ$,

$\therefore \angle EGC = 135^\circ - \alpha$,

又 $l \perp CD$,

$\therefore l$ 与 CD 所夹的锐角为 $180^\circ - 90^\circ - (135^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ$;

当点 E 在 G 的左侧, F 在 AB 、 CD 之间时, 如图,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AEG = \angle EGD$,

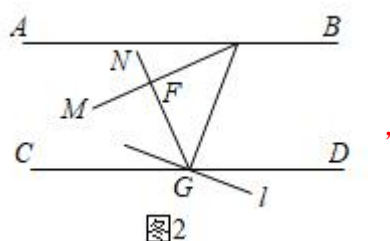
$\because \angle AEF = \alpha$, $\angle FEG = 45^\circ$,

$\therefore \angle EGD = 45^\circ + \alpha$,

又 $l \perp CD$,

$\therefore l$ 与 CD 所夹的锐角为 $\alpha + 45^\circ - 90^\circ = \alpha - 45^\circ$;

当点 E 在 G 的右侧, F 在 AB 、 CD 之间时, 如图,





润禾托管

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AEG = \angle EGD$,

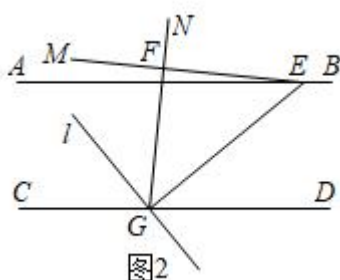
$\because \angle AEF = \alpha$, $\angle FEG = 45^\circ$,

$\therefore \angle EGD = 45^\circ + \alpha$,

又 $l \perp CD$,

$\therefore l$ 与 CD 所夹的锐角为 $180^\circ - (\alpha + 45^\circ) - 90^\circ = 45^\circ - \alpha$;

当点 E 在 G 的右侧, F 不在 AB 、 CD 之间时, 如图,



$\because \angle AEF = \alpha$, $\angle FEG = 45^\circ$,

$\therefore \angle AEG = 45^\circ - \alpha$,

$\because AB \parallel CD$,

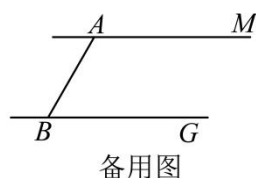
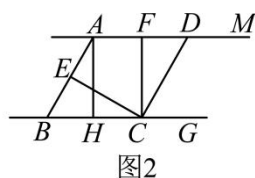
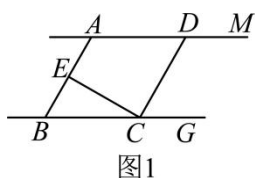
$\therefore \angle AEG = \angle EGD = 45^\circ - \alpha$,

又 $l \perp CD$,

$\therefore l$ 与 CD 所夹的锐角为 $180^\circ - (45^\circ - \alpha) - 90^\circ = 45^\circ + \alpha$;

【点睛】 本题考查了平行线的性质, 熟练掌握平行线的性质, 以及能够进行正确分类讨论是解题的关键.

【变式 8-1】 (2023 下·海南省直辖县级单位·七年级统考期末) 如图 1, 已知直线 $AM \parallel BG$, 点 C 为射线 BG 上一动点, 过点 C 作 $CD \parallel AB$ 交 AM 于点 D , 点 E 在线段 AB 上, $\angle DCE = 90^\circ$, 点 F 在线段 AD 上, $\angle FCG = 90^\circ$, 点 H 在线段 BC 上, $\angle AHG = 90^\circ$, $\angle ECF = 60^\circ$.



(1) 写出一个与 $\angle ADC$ 相等的角_ (写一个即可);

(2) 如图 2, 求 $\angle BCD$ 的度数;

(3) 若点 F 是直线 AM 上的一点, 点 H 是直线 BG 上的一点, 在点 C 的运动过程中 (点 C 不与点 B 、 H 重合),



润禾托管

求 $\angle BAF$ 的度数.

【答案】(1) $\angle DCG$

(2) 120°

(3) 60° 或 120°

【分析】(1) 根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle ADC = \angle DCG$ ；

(2) 根据 $\angle FCG = 90^\circ$ 、 $\angle ECF = 60^\circ$ 可得 $\angle BCE = 30^\circ$ ，从而得到 $\angle BCD = 120^\circ$ ；

(3) 先计算出 $\angle DCG = 60^\circ$ ，根据 $CD \parallel AB$ 得 $\angle ABH = 60^\circ$ ，再根据点 F 在线段 AD 上和线段 AD 的左侧两种情况分别计算出 $\angle BAF$ 的度数.

【详解】(1) $\because AM \parallel BG$,

$\therefore \angle ADC = \angle DCG$,

故答案为： $\angle DCG$ ；

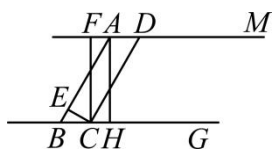
(2) $\because \angle ECF = 60^\circ$, $\angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle FCD = 30^\circ$,

又 $\because \angle BCF = \angle FCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$;

(3) 如图，当点 C 在线段 BH 上时，点 F 在 DA 延长线上，



$\because \angle DCE = 90^\circ$, $\angle ECF = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCD = 30^\circ$,

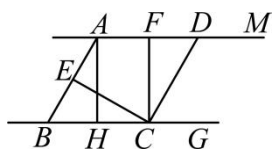
$\because \angle FCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCG = 60^\circ$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle BAF = \angle ABC = 60^\circ$;

如图，当点 C 在 BH 延长线上时，点 F 在线段 AD 上，



$\because \angle ABC = 60^\circ, AD \parallel BC,$

$\therefore \angle BAF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

综上所述, $\angle BAF$ 的度数为 60° 或 120° .

【点睛】此题考查了平行线的性质, 解题的关键是熟知两直线平行内错角相等, 两直线平行同位角相等, 两直线平行, 同旁内角互补.

【变式 8-2】(2023 下·湖北武汉·七年级统考期末) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, M, N 分别是直线 AB, CD 上一点, 点 E 在直线 AB, CD 之间.

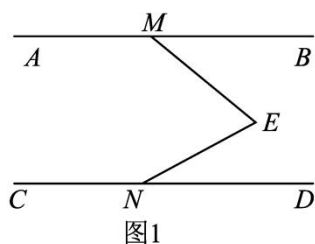


图1

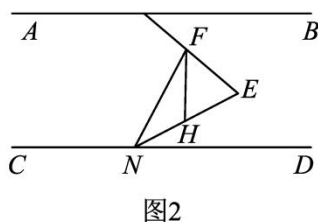


图2

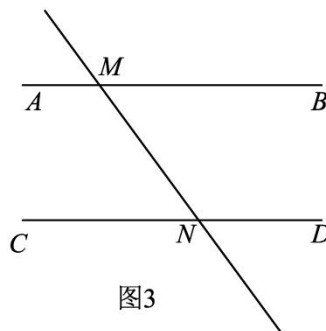


图3

(1) 如图 1, 求证: $\angle BME + \angle DNE = \angle MEN$;

(2) 如图 2, F 是 EM 上一点, NE 平分 $\angle FND$, FH 平分 $\angle NFE$, 试探究 $\angle NHF$ 与 $\angle BME$ 之间的数量关系? 并证明你的结论;

(3) 如图 3, P 为直线 MN 上一动点 (不与点 N 重合), 过点 P 作 $PG \perp MN$ 交直线 CD 于点 G , $\angle PNG$ 的角平分线和 $\angle PGC$ 的角平分线交于点 O , 则 $\angle O$ 的度数为_____ (直接写出结果).

【答案】(1) 证明见解析

(2) $2\angle NHF = 180^\circ + \angle BME$, 理由见解析

(3) 45° 或 135°

【分析】(1) 如图所示, 过点 E 作 $EF \parallel AB$, 利用平行线的性质得到 $\angle MEF = \angle BME$, $\angle NEF = \angle DNE$, 即可证明结论;

(2) 如图所示, 过点 F 作 $FG \parallel AB$, 过点 H 作 $HP \parallel AB$, 同 (1) 可证 $\angle MFG = \angle BME$, $\angle PHN = \angle DNE$, $\angle GFN = \angle DNF$, $\angle GFH + \angle PHF = 180^\circ$, 再根据角平分线的定义得到 $\angle NFE = 2\angle NFH$, $\angle DNF = 2\angle DNE$, 在



分别推出 $\angle NFH = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BME - \angle DNE$,

$\angle PHF = 90^\circ - \angle DNE + \frac{1}{2}\angle BME$, 即可得到答案:

(3) 分点 P 在点 N 上方和点 P 在点 N 下方, 利用平行线的性质与角平分线的定义分类讨论求解即可.

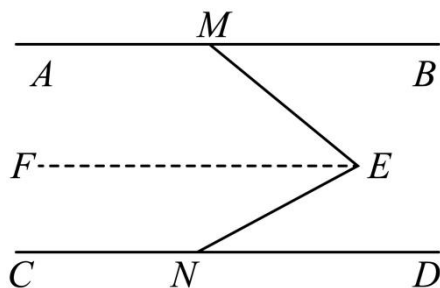
【详解】(1) 解: 如图所示, 过点 E 作 $EF \parallel AB$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$,

$\therefore \angle MEF = \angle BME$, $\angle NEF = \angle DNE$,

$\therefore \angle BME + \angle DNE = \angle MEF + \angle NEF = \angle MEN$;



(2) 解: 解: $2\angle NHF = 180^\circ + \angle BME$, 理由如下:

如图所示, 过点 F 作 $FG \parallel AB$, 过点 H 作 $HP \parallel AB$,

同(1)可知 $AB \parallel CD \parallel FG \parallel PH$,

$\therefore \angle MFG = \angle BME$, $\angle PHN = \angle DNE$, $\angle GFN = \angle DNF$, $\angle GFH + \angle PHF = 180^\circ$,

$\therefore \angle MFN = \angle BME + \angle DNF$,

$\because FN$ 平分 $\angle NFE$, NE 平分 $\angle DNF$,

$\therefore \angle NFE = 2\angle NFH$, $\angle DNF = 2\angle DNE$,

$\therefore \angle NFE = 2\angle NFH = 180^\circ - \angle MFN = 180^\circ - \angle BME - 2\angle DNE$,

$\therefore \angle NFH = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BME - \angle DNE$,

$\because \angle GFH + \angle PHF = 180^\circ$,

$\therefore \angle GFN + \angle NFH + \angle PHF = 180^\circ$,

$\therefore 2\angle DNE + \angle NFH + \angle PHF = 180^\circ$,

$\therefore \angle PHF = 180^\circ - 2\angle DNE - \angle NFH = 90^\circ - \angle DNE + \frac{1}{2}\angle BME$,

$\therefore \angle NHF = \angle PHN + \angle PHF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BME$,



润禾托管

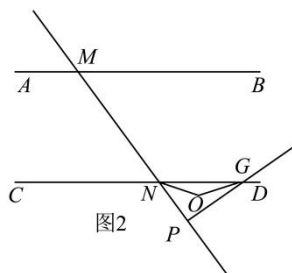
$\because NO$ 平分 $\angle PNG$, GO 平分 $\angle PDN$,

$\therefore \angle PNG = 2\angle ONG$, $\angle PGN = 2\angle OGN$,

$\therefore \angle ONG + \angle OGN = 45^\circ$,

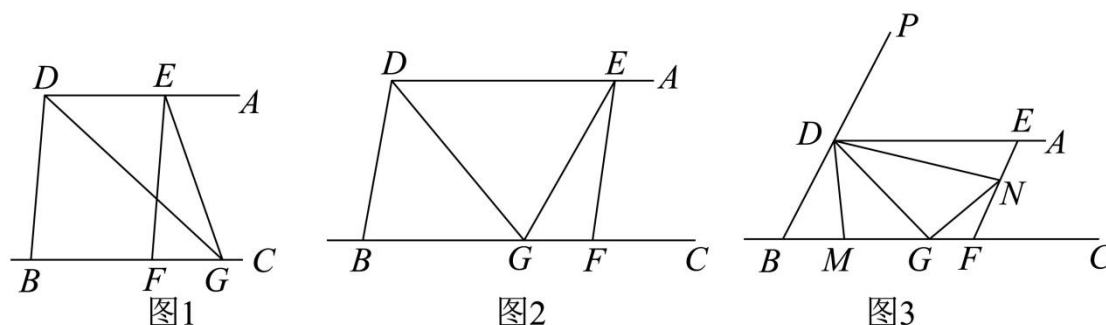
$\therefore \angle O = 135^\circ$,

综上所述, $\angle O$ 的度数为 45° 或 135° .



【点睛】本题主要考查了平行线的性质, 角平分线的定义, 垂直的定义, 熟知平行线的性质是解题的关键.

【变式 8-3】(2023 上·黑龙江哈尔滨·七年级哈尔滨德强学校校考期中) 点 E 在射线 DA 上, 点 F 、 G 为射线 BC 上两个动点, 满足 $\angle DBF = \angle DEF$, $\angle BDG = \angle BGD$, DG 平分 $\angle BDE$.



(1) 如图 1, 当点 G 在 F 右侧时, 求证: $BD \parallel EF$;

(2) 如图 2, 当点 G 在 F 左侧时, 求证: $\angle DGE = \angle BDG + \angle FEG$;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, P 为 BD 延长线上一点, DM 平分 $\angle BDG$, 交 BC 于点 M , DN 平分 $\angle PDM$, 交 EF 于点 N , 连接 NG , 若 $DG \perp NG$, $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$, 则 $\angle DBF$ 的度数是多少.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

(3) 60°

【分析】(1) 通过证明 $\angle DBF = \angle EFG$, 利用同位角相等, 两直线平行即可得出结论;

(2) 过点 E 作 $GH \parallel BD$, 交 AD 于点 H , 利用 (1) 的结论和平行线的性质即可得出结论;



(3) 设 $\angle BDM = \angle MDG = \alpha$, 则 $\angle BDG = \angle EDG = \angle DGB = 2\alpha$, $\angle PDE = 180^\circ - 4\alpha$, $\angle PDM = 180^\circ - \alpha$; 利用已知条件用含 α 的式子表示 $\angle PDN$, $\angle EDN$, $\angle GDN$, $\angle DNG$, 再利用 $\angle DBF - \angle DNG = \angle EDN$, 得到关于 α 的方程, 解方程求得 α 的值, 则 $\angle B = 180^\circ - 4\alpha$, 结论可求.

【详解】(1) 证明: $\because DG$ 平分 $\angle BDE$,

$$\therefore \angle BDG = \angle ADG,$$

$$\text{又} \because \angle BDG = \angle BGD,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle DGB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

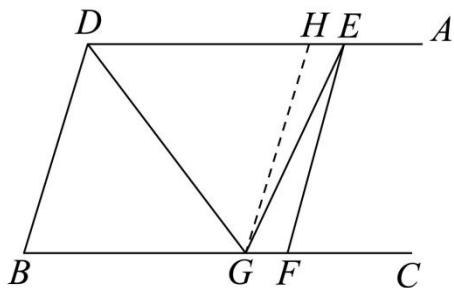
$$\therefore \angle DEF = \angle EFG,$$

$$\because \angle DBF = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle EFG,$$

$$\therefore BD \parallel EF;$$

(2) 证明: 过点 G 作 $GH \parallel BD$, 交 AD 于点 H , 如图,



由(1)可知: $BD \parallel EF$,

$$\therefore GH \parallel EF,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle DGH, \angle GEF = \angle HGE,$$

$$\because \angle DGE = \angle DGH + \angle HGE,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle BDG + \angle FEG;$$

(3) 解: 设 $\angle BDM = \angle MDG = \alpha$,

则 $\angle BDG = \angle EDG = \angle DGB = 2\alpha$, $\angle PDE = 180^\circ - 4\alpha$,

$$\therefore \angle PDM = 180^\circ - \alpha,$$

$\because DN$ 平分 $\angle PDM$,

$$\therefore \angle PDN = \angle MDN = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$



润禾托管

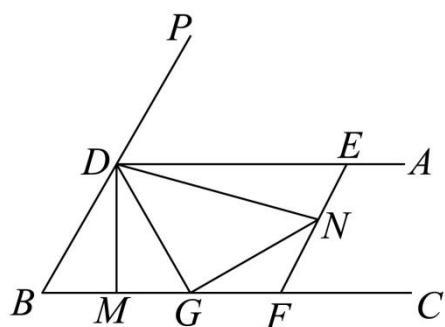
$$\therefore \angle EDN = \angle PDN - \angle PDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - (180^\circ - 4\alpha) = \frac{7}{2}\alpha - 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDN = \angle MDN - \angle MDG = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \alpha = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha,$$

$$\therefore DG \perp ON,$$

$$\therefore \angle DNG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DNG = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{3}{2}\alpha,$$



$$\therefore DE \parallel BF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle PDE = 180^\circ - 4\alpha,$$

$$\therefore \angle DBF - \angle DNG = \angle EDN,$$

$$\therefore 180^\circ - 4\alpha - \frac{3}{2}\alpha = \frac{7}{2}\alpha - 90^\circ,$$

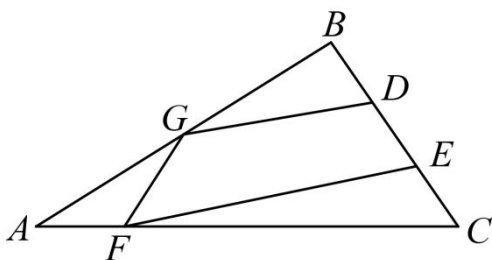
$$\text{解得: } \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF = 180^\circ - 4\alpha = 60^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质，角平分线的定义，利用平行线的性质和角平分线的定义得出角度的关系式是解题的关键。

【题型 9 利用三角形的中线求面积】

【例 9】（2023 春·贵州毕节·七年级统考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AG = BG$ ， $BD = DE = EC$ ， $CF = 4AF$ ，若四边形 $DEFG$ 的面积为 28，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）



A. 60

B. 56

C. 70

D. 48



【答案】A

【分析】连接 CG 、 BF ，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M ，设 $S_{\triangle AFG} = a$ ，根据同高的三角形的面积的比等于底边的比，分别得到 $S_{\triangle AFB} = 2a$ 、 $S_{\triangle BCF} = 8a$ 、 $S_{\triangle ABC} = 10a$ 、 $S_{\triangle CFE} = \frac{8}{3}a$ 、 $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle BCG} = 5a$ 、 $S_{\triangle BDG} = \frac{5}{3}a$ ，再根据四边形 $DEFG$ 的面积，求出 $a = 6$ ，即可得出 $\triangle ABC$ 的面积。

【详解】解：连接 CG 、 BF ，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M ，

设 $S_{\triangle AFG} = a$ ，

$$\because S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot FM, S_{\triangle FGB} = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot FM, AG = BG,$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = S_{\triangle FGB} = a,$$

$$\therefore S_{\triangle AFB} = 2a,$$

$$\because CF = 4AF,$$

同理可得： $S_{\triangle BCF} = 4S_{\triangle AFB}$ ，

$$\therefore S_{\triangle BCF} = 8a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AFB} + S_{\triangle BCF} = 2a + 8a = 10a,$$

$$\because BD = DE = EC,$$

$$\therefore BC = 3EC,$$

$$\text{同理可得：} S_{\triangle CFE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BFC} = \frac{8}{3} a,$$

$\because G$ 是 AB 的中点，

同理可得： $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle BCG} = 5a$ ，

$$\because BD = DE = EC,$$

$$\therefore BC = 3BD,$$

$$\text{同理可得：} S_{\triangle BDG} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCG} = \frac{5}{3} a,$$

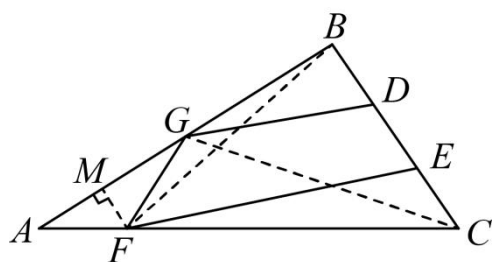
$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 的面积为 28，

$$\therefore S_{\text{四边形}DEFG} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AFG} - S_{\triangle CFE} - S_{\triangle BDG} = 10a - a - \frac{8}{3}a - \frac{5}{3}a = \frac{14}{3}a = 28,$$

$$\therefore a = 6,$$

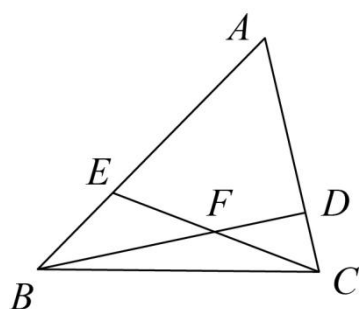
$$\therefore S_{\triangle ABC} = 10a = 10 \times 6 = 60,$$

故选：A.



【点睛】本题主要考查了三角形的中线的性质，掌握三角形的中线的性质是解题关键。

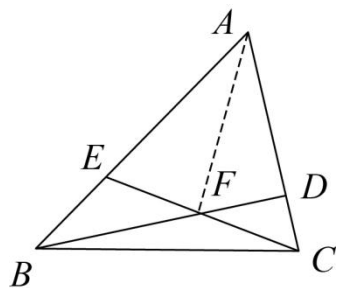
【变式 9-1】（2023 秋·黑龙江哈尔滨·七年级校考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BF = 2FD$ ， $EF = FC$ ，若 $\triangle BEF$ 的面积为 4，则四边形 $AEFD$ 的面积为_____。



【答案】14

【分析】根据等底等高的三角形面积相等即可解决问题。

【详解】解：如图，连接 AF ，



$\because EF = FC$ ， $\triangle BEF$ 的面积为 4，

$\therefore S_{\triangle BFC} = 4$ ，

$\because BF = 2FD$ ，

$\therefore S_{\triangle DFC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BFC} = 2$ ，

$\because EF = FC$ ，

$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AFC} = S_{\triangle ADF} + 2$ ，

$\because BF = 2FD$ ，



$$\therefore S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BEF} = 2S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} + 2 + 4 = 2S_{\triangle ADF}, \text{ 解得 } S_{\triangle ADF} = 6,$$

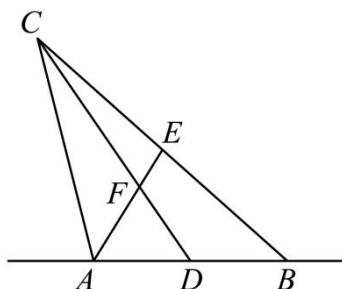
$$\therefore S_{\triangle AEF} = 6 + 2 = 8,$$

$$\therefore S_{\text{四边形AEFD}} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AEF} = 6 + 8 = 14.$$

故答案为：14.

【点睛】本题主要考查了根据三角形的中线求面积，解决本题的关键是掌握等底等高的三角形面积相等.

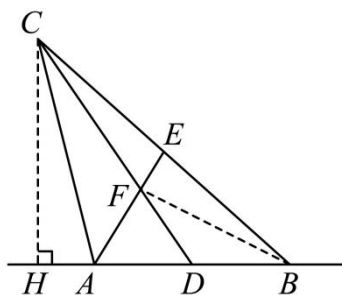
【变式 9-2】(2023 春·江苏连云港·七年级统考期末)如图，点 C 为直线 AB 外一动点， $AB = 6$ ，连接 CA 、 CB ，点 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点，连接 AE 、 CD 交于点 F ，当四边形 $BEFD$ 的面积为 5 时，线段 AC 长度的最小值为_____.



【答案】5

【分析】如图：连接 BF ，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，根据三角形中线的性质求得 $S_{\triangle ABC} = 15$ ，从而求得 $CH = 5$ ，利用垂线段最短求解即可.

【详解】解：如图：连接 BF ，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，



$\because$ 点 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点，

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}, \quad S_{\triangle AFD} = S_{\triangle BFD}, \quad S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BEF},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} + S_{\text{四边形BDFE}} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle ACF}, \quad S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle BFD} = S_{\text{四边形BDFE}} = 5,$$

$$\therefore S_{\text{四边形BDFE}} = S_{\triangle ACF} = 5,$$



$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACF} + S_{\text{四边形}BDFE} + S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CEF} = 15,$$

$$\therefore \frac{1}{2}CH \cdot AB = 15,$$

$$\therefore CH = 5,$$

又 $\because$ 点到直线的距离垂线段最短,

$$\therefore AC \geq CH = 5,$$

$\therefore AC$ 的最小值为 5.

故答案为: 5.

【点睛】本题考查了三角形中线的性质、垂线段最短等知识点,正确作出辅助线、利用中线分析三角形的面积关系是解题的关键.

【变式 9-3】(2023 春·江苏盐城·七年级统考期末) 【问题情境】

苏科版数学课本七年级下册上有这样一道题:如图 1, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积有怎样的数量关系?

小旭同学在图 1 中作 BC 边上的高 AE , 根据中线的定义可知 $BD = CD$. 又因为高 AE 相同, 所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$, 于是 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD}$. 据此可得结论: 三角形的一条中线平分该三角形的面积.

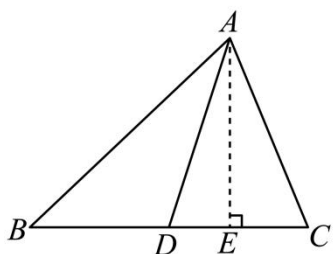


图1

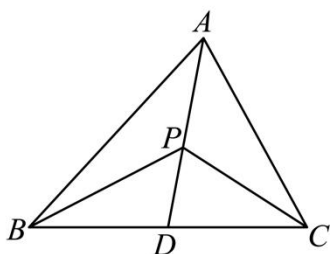


图2

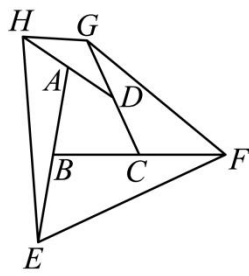


图3

【深入探究】

(1) 如图 2, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 点 P 在 AD 上.

①若 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 求证: $S_{\triangle APB} = S_{\triangle APC}$;

②若 $BD = 3DC$, 则 $S_{\triangle APB} : S_{\triangle APC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【拓展延伸】

(2) 如图 3, 分别延长四边形 $ABCD$ 的各边, 使得点 A 、 B 、 C 、 D 分别为 DH 、 AE 、 BF 、 CG 的中点, 依次连结 E 、 F 、 G 、 H 得四边形 $EFGH$.

①求证: $S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$;



②若 $S_{\text{四边形}ABCD} = 3$, 则 $S_{\text{四边形}EFGH} =$ _____.

【答案】(1) ①证明见解析; ②3:1; (2) ①证明见解析; ②15

【分析】(1) ①根据中线的性质可得 $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ADC}$, 点 D 为 BC 的中点, 推得 PD 是 $\triangle PBC$ 的中线,

$S_{\triangle PDB} = S_{\triangle PDC}$, 即可证明 $S_{\triangle APB} = S_{\triangle APC}$;

②设 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高为 h , 根据三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times BD \times h$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times DC \times h$, 即可推得 $S_{\triangle ADB} = 3S_{\triangle ADC}$, 同理推得 $S_{\triangle PDB} = 3S_{\triangle PDC}$, 即可求得 $S_{\triangle APB} = 3S_{\triangle APC}$, 即可证明 $S_{\triangle APB}:S_{\triangle APC} = 3:1$;

(2) ①连接 AG , AC , CE , 根据中线的判定和性质可得 $S_{\triangle GAH} = S_{\triangle GAD} = \frac{1}{2}S_{\triangle GHD}$, $S_{\triangle CBA} = S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAE}$,

$S_{\triangle ECF} = S_{\triangle ECB} = \frac{1}{2}S_{\triangle EFB}$, $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACG}$, 推得 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}S_{\triangle GHD}$, $S_{\triangle CBA} = S_{\triangle CBE} =$

$\frac{1}{2}S_{\triangle EFB}$, 即可求得 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}(S_{\triangle GHD} + S_{\triangle EFB})$, 即可证明 $S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$,

②由①可得 $S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$, 同理可证得 $S_{\triangle HEA} + S_{\triangle FGC} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$, 根据 $S_{\text{四边形}EFGH} =$

$S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} + S_{\triangle HEA} + S_{\triangle FGC} + S_{\text{四边形}ABCD}$, 即可推得 $S_{\text{四边形}EFGH} = 5S_{\text{四边形}ABCD}$, 即可求解.

【详解】(1) ①证明: $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ADC}$, 点 D 为 BC 的中点,

$\therefore PD$ 是 $\triangle PBC$ 的中线,

$\therefore S_{\triangle PDB} = S_{\triangle PDC}$,

$\therefore S_{\triangle ADB} - S_{\triangle PDB} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle PDC}$,

即 $S_{\triangle APB} = S_{\triangle APC}$;

② $S_{\triangle APB}:S_{\triangle APC} = 3:1$,

解: 设 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高为 h ,

则 $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times BD \times h$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times DC \times h$,

$\because BD = 3DC$,

$\therefore S_{\triangle ADB} = 3S_{\triangle ADC}$,

同理 $S_{\triangle PDB} = 3S_{\triangle PDC}$,

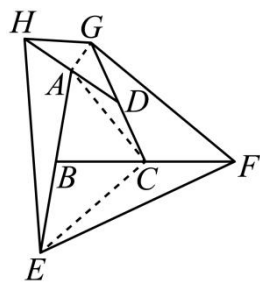
则 $S_{\triangle ADB} - S_{\triangle PDB} = 3S_{\triangle ADC} - 3S_{\triangle PDC}$,

即 $S_{\triangle APB} = 3S_{\triangle APC}$,

$\therefore S_{\triangle APB}:S_{\triangle APC} = 3:1$.



(2) ①证明：连接 AG ， AC ， CE ，如图：



∵点 A 、 B 、 C 、 D 分别为 DH 、 AE 、 BF 、 CG 的中点，

∴ AG ， BC ， CE ， DA 分别为 $\triangle GHD$ ， $\triangle CAE$ ， $\triangle EFB$ ， $\triangle ACG$ 的中位线，

$$\therefore S_{\triangle GAH} = S_{\triangle GAD} = \frac{1}{2}S_{\triangle GHD}, S_{\triangle CBA} = S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAE}, S_{\triangle ECF} = S_{\triangle ECB} = \frac{1}{2}S_{\triangle EFB}, S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACG},$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}S_{\triangle GHD}, S_{\triangle CBA} = S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2}S_{\triangle EFB}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle CBA} = \frac{1}{2}S_{\triangle GHD} + \frac{1}{2}S_{\triangle EFB} = \frac{1}{2}(S_{\triangle GHD} + S_{\triangle EFB}),$$

$$\text{即 } S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形}ABCD};$$

②15，

解：由①可得 $S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$ ，同理可证得 $S_{\triangle HEA} + S_{\triangle FGC} = 2S_{\text{四边形}ABCD}$ ，

$$S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FBE} + S_{\triangle HEA} + S_{\triangle FGC} + S_{\text{四边形}ABCD},$$

$$\text{即 } S_{\text{四边形}EFGH} = 5S_{\text{四边形}ABCD},$$

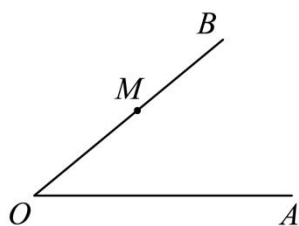
$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 3,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = 5 \times 3 = 15.$$

【点睛】本题考查了中位线的判定和性质，三角形的面积公式，掌握三角形的一条中线把原三角形分成两个等底同高的三角形是题的关键。

【题型 10 利用三角形的三边关系求线段的最值或取值范围】

【例 10】（2023 春·河北保定·七年级统考期末）如图， $\angle AOB < 90^\circ$ ，点 M 在 OB 上，且 $OM = 6$ ，点 M 到射线 OA 的距离为 a ，点 P 在射线 OA 上， $MP = x$ 。若 $\triangle OMP$ 的形状，大小是唯一确定的，则 x 的取值范围是（ ）

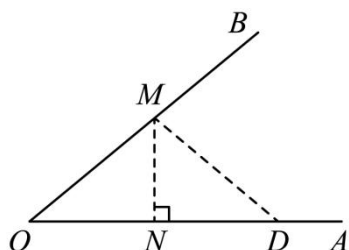


- A. $x = a$ 或 $x \geq 6$ B. $x \geq 6$ C. $x = 6$ D. $x = 6$ 或 $x > a$

【答案】A

【分析】根据 $\triangle OMP$ 的形状，大小是唯一确定的，结合三角形的三边关系进行分析即可.

【详解】解：过点 M 作 $MN \perp OA$ 交 OA 于点 N ，作点 O 关于 MN 的对称点 D ，如图：



$\because$ 点 M 到射线 OA 的距离为 a ,

$\therefore MN = a$,

$\because MN$ 垂直平分 OD ,

$\therefore MD = MO = 6$,

当 $a < x < 6$ ，即点 P 在线段 ON 上（不含端点）或点 P 在线段 ND 上（不含端点），

不能唯一确定 $\triangle OMP$ ；

当 $x = a$ 时，即点 P 与点 N 重合，

可唯一确定 $\triangle OMP$ 为直角三角形；

当 $x = 6$ 时，即点 P 与点 D 重合或点 P 与点 O 重合，

$\because$ 点 P 与点 O 重合时不能构成三角形，故能唯一确定 $\triangle OMP$ ；

当 $x > 6$ 时，即点 P 在点 D 的右侧，故能唯一确定 $\triangle OMP$ ；

综上，若 $\triangle OMP$ 的形状，大小是唯一确定的，则 x 的取值范围是 $x = a$ 或 $x \geq 6$.

故选：A.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系，熟练掌握三角形的三边关系是解题的关键.

【变式 10-1】（2023 秋·安徽合肥·七年级统考期末）不等边 $\triangle ABC$ 的两条高的长度分别为 4 和 12，若第三条高也为整数，那么它的长度最大值是_____



【答案】5

【分析】根据三角形三边关系及三角形面积相等即可求出要求高的整数值.

【详解】解：因为不等边 $\triangle ABC$ 的两条高的长度分别为4和12，根据面积相等可设 $\triangle ABC$ 的两边长为 $3x$ ， x ；

因为 $3x \times 4 = 12 \times x$ （2倍的面积），面积 $S = 6x$ ，

因为知道两条边的假设长度，根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边可得： $2x < \text{第三边长度} < 4x$ ，

因为要求高的最大长度，所以当第三边最短时，在第三边上的高就越长，

$S = \frac{1}{2} \times \text{第三边的长} \times \text{高}$ ， $6x > \frac{1}{2} \times 2x \times \text{高}$ ， $6x < \frac{1}{2} \times 4x \times \text{高}$ ，

$\therefore 6 > \text{高} > 3$ ，

$\because$ 是不等边三角形，且高为整数，

$\therefore$ 高的最大值为5，

故答案为：5.

【点睛】本题考查了三角形三边关系及三角形的面积，难度较大，关键是掌握三角形任意两边之和大于第三边，三角形的任意两边差小于第三边.

【变式 10-2】（2023 秋·安徽·七年级期末）一个三角形的两边长分别为5和7，设第三边上的中线长为 x ，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x > 5$

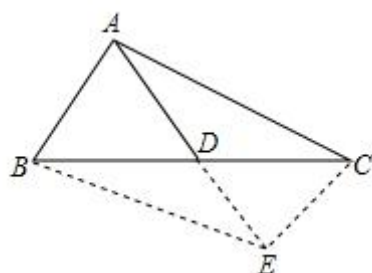
B. $x < 7$

C. $2 < x < 12$

D. $1 < x < 6$

【答案】D

【详解】如图所示：



$AB=5$ ， $AC=7$ ，

设 $BC=2a$ ， $AD=x$ ，

延长 AD 至 E ，使 $AD=DE$ ，

在 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CDA$ 中，



$\because AD=DE, BD=CD, \angle ADC=\angle BDE,$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA,$

$\therefore AE=2x, BE=AC=7,$

在 $\triangle ABE$ 中, $BE-AB < AE < AB+BE$, 即 $7-5 < 2x < 7+5$,

$\therefore 1 < x < 6.$

故选 D.

【变式 10-3】(2023 秋·浙江杭州·七年级期末) 设 a, b, c 表示一个三角形三边的长, 且他们都是自然数, 其中 $a \leq b \leq c$, 若 $b=2020$, 则满足此条件的三角形共有____个.

【答案】2041210

【分析】已知 $b=2020$, 根据三角形的三边关系求解, 首先确定出 a, c 三边长取值范围, 进而得出各种情况有几个三角形.

【详解】解: a, b, c 表示一个三角形三边的长, 且它们都是自然数, 其中 $a \leq b \leq c$, 如果 $b=2020$, 则 $0 \leq a \leq 2020$, $2020 \leq c \leq 4039$,

$\therefore$ 当 $c=2020$ 时, 根据两边之和大于第三边, 则 a 的取值范围为 $1 \leq a \leq 2020$, 有 2020 个三角形;

当 $c=2021$ 时, 根据两边之和大于第三边, 则 a 的取值范围为 $2 \leq a \leq 2020$, 有 2019 个三角形;

当 $c=2022$ 时, 根据两边之和大于第三边, 则 a 的取值范围为 $3 \leq a \leq 2020$, 有 2018 个三角形;

...

当 $c=4039$ 时, 根据两边之和大于第三边, 则 a 的取值范围为 $a=2020$, 有 1 个三角形; $\therefore$ 三角形数量是:

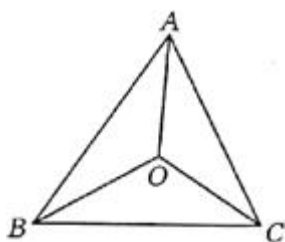
$$(2020 + 2019 + 2018 + \dots + 3 + 2 + 1) = \frac{(1+2020) \times 2020}{2} = 2041210,$$

故答案为: 2041210.

【点睛】本题主要考查一元一次不等式、三角形的三边关系, 解题的关键是利用了在三角形中任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边的三边关系.

【题型 11 利用三角形的三边关系化简或证明】

【例 11】(2023·七年级单元测试) 如图, 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点. 证明:





润禾托管

$$(1) OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$

$$(2) AB + AC + BC > OA + OB + OC.$$

(3) 若A, B, C为三个城镇, $AB + AC + BC = 10$ km, 要在 $\triangle ABC$ 内建造供水站O向三个城镇按如图路线供水, 则所需供水管长度应满足什么条件?

【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析; (3) 水管长度应在 5km 到 10km 之间.

【分析】 (1) 在 $\triangle AOB$ 、 $\triangle AOC$ 、 $\triangle BOC$ 中, 分别有 $OA + OB > AB$, $OA + OC > AC$,

$BO + OC > BC$, 三个式子相加即可证得要求

(2) $AB + AC > OB + OC$, $AB + BC > OA + OC$, $AC + BC > OA + OB$, 三个式子相加即可证得要求

(3) 由 $AB + AC + BC = 10$ km, 点O为 $\triangle ABC$ 内一点, 及(1)(2)可知 $\frac{1}{2}(AB + BC + AC) < OA + OB + OC < AB + BC + AC$, 所以 $5\text{km} < OA + OB + OC < 10\text{km}$. 所以水管长度应在 5km 到 10km 之间.

【详解】 (1) 在 $\triangle AOB$ 中, $OA + OB > AB$, ①

在 $\triangle AOC$ 中, $OA + OC > AC$, ②

在 $\triangle BOC$ 中, $BO + OC > BC$. ③

由① + ② + ③, 得 $2(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$.

故 $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

(2) $AB + AC > OB + OC$, ①

同理, $AB + BC > OA + OC$, ②

$AC + BC > OA + OB$. ③

由① + ② + ③, 得 $2(AB + AC + BC) > 2(OA + OB + OC)$,

即 $AB + AC + BC > OA + OB + OC$.

(3) 由 $AB + AC + BC = 10$ km, 点O为 $\triangle ABC$ 内一点, 及(1)(2)知 $\frac{1}{2}(AB + BC + AC) < OA + OB + OC < AB + BC + AC$

$\therefore 5\text{km} < OA + OB + OC < 10\text{km}$

故水管长度应在 5km 到 10km 之间.

【点睛】 本题考查了三角形的三边关系, 准确找到三角形来写对应关系是本题的解题关键.

【变式 11-1】 (2023 春·七年级课时练习) 已知 a, b, c 是一个三角形的三边长, 化简 $|2a+b-c| - |b-2a-c| + |-a-b-2c|$.



【答案】 $a+3b$

【分析】根据三角形三边关系得到 $2a+b-c>0$, $b-2a-c<0$, $-a-b-2c<0$, 再去绝对值, 合并同类项即可求解.

【详解】解: $\because a, b, c$ 是三角形的三边,

$\therefore$ 由 $a+b-c>0$ 得 $2a+b-c>0$,

由 $b-(a+c)<0$ 得 $b-2a-c<0$,

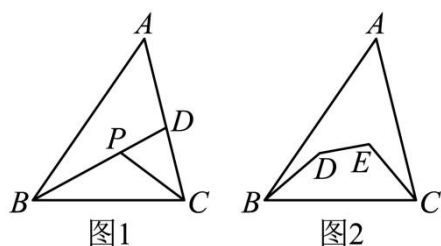
由 $-a-b-c<0$ 得 $-a-b-2c<0$,

$\therefore$ 原式 $= (2a+b-c) + (b-2a-c) + (a+b+2c)$

$= a+3b$.

【点睛】本题考查了三角形三边关系, 绝对值的性质, 整式的加减, 关键是得到 $2a+b-c>0$, $b-2a-c<0$, $-a-b-2c<0$.

【变式 11-2】(2023 春·全国·七年级专题练习) 如图 1, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 连接 BP , 并延长交 AC 于点 D .



(1) 试探究 $AB+BC+CA$ 与 $2BD$ 的大小关系;

(2) 试探究 $AB+AC$ 与 $PB+PC$ 的大小关系;

(3) 如图 2, 点 D, E 是 $\triangle ABC$ 内部两点, 试探究 $AB+AC$ 与 $BD+DE+CE$ 的大小关系.

【答案】(1) $AB+BC+CA>2BD$, 理由见解析

(2) $AB+AC>PB+PC$, 理由见解析

(3) $AB+AC>BD+DE+CE$, 理由见解析

【分析】(1) 利用三角形的两边之和大于第三边解题即可;

(2) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle PDC$ 中, 利用三角形的两边之和大于第三边解题即可;

(3) 延长 BD 交 CE 的延长线于 G , 交 AC 于点 F , 在 $\triangle ABF$ 、 $\triangle GFC$ 和 $\triangle DEG$ 中, 利用三角形的两边之和大于第三边解题即可.

【详解】(1) 解: $AB+BC+CA>2BD$, 理由为:



$$\because AB + AD > BD, BC + CD > BD,$$

$$\therefore AB + AD + BC + CD > BD + BD$$

$$\text{即: } AB + BC + CA > 2BD$$

(2) $AB + AC > PB + PC$, 理由为:

在 $\triangle ABD$ 中, $AB + AD > BP + PD$,

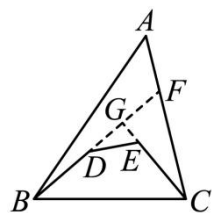
在 $\triangle PDC$ 中, $PD + DC > PC$,

$$\text{两式相加得: } AB + AD + PD + DC > BP + PD + PC$$

$$\text{即: } AB + AC > PB + PC$$

(3) $AB + AC > BD + DE + CE$, 理由为:

如图, 延长 BD 交 CE 的延长线于 G , 交 AC 于点 F ,



$$\text{在 } \triangle ABF \text{ 中, } AB + AF > BD + DG + GF, \text{ ①}$$

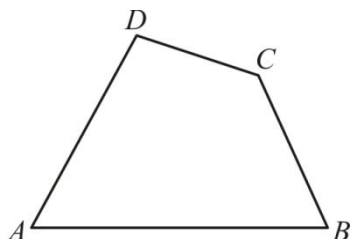
$$\text{在 } \triangle GFC \text{ 中, } GF + AC - AF > GE + EC, \text{ ②}$$

$$\triangle DEG \text{ 中, } DG + GE > DE, \text{ ③}$$

$$\text{①} + \text{②} + \text{③} \text{ 得: } AB + AC > BD + DE + CE$$

【点睛】本题考查三角形的三边关系, 熟练掌握三角形的三边之间的关系是解题的关键.

【变式 11-3】(2023 春·六年级单元测试) 如图, 草原上有四口油井, 位于四边形 $ABCD$ 的四个顶点上, 现在要建立一个维修站 H , 试问 H 建在何处, 才能使它到四口油井的距离之和 $HA + HB + HC + HD$ 最小, 说明理由



【答案】 H 建在 AC 、 BD 的交点处, 理由见解析.

【分析】连接 AC 、 BD 相交于点 H , 任取一点 H' , 连接 $H'A$ 、 $H'B$ 、 $H'C$ 、 $H'D$, 根据三角形三边关系得到 $H'A + H'C > AC$, $H'B + H'D > BD$, 进而得到 $H'A + H'B + H'C + H'D > HA + HB + HC + HD$, 即可推出结论.



【详解】解：H 建在AC、BD的交点处，理由如下：

连接AC、BD相交于点H，任取一点H'，连接H'A、H'B、H'C、H'D，

在 $\triangle AH'C$ 中， $H'A + H'C > AC$ ，

在 $\triangle BH'D$ 中， $H'B + H'D > BD$ ，

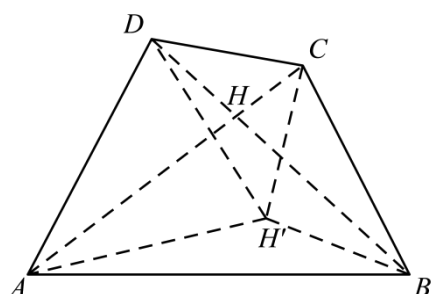
$\therefore H'A + H'B + H'C + H'D > AC + BD$ ，

$\because AC + BD = HA + HB + HC + HD$ ，

$\therefore H'A + H'B + H'C + H'D > HA + HB + HC + HD$ ，

$\therefore HA + HB + HC + HD$ 最小，

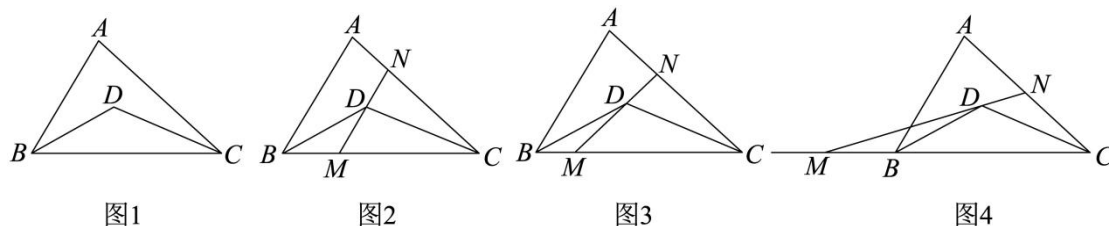
即维修站H建在AC、BD的交点处，才能使它到四口油井的距离之和 $HA + HB + HC + HD$ 最小。



【点睛】本题考查了线段最短，三角形的三边关系，作辅助线构造三角形，灵活运用三角形三边关系是解题关键。

【题型 12 与角平分线有关的三角形角的计算问题】

【例 12】（2023 春·江苏苏州·七年级太仓市第一中学校考期中）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$ ，CD 平分 $\angle ACB$ 。



(1)若 $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数为_____；

(2)若 $\angle A = \alpha$ ，直线MN经过点D。

①如图 2，若 $MN \parallel AB$ ，求 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

②如图 3，若MN绕点D旋转，分别交线段BC, AC于点M, N，试问旋转过程中 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数是否会发生改变？若不变，求出 $\angle NDC - \angle MDB$ 的度数（用含 α 的代数式表示），若改变，请说明理由；



③如图4,继续旋转直线 MN ,与线段 AC 交于点 N ,与 CB 的延长线交于点 M ,请直接写出 $\angle NDC$ 与 $\angle MDB$ 的关系(用含 α 的代数式表示).

【答案】(1) 120°

(2)① $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ②不变, $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ③ $\angle NDC$ 与 $\angle MDB$ 的关系是 $\angle NDC + \angle MDB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

【分析】(1)利用角平分线的定义,三角形内角和定理,分步计算即可.

(2)①利用平角的定义,变形代入计算,注意与第(1)的结合.

②与①结合起来求解即可.

③根据平角的定义,变形后结合前面的计算,求解即可.

【详解】(1) $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle CBD + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB),$$

$$\because \angle CBD + \angle BCD + \angle BDC = 180^\circ, \angle ABC + \angle ACB + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

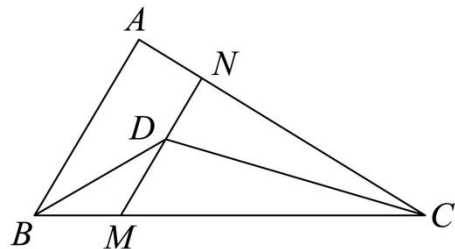
$$\therefore \angle BDC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2},$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

(2) ① $\because \angle NDC = 180^\circ - \angle MDC$,



$$\therefore \angle NDC - \angle MDB = 180^\circ - \angle MDC - \angle MDB$$

$$= 180^\circ - (\angle MDC + \angle MDB)$$

$$= 180^\circ - \angle BDC$$



$$=180^\circ - (90^\circ + \frac{\angle A}{2})$$

$$=90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

② $\angle NDC - \angle MDB$ 保持不变，恒等于 $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 理由如下：

$$\because \angle NDC = 180^\circ - \angle MDC,$$

$$\therefore \angle NDC - \angle MDB = 180^\circ - \angle MDC - \angle MDB$$

$$=180^\circ - (\angle MDC + \angle MDB)$$

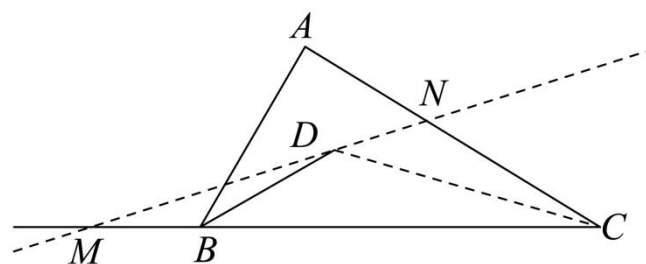
$$=180^\circ - \angle BDC$$

$$=180^\circ - (90^\circ + \frac{\angle A}{2})$$

$$=90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

故保持不变，且为 $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

③ $\angle NDC$ 与 $\angle MDB$ 的关系是 $\angle NDC + \angle MDB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 理由如下：



$$\because \angle NDC + \angle MDB + \angle BDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle NDC + \angle MDB = 180^\circ - \angle BDC,$$

$$\because \angle BDC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle NDC + \angle MDB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

【点睛】本题考查了角的平分线的定义，三角形内角和定理，平角的定义，熟练掌握三角形内角和定理，平角的定义是解题的关键.

【变式 12-1】（2023 秋·河南漯河·七年级校考期中）（1）在图 1 中，请直接写出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 之间的数量关系；

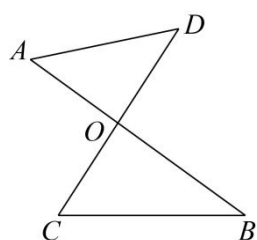


图 1

(2) 如果图 2 中, $\angle D=40^\circ, \angle B=36^\circ$, AP 与 CP 分别是 $\angle DAB$ 和 $\angle DCB$ 的角平分线, 试求 $\angle P$ 的度数;

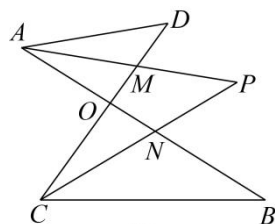


图 2

(3) 如果图 2 中 $\angle D$ 和 $\angle B$ 为任意角, 其他条件不变, 试问 $\angle P$ 与 $\angle D, \angle B$ 之间存在着怎样的数量关系 (直接写出结论即可)。

【答案】(1) $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$

(2) $\angle P = 38^\circ$

(3) $\angle D + \angle B = 2\angle P$

【分析】(1) 根据三角形的内角和定理和对顶角相等就可以得出 $\angle A, \angle D, \angle C, \angle B$ 的数量关系;

(2) 由 (1) 可得 $\angle DAP + \angle D = \angle P + \angle DCP$, $\angle PCB + \angle B = \angle PAB + \angle P$, 再两式相加, 结合角平分线的定义可得 $\angle D + \angle B = 2\angle P$, 再把 $\angle D = 40^\circ, \angle B = 36^\circ$ 代入计算即可得到答案;

(3) 由 (1) 可得 $\angle DAP + \angle D = \angle P + \angle DCP$, $\angle PCB + \angle B = \angle PAB + \angle P$, 再两式相加, 结合角平分线的定义可得 $\angle D + \angle B = 2\angle P$.

【详解】解: (1) $\because \angle A + \angle D + \angle AOD = \angle C + \angle B + \angle BOC = 180^\circ$,

且 $\angle AOD = \angle BOC$,

$\therefore \angle A + \angle D = \angle C + \angle B$;

(2) 由 (1) 可得 $\angle DAP + \angle D = \angle P + \angle DCP$ ①, $\angle PCB + \angle B = \angle PAB + \angle P$ ②,

$\because \angle DAB$ 和 $\angle DCB$ 的角平分线 AP 与 CP 相交于点 P ,

$\therefore \angle DAP = \angle PAB, \angle DCP = \angle PCB$,

①+②得: $\angle DAP + \angle D + \angle PCB + \angle B = \angle P + \angle DCP + \angle PAB + \angle P$,

$\therefore \angle D + \angle B = 2\angle P$,



润禾托管

又 $\because \angle D=40^\circ$, $\angle B=36^\circ$,

$$\therefore 40^\circ+36^\circ=2\angle P,$$

$$\therefore \angle P=38^\circ;$$

(3) 存在的数量关系为: $\angle D+\angle B=2\angle P$,

由(1)可得 $\angle DAP+\angle D=\angle P+\angle DCP$ ①, $\angle PCB+\angle B=\angle PAB+\angle P$ ②,

$\because \angle DAB$ 和 $\angle DCB$ 的角平分线 AP 与 CP 相交于点 P ,

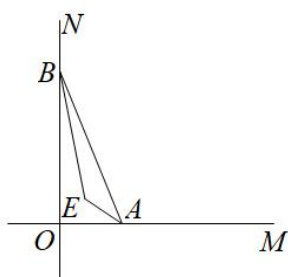
$$\therefore \angle DAP=\angle PAB, \angle DCP=\angle PCB,$$

$$\text{①}+\text{②}\text{得: } \angle DAP+\angle D+\angle PCB+\angle B=\angle P+\angle DCP+\angle PAB+\angle P,$$

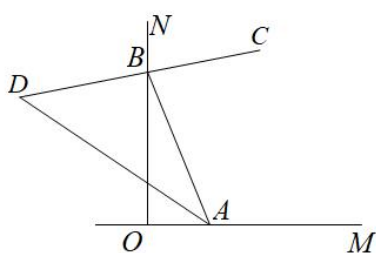
$$\therefore \angle D+\angle B=2\angle P.$$

【点睛】本题主要考查了三角形的内角和定理以及角平分线的定义等知识点, 熟练掌握三角形的内角和定理以及角平分线的性质是解题的关键.

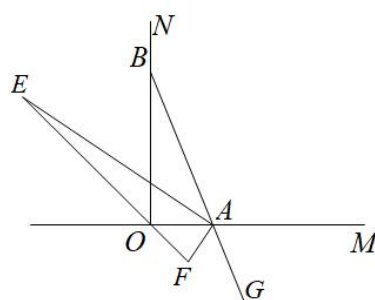
【变式 12-2】(2023 春·江苏扬州·七年级校联考期中) $\angle MON=90^\circ$, 点 A, B 分别在 OM, ON 上运动(不与点 O 重合).



图①



图②



图③

(1) 如图①, AE, BE 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的平分线, 随着点 A 、点 B 的运动, 当 $AO=BO$ 时 $\angle AEB=$ $^\circ$;

(2) 如图②, 若 BC 是 $\angle ABN$ 的平分线, BC 的反向延长线与 $\angle OAB$ 的平分线交于点 D , 随着点 A, B 的运动 $\angle D$ 的大小会变吗? 如果不会, 求 $\angle D$ 的度数; 如果会, 请说明理由;

(3) 如图③, 延长 MO 至 Q , 延长 BA 至 G , 已知 $\angle BAO, \angle OAG$ 的平分线与 $\angle BOQ$ 的平分线及其延长线相交于点 E, F , 在 $\triangle AEF$ 中, 如果有一个角是另一个角的 3 倍, 求 $\angle ABO$ 的度数.

【答案】(1) 135°

(2) $\angle D$ 的度数不随 A, B 的移动而发生变化, 值为 45°

(3) 60° 或 45°



【分析】(1) 利用三角形内角和定理、两角互余、角平分线性质即可求解；

(2) 利用对顶角相等、两角互余、两角互补、角平分线性质即可求解；

(3) 根据三角形的内角和定理及角平分线的性质不难得出 $\angle EAF=90^\circ$ ，如果有一个角是另一个角的3倍，所以不确定是哪个角是哪个角的三倍，所以需要分情况讨论；值得注意的是， $\angle MON=90^\circ$ ，所以求解出的 $\angle ABO$ 一定要小于 90° ，注意解得取舍。

【详解】(1) 解： $\because AE$ 、 BE 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的平分线，

$$\therefore \angle EBA = \frac{1}{2} \angle OBA, \quad \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAO,$$

$$\because \angle MON = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90^\circ,$$

$$\because \angle AEB + \angle EAB + \angle EBA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle EBA - \angle BAE,$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle OBA + \angle BAO),$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ,$$

$$= 180^\circ - 45^\circ,$$

$$= 135^\circ;$$

(2) 解： $\angle D$ 的度数不随 A 、 B 的移动而发生变化，设 $\angle BAD = \alpha$ ，

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAO,$$

$$\therefore \angle BAO = 2\alpha,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABN = 180^\circ - \angle ABO = \angle AOB + \angle BAO = 90^\circ + 2\alpha,$$

$$\because BC \text{ 平分 } \angle ABN,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ + \alpha,$$

$$\because \angle ABC = 180^\circ - \angle ABD = \angle D + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABC - \angle BAD = 45^\circ + \alpha - \alpha = 45^\circ;$$

(3) 解： $\because \angle BAO$ 与 $\angle BOQ$ 的平分线交于点 E ，

$$\therefore \angle AOE = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle EAO - \angle AOE,$$



$$= 45^\circ - \angle EAO,$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{2}\angle BAO,$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ - \angle ABO),$$

$$= \frac{1}{2}\angle ABO$$

$\because AE$ 、 AF 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle OAG$ 的平分线,

$$\therefore \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAO + \frac{1}{2}\angle GAO = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

在 $\triangle AEF$ 中, 若有一个角是另一个角的 3 倍,

则①当 $\angle EAF = 3\angle E$ 时, 得 $\angle E = 30^\circ$, 此时 $\angle ABO = 60^\circ$;

②当 $\angle EAF = 3\angle F$ 时, 得 $\angle E = 60^\circ$,

此时 $\angle ABO = 120^\circ > 90^\circ$, 舍去;

③当 $\angle F = 3\angle E$ 时, 得 $\angle E = \frac{1}{4} \times 90^\circ = 22.5^\circ$,

此时 $\angle ABO = 45^\circ$;

④当 $\angle E = 3\angle F$ 时, 得 $\angle E = \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67.5^\circ$,

此时 $\angle ABO = 135^\circ > 90^\circ$, 舍去.

综上所述, $\angle ABO$ 的度数为 60° 或 45° .

【点睛】前两问熟练运用三角形内角和定理、直角三角形的两锐角互余、对顶角相等、角平分线性质的关系即可求解; 第三问需先证明 $\angle EAF = 90^\circ$, 再分情况进行讨论, 熟练运用三角形的内角和定理及角平分线的性质是解题的关键.

【变式 12-3】(2023 秋·安徽宣城·七年级校考期中) 如图 1, $\angle MON = 90^\circ$, 点 A 、 B 分别在 OM 、 ON 上运动 (不与点 O 重合).

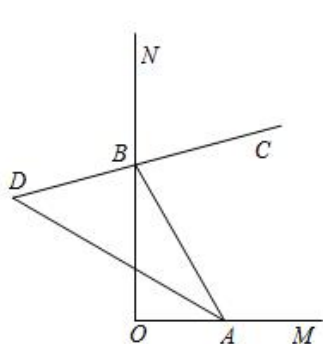


图1

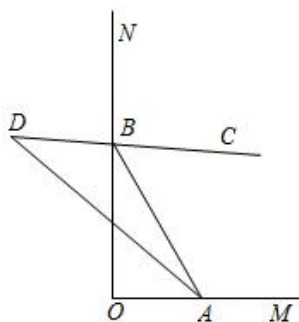


图2

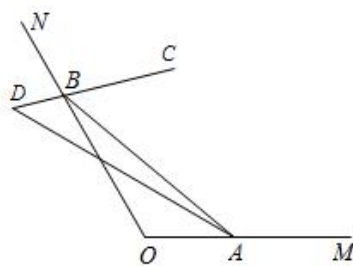


图3



润禾托管

(1)若 BC 是 $\angle ABN$ 的平分线, BC 的反方向延长线与 $\angle BAO$ 的平分线交于点 D .

①若 $\angle BAO = 60^\circ$, 则 $\angle D =$ _____°;

②猜想: $\angle D$ 的度数是否随 A, B 的移动发生变化? 并说明理由.

(2)如图 2, 若 $\angle OAD = \frac{3}{5}\angle OAB$, $\angle NBC = \frac{3}{5}\angle NBA$, 则 $\angle D =$ _____°;

(3)若将 $\angle MON = 90^\circ$ 改为 $\angle MON = 120^\circ$ (如图 3), $\angle OAD = \frac{m}{n}\angle OAB$, $\angle NBC = \frac{m}{n}\angle NBA$, 其余条件不变, 则 $\angle D =$ _____ (用含 m, n 的代数式表示, 其中 $m < n$).

【答案】(1)①45; ②不随 A, B 的移动发生变化, 理由见解析

(2)36

(3) $120^\circ \frac{n-m}{n}$

【分析】(1) ①先利用角平分线的定义求出 $\angle BAD$, 利用三角形内角和定理可得 $\angle ABO$, 即可得到 $\angle NBA$, 利用角平分线的定义可得 $\angle ABC$, 即可求解;

②设 $\angle BAO = \alpha$, 证明过程与①类似;

(2) 设 $\angle BAO = 5\beta$, 解题过程与(1)类似;

(3) 与(1)(2)类似, 设出 $\angle BAO$ 的度数, 再进行推导即可.

【详解】(1) 解: ① $\because \angle BAO = 60^\circ$, AD 平分 $\angle BAO$,

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\because \angle MON = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABN = 180^\circ - \angle ABO = 150^\circ,$$

$\because BC$ 是 $\angle ABN$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 105^\circ,$$

$$\because \angle ABD + \angle BAD + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 45^\circ,$$

故答案为: 45;

② $\angle D$ 的度数不随 A, B 的移动发生变化, 理由如下:



设 $\angle BAO = 2\alpha$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAO$,

$\therefore \angle BAD = \alpha$,

$\because \angle MON = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABO = 90^\circ - 2\alpha$,

$\therefore \angle ABN = 180^\circ - \angle ABO = 90^\circ + 2\alpha$,

$\because BC$ 是 $\angle ABN$ 的平分线,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ + \alpha$,

$\therefore \angle ABD = 135^\circ - \alpha$,

$\because \angle ABD + \angle BAD + \angle D = 180^\circ$,

$\therefore \angle D = 45^\circ$,

$\therefore \angle D$ 的度数不随 A, B 的移动发生变化;

(2) 解: 设 $\angle BAO = 5\beta$,

$\because \angle OAD = \frac{3}{5}\angle OAB$,

$\therefore \angle BAD = \frac{2}{5}\angle OAB$,

$\therefore \angle BAD = 2\beta$,

$\because \angle MON = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABO = 90^\circ - 5\beta$,

$\therefore \angle ABN = 180^\circ - \angle ABO = 90^\circ + 5\beta$,

$\because \angle NBC = \frac{3}{5}\angle NBA$,

$\therefore \angle ABC = \frac{2}{5}\angle NBA$,

$\therefore \angle ABC = 36^\circ + 2\beta$,

$\therefore \angle ABD = 144^\circ - 2\beta$,

$\because \angle ABD + \angle BAD + \angle D = 180^\circ$,

$\therefore \angle D = 36^\circ$,

故答案为: 36;

(3) 解: 设 $\angle BAO = n$,



$$\because \angle OAD = \frac{m}{n} \angle OAB,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{n-m}{n} \angle OAB,$$

$$\therefore \angle BAD = n - m,$$

$$\because \angle MON = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ - n,$$

$$\therefore \angle ABN = 180^\circ - \angle ABO = 120^\circ + n,$$

$$\because \angle NBC = \frac{m}{n} \angle NBA,$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{n-m}{n} \angle NBA,$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{n-m}{n} (120^\circ + n),$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \frac{n-m}{n} (120^\circ + n),$$

$$\because \angle ABD + \angle BAD + \angle D = 180^\circ,$$

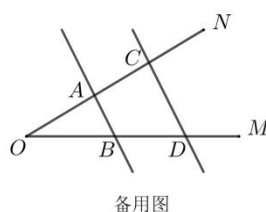
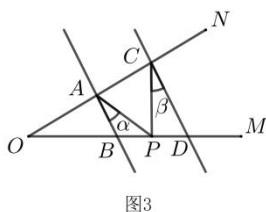
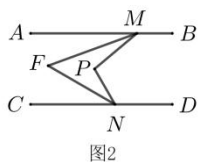
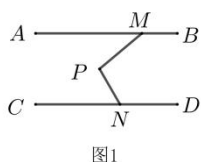
$$\therefore \angle D = 120^\circ \frac{n-m}{n},$$

故答案为: $120^\circ \frac{n-m}{n}$.

【点睛】 本题考查三角形内角和定理，列代数式，角的计算等知识点，解题的关键是熟练掌握三角形内角和定理.

【题型 13 与平行线有关的三角形角的计算问题】

【例 13】(2023 春·辽宁盘锦·七年级统考期末)(1)问题情境:如图 1, $AB \parallel CD$, $\angle PMB = 140^\circ$, $\angle PND = 120^\circ$, 求 $\angle MPN$ 的度数;



(2) 问题迁移: 在 (1) 的条件下, 如图 2, $\angle AMP$ 的角平分线与 $\angle CNP$ 的角平分线交于点 F , 则 $\angle MFN$ 的度数为多少? 请说明理由;

(3) 问题拓展: 如图 3, $AB \parallel CD$, 点 P 在射线 OM 上移动时 (点 P 与点 O, M, D 三点不重合), 记 $\angle PAB = \alpha$, $\angle PCD = \beta$, 请直接写出 $\angle APC$ 与 α, β 之间的数量关系.



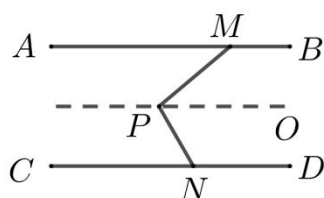
【答案】 (1) 100° ; (2) 50° , 理由见解析; (3) 当点 P 在 BD 上时, $\angle APC = \alpha + \beta$; 当点 P 在 BD 延长线上时, $\angle APC = \alpha - \beta$; 当点 P 在 DB 延长线上时, $\angle APC = \beta - \alpha$.

【分析】 (1) 过点 P 作 $PO \parallel AB$, 将 $\angle MPN$ 分成 $\angle MPO$ 和 $\angle NPO$ 两部分, 然后根据平行线的性质将两部分的度数相加即可;

(2) 分别过点 P 和点 F 作 $PO \parallel AB$, $EF \parallel AB$, 由 (1) 知 $\angle AMP + \angle CNP$ 的度数, 根据角平分线的定义求出 $\angle AMF + \angle CNF$ 的度数, 然后同第一问用平行线的性质即可求出 $\angle MFN$ 的度数;

(3) 分三种情况讨论, 根据平行线的性质和“三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和”以及等量代换即可得到答案.

【详解】解: (1) 过点 P 作 $PO \parallel AB$,



如图, $\because AB \parallel CD$,

$\therefore PO \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle MPO = \angle AMP$, $\angle OPN = \angle CNP$,

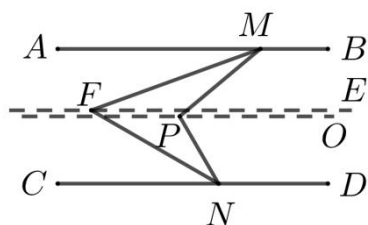
$\because \angle PMB = 140^\circ$, $\angle PND = 120^\circ$,

$\therefore \angle MPO = \angle AMP = 180^\circ - \angle PMB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\angle OPN = \angle CNP = 180^\circ - \angle PND = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$.

(2) 分别过点 P 和点 F 作 $PO \parallel AB$, $EF \parallel AB$,



如图, $\because AB \parallel CD$,

$\therefore PO \parallel EF \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AMP = \angle MPO$, $\angle CNP = \angle OPN$, $\angle MFE = \angle AMF$, $\angle EFN = \angle CNF$,



由(1)得 $\angle AMP + \angle CNP = 100^\circ$,

$\because \angle AMP$ 的角平分线与 $\angle CNP$ 的角平分线交于点 F ,

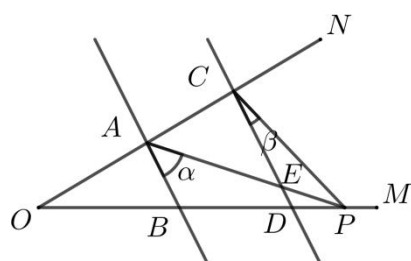
$$\therefore \angle AMF = \frac{1}{2}\angle AMP, \angle CNF = \frac{1}{2}\angle CNP,$$

$$\therefore \angle AMF + \angle CNF = \frac{1}{2}\angle AMP + \frac{1}{2}\angle CNP = \frac{1}{2}(\angle AMP + \angle CNP) = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle MFN = \angle MFE + \angle EFN = \angle AMF + \angle CNF = 50^\circ.$$

(3) 当点 P 在 BD 上时, 如原题图3, 和(1)同理可得: $\angle APC = \alpha + \beta$;

当点 P 在 BD 延长线上时, 如图所示, AP 交 CD 于点 E ,



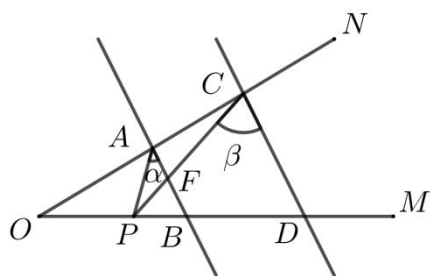
$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \alpha = \angle DEP,$$

$$\text{又} \because \angle DEP = \beta + \angle APC,$$

$$\angle APC = \alpha - \beta;$$

当点 P 在 DB 延长线上时, 如图所示, CP 交 AB 于点 F ,



$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BFP = \beta,$$

$$\text{又} \because \angle BFP = \alpha + \angle APC,$$

$$\therefore \angle APC = \beta - \alpha.$$

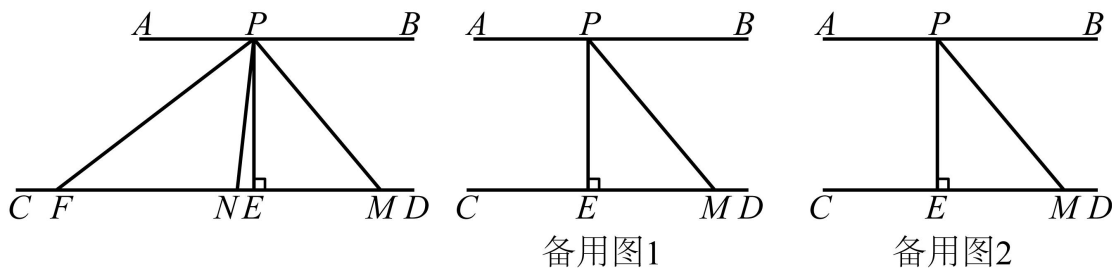
综上所述, 当点 P 在 BD 上时, $\angle APC = \alpha + \beta$; 当点 P 在 BD 延长线上时, $\angle APC = \alpha - \beta$; 当点 P 在 DB 延长线上时, $\angle APC = \beta - \alpha$.



润禾托管

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，还考查了角平分线的定义，三角形的内角和定理的推论；解题的关键是：（1）正确作出辅助线，并灵活使用平行线的性质；（2）正确作出两条平行辅助线，并能灵活使用角平分线的定义和平行线的性质；（3）能用分类讨论的数学思想。

【变式 13-1】（2023 春·河北石家庄·七年级统考期末）如图， $AB \parallel CD$ ，点 P 在直线 AB 上，作 $\angle BPM = 50^\circ$ ，交 CD 于点 M ，点 F 是直线 CD 上的一个动点，连接 PF ， $PE \perp CD$ 于点 E ， PN 平分 $\angle MPF$ 。



- (1) 若点 F 在点 E 左侧且 $\angle PFM = 32^\circ$ ，求 $\angle NPE$ 的度数；
- (2) 当点 F 在线段 EM （不与点 M, E 重合）上时，设 $\angle PFM = \alpha^\circ$ ，直接写出 $\angle NPE$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；
- (3) 将射线 PF 从（1）中的位置开始以每秒 10° 的速度绕点 P 逆时针旋转至 PM 的位置，转动的时间为 t 秒，求当 t 为何值时， $\triangle FPM$ 为直角三角形。

【答案】(1) 9°

(2) $\left(\frac{\alpha-50}{2}\right)^\circ$

(3) t 为 $\frac{4}{5}$ 秒或 $\frac{29}{5}$ 秒

【分析】（1）平行线的性质得到 $\angle PMF = \angle BPM = 50^\circ$ ，三角形内角和，得到 $\angle MPF = 98^\circ$ ，角平分线得到 $\angle NPM = \frac{1}{2}\angle MPF = 49^\circ$ ，垂直得到 $\angle PEM = 90^\circ$ ，进而求出 $\angle EPM$ 的度数，利用 $\angle NPE = \angle NPM - \angle EPM$ ，进行求解即可；

（2）根据题意，画出图形，同法（1）求出 $\angle NPM$ ， $\angle EPM$ 的度数，利用 $\angle NPE = \angle EPM - \angle NPM$ ，进行求解即可；

（3）分 $\angle FPM = 90^\circ$ 和 $\angle PFM = 90^\circ$ ，两种情况进行讨论求解即可。

【详解】（1）解： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle PMF = \angle BPM = 50^\circ$ 。

在 $\triangle MPF$ 中， $\angle PFM = 32^\circ$ ，



$$\therefore \angle MPF = 180^\circ - 50^\circ - 32^\circ = 98^\circ.$$

$\because PN$ 平分 $\angle MPF$,

$$\therefore \angle NPM = \frac{1}{2} \angle MPF = 49^\circ.$$

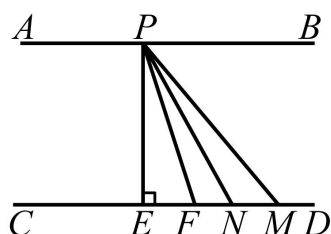
$\because PE \perp CD$,

$$\therefore \angle PEM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPM = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle NPE = \angle NPM - \angle EPM = 49^\circ - 40^\circ = 9^\circ.$$

(2) 解: 如图,



$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle PMF = \angle BPM = 50^\circ.$$

在 $\triangle MPF$ 中, $\angle PFM = \alpha^\circ$,

$$\therefore \angle MPF = 180^\circ - 50^\circ - \alpha = 130^\circ - \alpha^\circ.$$

$\because PN$ 平分 $\angle MPF$,

$$\therefore \angle NPM = \frac{1}{2} \angle MPF = 65^\circ - \frac{1}{2} \alpha.$$

$\because PE \perp CD$,

$$\therefore \angle PEM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPM = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle NPE = \angle EPM - \angle NPM = 40^\circ - 65^\circ + \frac{1}{2} \alpha^\circ = \left(\frac{\alpha - 50}{2} \right)^\circ.$$

(3) $\because \angle PMF = 50^\circ$,

$\therefore$ 当 $\triangle FPM$ 为直角三角形时, 存在两种情况:

情况一: 当 $\angle FPM = 90^\circ$ 时,

$\because$ 初始状态时 $\angle FPM = 98^\circ$,

$\therefore$ 旋转过的度数为 $98^\circ - 90^\circ = 8^\circ$.



润禾托管

∴转动的时间为 $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ (秒) .

情况二：当 $\angle PFM = 90^\circ$ 时， $\angle FPM = 40^\circ$.

∴初始状态时 $\angle FPM = 98^\circ$,

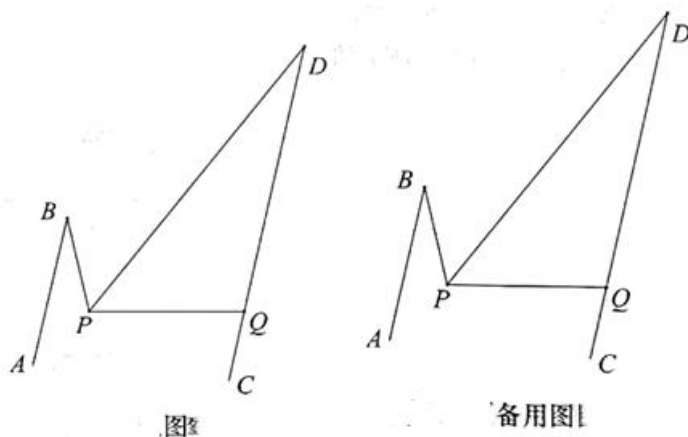
∴旋转过的度数为 $98^\circ - 40^\circ = 58^\circ$.

∴转动的时间为 $\frac{58}{10} = \frac{29}{5}$ (秒) .

综上：当 t 为 $\frac{4}{5}$ 秒或 $\frac{29}{5}$ 秒时， $\triangle FPM$ 为直角三角形 .

【点睛】本题考查平行线的性质，与角平分线和高线有关的三角形的内角和．解题的关键时熟练掌握相关性质和定义，利用数形结合的思想进行求解．

【变式 13-2】（2023 春·辽宁大连·七年级统考期中）如图， $AB \parallel CD$ ，点 O 在直线 CD 上，点 P 在直线 AB 和 CD 之间， $\angle ABP = \angle PDQ = \alpha$ ， PD 平分 $\angle BPQ$.



(1) 求 $\angle BPD$ 的度数 (用含 α 的式子表示) ;

(2) 过点 D 作 $DE \parallel PQ$ 交 PB 的延长线于点 E ，作 $\angle DEP$ 的平分线 EF 交 PD 于点 F ，请在备用图中补全图形，猜想 EF 与 PD 的位置关系，并证明；

(3) 将 (2) 中的“作 $\angle DEP$ 的平分线 EF 交 PD 于点 F ”改为“作射线 EF 将 $\angle DEP$ 分为 $1:3$ 两个部分，交 PD 于点 F ”，其余条件不变，连接 EQ ，若 EQ 恰好平分 $\angle PQD$ ，请直接写出 $\angle FEQ =$ _____ (用含 α 的式子表示) .

【答案】(1) $\angle BPD = 2\alpha$ ；(2) 画图见解析， $EF \perp PD$ ，证明见解析；(3) $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ 或 $45^\circ - \frac{3}{2}\alpha$

【分析】(1) 根据平行线的传递性推出 $PG \parallel AB \parallel CD$ ，再利用平行线的性质进行求解；

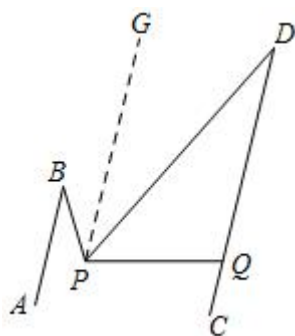
(2) 猜测 $EF \perp PD$ ，根据 PD 平分 $\angle BPQ$ ， $\angle BPD = 2\alpha$ ，推导出 $\angle BPD = \angle DPQ = 2\alpha$ ，再根据 $DE \parallel PQ$ 、 EF 平分 $\angle DEP$ ，通过等量代换求解；

(3) 分两种情况进行讨论，即当 $\angle PEF : \angle DEF = 1:3$ 与 $\angle DEF : \angle PEF = 1:3$ ，充分利用平行线的性质、角平



分线的性质、等量代换的思想进行求解.

【详解】(1) 过点 P 作 $PG//AB$,



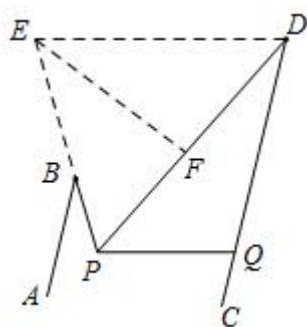
$\because AB//CD, PG//AB$,

$\therefore PG//AB//CD$,

$\therefore \angle BPG = \angle ABP = \alpha, \angle DPG = \angle PDQ = \alpha$,

$\therefore \angle BPD = \angle BPG + \angle DPG = 2\alpha$.

(2) 根据题意, 补全图形如下:



猜测 $EF \perp PD$,

由(1)可知: $\angle BPD = 2\alpha$,

$\because PD$ 平分 $\angle BPQ, \angle BPD = 2\alpha$,

$\therefore \angle BPD = \angle DPQ = 2\alpha$,

$\because DE//PQ$,

$\therefore \angle EDP = \angle DPQ = 2\alpha$,

$\therefore \angle DEP = 180^\circ - \angle BPD - \angle EDP = 180^\circ - 4\alpha$,

又 EF 平分 $\angle DEP$,

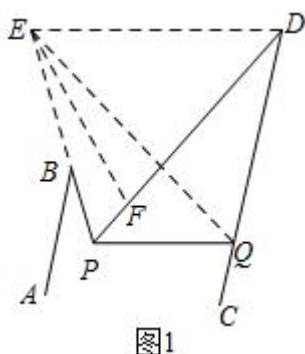
$\angle PEF = \frac{1}{2} \angle DEP = 90^\circ - 2\alpha$,

$\therefore \angle EFD = 180^\circ - \angle PEF - \angle BPD = 90^\circ$,



$\therefore EF \perp PD$.

(3) ①如图 1,



$$\angle PEF : \angle DEF = 1 : 3,$$

由 (2) 可知: $\angle EPD = \angle DPQ = \angle EDP = 2\alpha$, $\angle DEP = 180^\circ - 4\alpha$,

$$\because \angle PEF : \angle DEF = 1 : 3,$$

$$\therefore \angle PEF = \frac{1}{4} \angle DEP = 45^\circ - \alpha,$$

$$\angle DEF = \frac{3}{4} \angle DEP = 135^\circ - 3\alpha,$$

$$\because DE \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle DEQ = \angle PQE,$$

$$\angle EDQ + \angle PQD = 180^\circ,$$

$$\because \angle EDP = 2\alpha, \angle PDQ = \alpha,$$

$$\therefore \angle EDQ = \angle EDP + \angle PDQ = 3\alpha,$$

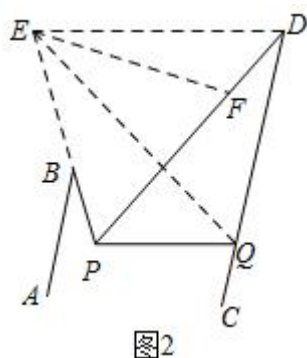
$$\angle PQD = 180^\circ - \angle EDQ = 180^\circ - 3\alpha,$$

又 EQ 平分 $\angle PQD$,

$$\therefore \angle PQE = \angle DQE = \angle DEQ = \frac{1}{2} \angle PQD = 90^\circ - \frac{3}{2} \alpha,$$

$$\therefore \angle FEQ = \angle DEF - \angle DEQ = 135^\circ - 3\alpha - (90^\circ - \frac{3}{2} \alpha) = 45^\circ - \frac{3}{2} \alpha;$$

②如图 2,



$$\angle DEP = 180^\circ - 4\alpha, \angle PQD = 180^\circ - 3\alpha \text{ (同①)};$$

$$\text{若 } \angle DEF : \angle PEF = 1:3,$$

$$\text{则有 } \angle DEF = \frac{1}{4} \angle DEP = \frac{1}{4} \times (180^\circ - 4\alpha) = 45^\circ - \alpha,$$

$$\text{又 } \angle PQE = \angle DQE = \frac{1}{2} \angle PQD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 3\alpha) = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha,$$

$$\therefore DE \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle DEQ = \angle PQE = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle FEQ = \angle DEQ - \angle DEF = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{综上所述: } \angle FEQ = 45^\circ - \frac{3}{2}\alpha \text{ 或 } 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{故答案是: } 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ 或 } 45^\circ - \frac{3}{2}\alpha.$$

【点睛】本题考查了平行线的性质、角平分线、三角形内角和定理、垂直等相关知识点，解题的关键是掌握相关知识点，作出适当的辅助线，通过分类讨论及等量代换进行求解。

【变式 13-3】（2023 春·湖北省直辖县级单位·七年级校考期中）已知 $MN \parallel PQ$ ，点 D 是直线 PQ 上一定点。



润禾托管

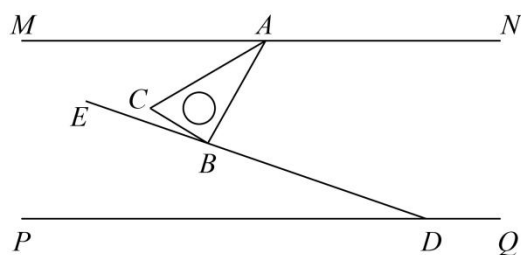


图1

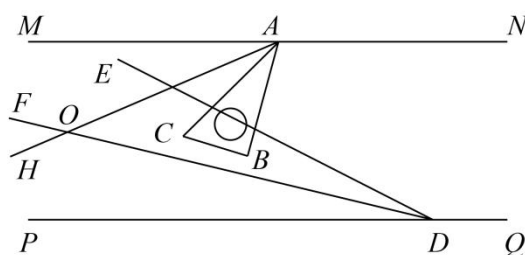


图2

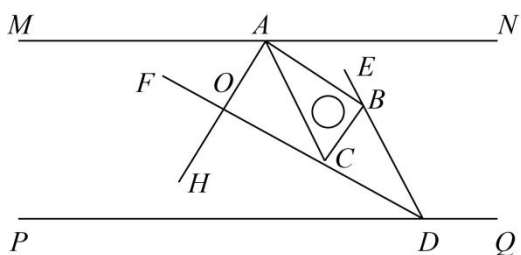
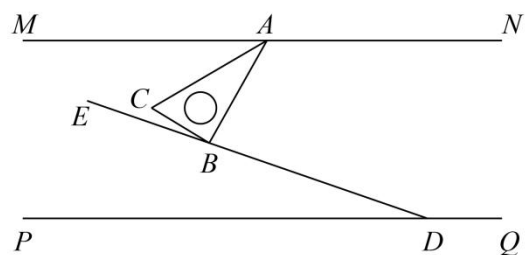


图3



备用图

(1)如图 1, 现有一块含 30° 角的直角三角板 ($\angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$), 将其点 A 固定在直线 MN 上, 并按图 1 位置摆放, 使 $\angle MAC = 30^\circ$, 点 B 恰好落在射线 DE 上, 此时, $\angle PDE = 20^\circ$, 求 $\angle ABD$ 的度数;

(2)现将射线 DE 从图 1 的位置开始以每秒 2 度的速度绕点 D 顺时针旋转, 转到与 DQ 重合时停止, 三角板按图 1 摆放不动, 设旋转时间为 t 秒, 在旋转过程中, 当 DE 与三角板的一边平行时, 求 t 的值;

(3)若将射线 DE 从图 1 的位置开始以每秒 2 度的速度绕点 D 顺时针旋转, 同时, 将三角板 ABC 也从图 1 的位置开始以每秒 4 度的速度绕点 A 逆时针旋转, 在旋转过程中, $\angle MAC$ 的角平分线 AH 与 $\angle PDE$ 的角平分线 DF 交于点 O.

①如图 2, 当 $DF \parallel BC$ 时, $\angle AOD =$ _____ 度;

②如图 3, 当 $DF \parallel BA$ 时, $\angle AOD =$ _____ 度.

【答案】 (1) 80°

(2) 5 或 50 或 65

(3) ① 37 ② 91

【分析】 (1) 过点 B 作 $BK \parallel MN$, 利用平行线的性质求解即可;

(2) 依题意可知: $\angle PDE = (20 + 2t)^\circ$, 分三种情况讨论即可;

(3) 依题意可知: $\angle PDE = (20 + 2t)^\circ$, $\angle MAC = (30 + 4t)^\circ$, 利用角平分线和第一问的关系可得 $\angle AOD = \angle MAO + \angle PDO = 25 + 3t$;



①当 $DF \parallel BC$ 时, 延长 AB 于 DF 于 G , 利用 $\angle AOD + \angle GAO + \angle OGA = 180^\circ$ 列方程计算即可;

②当 $DF \parallel BA$ 时, 延长 AC 于 DF 于 G , 利用 $\angle AOD + \angle GAO + \angle OGA = 180^\circ$ 列方程计算即可.

【详解】(1) 如图1, 过点 B 作 $BK \parallel MN$,

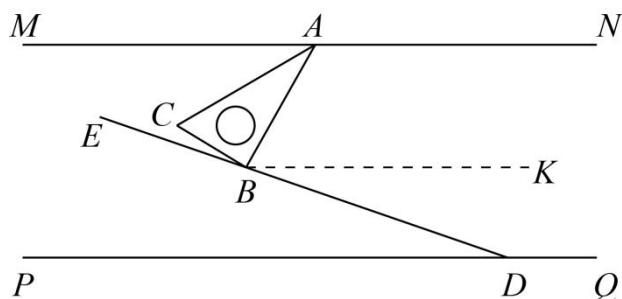


图1

图1

$$\therefore \angle ABK = \angle MAB.$$

$$\because PQ \parallel MN,$$

$$\therefore BK \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle KBD = \angle PDE.$$

$$\because \angle PDE = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle KBD = 20^\circ,$$

$$\because \angle MAC = 30^\circ, \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MAB = \angle MAC + \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABK = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABK + \angle KBD = 80^\circ.$$

(2) 依题意可知: $\angle PDE = (20 + 2t)^\circ$, 分以下三种情况讨论:

①如图4, 当 $DE \parallel BC$ 时, DE 与 AB 交于点 R ,

$$\because DE \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BRD = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ARD = 180^\circ - \angle BRD = 90^\circ,$$

$$\because \angle MAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PDE = \angle ARD - \angle MAB = 30^\circ,$$

$$\therefore 20 + 2t = 30, \text{ 解得 } t = 5.$$

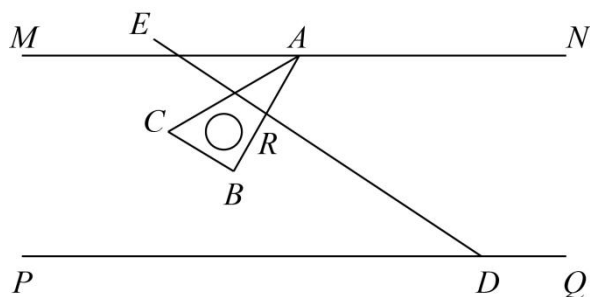


图4

②如图5，当 $DE \parallel AB$ 时， DE 与 MN 交于点 S ，

$$\because DE \parallel AB, \angle MAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DSM = \angle MAB = 60^\circ,$$

$$\because MN \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle PDE + \angle DSM = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle PDE = 180^\circ - \angle DSM = 120^\circ,$$

$$\therefore 20 + 2t = 120, \text{ 解得 } t = 50.$$

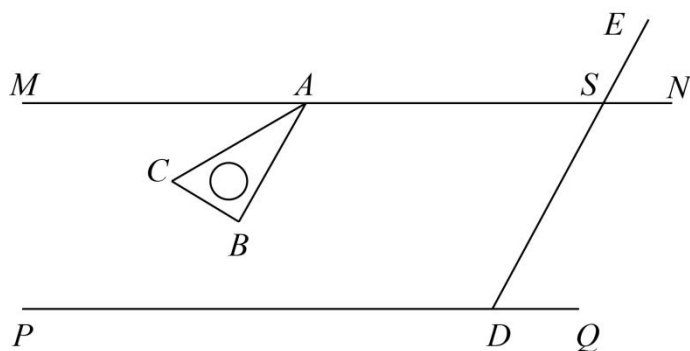


图5

③如图6，当 $DE \parallel AC$ 时， DE 与 MN 交于点 T ，

$$\because DE \parallel AC, \angle MAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MTD = \angle MAC = 30^\circ,$$

$$\because MN \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle MTD + \angle PDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle PDE = 180^\circ - \angle MTD = 150^\circ,$$

$$\therefore 20 + 2t = 150, \text{ 解得 } t = 65.$$

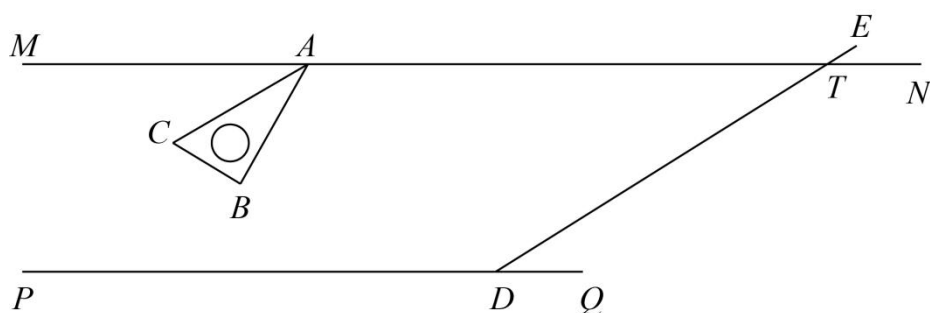


图6

综上所述: t 的值为 5 或 50 或 65.

(3) 依题意可知: $\angle PDE = (20 + 2t)^\circ$, $\angle MAC = (30 + 4t)^\circ$,

$\therefore \angle MAC$ 的角平分线 AH 与 $\angle PDE$ 的角平分线 DF 交于点 O ,

$\therefore \angle PDO = \frac{1}{2} \angle PDE = 10 + t$, $\angle MAO = \angle OAC = \frac{1}{2} \angle MAC = 15 + 2t$,

由 (1) 的模型可得 $\angle AOD = \angle MAO + \angle PDO = 25 + 3t$,

① 当 $DF \parallel BC$ 时, 延长 AB 于 DF 于 G ,

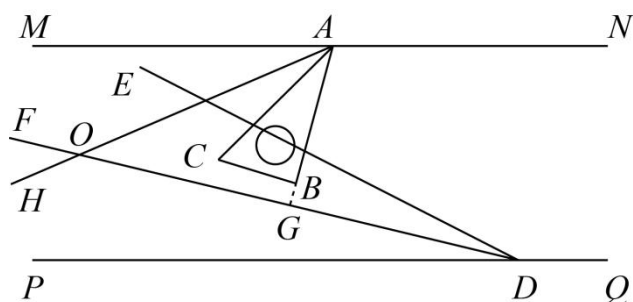


图2

$\therefore \angle ABC = \angle OGA = 90^\circ$, $\angle OAG = \angle OAC + \angle BAC = 45 + 2t$

$\therefore \angle AOD + \angle GAO + \angle OGA = 180^\circ$,

$\therefore 25 + 3t + 90 + 45 + 2t = 180$,

解得 $t = 4$,

$\angle AOD = \angle MAO + \angle PDO = 25 + 3t = 37^\circ$,

故答案为: 37;

② 当 $DF \parallel BA$ 时, 延长 AC 于 DF 于 G ,

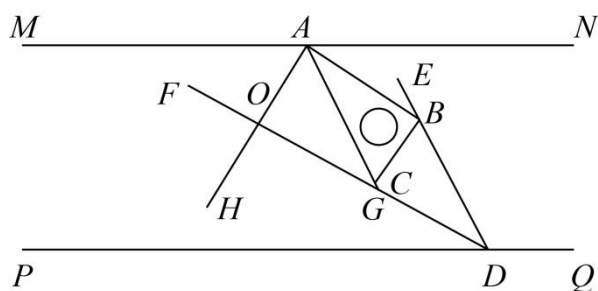


图3

$$\therefore \angle BAC = \angle OGA = 30^\circ, \angle OAG = \angle OAC = 15 + 2t$$

$$\because \angle AOD + \angle GAO + \angle OGA = 180^\circ,$$

$$\therefore 25 + 3t + 30 + 15 + 2t = 180,$$

解得 $t = 22$,

$$\angle AOD = \angle MAO + \angle PDO = 25 + 3t = 91^\circ,$$

故答案为: 91;

【点睛】本题考查作图-平移变换，平行线的判定和性质，三角形的内角和等知识，解题的关键是理解题意，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考常考题型.

【题型 14 与折叠有关的三角形角的计算问题】

【例 14】(2023 秋·山东临沂·七年级统考期末) 有一张正方形纸片 $ABCD$ ，点 E 是边 AB 上一定点，在边 AD 上取点 F ，沿着 EF 折叠，点 A 落在点 A' 处，在边 BC 上取一点 G ，沿 EG 折叠，点 B 落在点 B' 处.

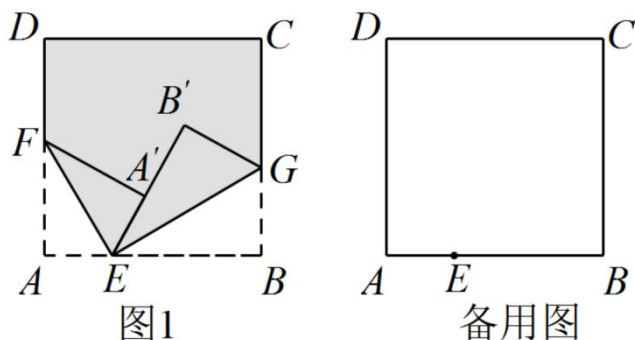


图1

备用图

(1) 如图 1，当点 B 落在直线 $A'E$ 上时，猜想两折痕的夹角 $\angle FEG$ 的度数并说明理由.

(2) 当 $\angle A'EB' = \frac{1}{3} \angle B'EB$ 时，设 $\angle A'EB' = x$.

① 试用含 x 的代数式表示 $\angle FEG$ 的度数.

② 探究 EB' 是否可能平分 $\angle FEG$ ，若可能，求出此时 $\angle FEG$ 的度数；若不可能，请说明理由.

【答案】(1) $\angle FEG = 90^\circ$ ，理由见解析



(2)①当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时, $\angle FEG=90^\circ+\frac{x}{2}$; 当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时, $\angle FEG=90^\circ-\frac{x}{2}$; ② EB' 可能平分 $\angle FEG$, 当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时, $\angle FEG=108^\circ$;
当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时, $\angle FEG=(\frac{540}{7})^\circ$.

【分析】(1) 由折叠的性质结合平角的性质即可求解;

(2) ①分当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部和点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时两种情况讨论求解即可;

②分点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部和点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时两种情况讨论求解即可.

【详解】(1) 解: $\angle FEG=90^\circ$.

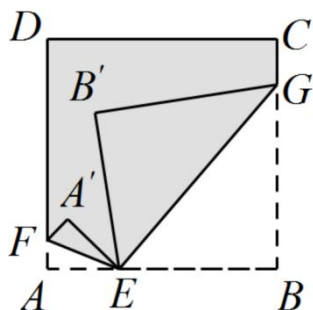
由折叠可知 $\angle AEF=\angle A'EF$, $\angle BEG=\angle B'EG$.

又 $\because \angle AEF+\angle A'EF+\angle BEG+\angle B'EG=180^\circ$,

$\therefore \angle A'EF+\angle B'EG=90^\circ$, $\angle FEG=90^\circ$;

(2) 解: 由折叠可知 $\angle AEF=\angle A'EF$, $\angle BEG=\angle B'EG$.

① (i) 如图, 当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时,



$\because \angle A'EB'=x$, $\angle A'EB'=\frac{1}{3}\angle B'EB$,

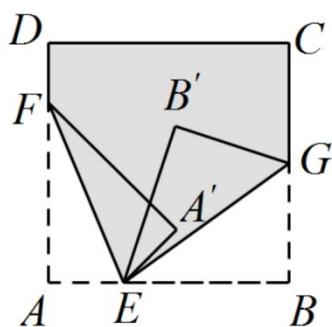
$\therefore \angle B'EB=3x$.

$\therefore \angle AEA'=180^\circ-\angle A'EB=180^\circ-(\angle B'EB+\angle A'EB')=180^\circ-4x$,

$\therefore \angle BEG=\frac{1}{2}\angle BEB'=\frac{3x}{2}$, $\angle AEF=\frac{1}{2}\angle AEA'=90^\circ-2x$,

$\therefore \angle FEG=180^\circ-\angle BEG-\angle AEF=90^\circ+\frac{x}{2}$.

(ii) 如图 2, 当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时,



$$\because \angle A'EB' = x, \quad \angle A'EB' = \frac{1}{3} \angle B'EB,$$

$$\therefore \angle B'EB = 3x,$$

$$\therefore \angle AEA' = 180^\circ - \angle A'EB = 180^\circ - (\angle B'EB - \angle A'EB') = 180^\circ - 2x,$$

$$\therefore \angle BEG = \frac{1}{2} \angle BEB' = \frac{3x}{2}, \quad \angle AEF = \frac{1}{2} \angle AEA' = 90^\circ - x.$$

$$\therefore \angle FEG = 180^\circ - \angle BEG - \angle AEF = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

综上所述, 当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时, $\angle FEG = 90^\circ + \frac{x}{2}$;

当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时, $\angle FEG = 90^\circ - \frac{x}{2}$.

② EB' 可能平分 $\angle FEG$, 理由如下:

(i) 当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时, $\angle FEG = 90^\circ + \frac{x}{2}$.

$$\because EB' \text{ 平分 } \angle FEG, \therefore \angle B'EG = \frac{1}{2} \angle FEG = 45^\circ + \frac{x}{4}.$$

$$\text{又 } \because \angle B'EG = \frac{1}{2} \angle BEB' = \frac{3x}{2},$$

$$\therefore 45^\circ + \frac{x}{4} = \frac{3x}{2}, \text{ 解得 } x = 36^\circ.$$

$$\text{此时 } \angle FEG = 90^\circ + \frac{x}{2} = 108^\circ.$$

(ii) 当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时, $\angle FEG = 90^\circ - \frac{x}{2}$.

$$\because EB' \text{ 平分 } \angle FEG,$$

$$\therefore \angle B'EG = \frac{1}{2} \angle FEG = 45^\circ - \frac{x}{4}.$$

$$\text{又 } \because \angle B'EG = \frac{1}{2} \angle BEB' = \frac{3x}{2},$$

$$\therefore 45^\circ - \frac{x}{4} = \frac{3x}{2},$$



润禾托管

解得 $x = (\frac{180}{7})^\circ$.

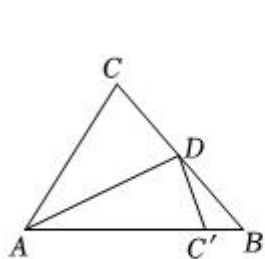
此时 $\angle FEG = 90^\circ - \frac{x}{2} = (\frac{540}{7})^\circ$.

综上所述, 当点 B' 落在 $\angle A'EG$ 内部时, $\angle FEG = 108^\circ$;

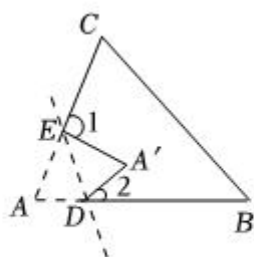
当点 B' 落在 $\angle A'EF$ 内部时, $\angle FEG = (\frac{540}{7})^\circ$.

【点睛】 本题考查了翻折变换的性质、角平分线的定义等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会利用翻折不变性解决问题.

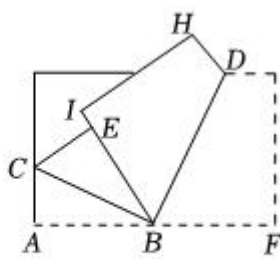
【变式 14-1】 (2023 春·河北石家庄·七年级统考期末) (1) 如图 1, 将一张三角形纸片 ABC 沿着 AD 折叠, 使点 C 落在边 AB 上的 C' 处, 若 $\angle CAB = 70^\circ$, 则 $\angle CAD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;



(图1)



(图2)



(图3)

(2) 如图 2, 将一张三角形纸片 ABC 沿着 DE 折叠 (点 D, E 分别在边 AB 和 AC 上), 并使得点 A 和点 A' 重合, 若 $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle 1 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

(3) 如图 3, 将长方形纸片沿着 BC 和 BD 折叠成如图所示的形状, BE 和 BI 重合,

① $\angle CBD$ 的度数是多少? 请说明理由;

② 如果 $\angle IBD = 58^\circ 17'$, 求 $\angle ABC$ 的度数.

【答案】 (1) 35° ; (2) 140° ; (3) ① 90° ; ② $31^\circ 43'$

【分析】 (1) 利用对折性质可知 AD 是 $\angle CAB$ 角平分线, 由此即可求解;

(2) 根据三角形的内角和可知 $\angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A$, 根据折叠可知 $\angle AEA' + \angle ADA'$ 的度数, 利用两个平角和等于 360° , 由此即可求解;

(3) ① 根据折叠可得 $\angle IBD = \angle FBD$, $\angle ABC = \angle EBC$, 且 $\angle IBD + \angle FBD + \angle ABC + \angle EBC = 180^\circ$, 代入计算即可;

② $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle ABE = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle IBF) = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle IBD)$, 代入计算即可.

【详解】 解: (1) 由对折性质可知, AD 是 $\angle CAB$ 角平分线,



$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ,$$

故答案为: 35° .

(2) 在 $\triangle ADE$ 中, $\angle A + \angle ADE + \angle AED = 180^\circ$, $\angle A = 70^\circ$,

$$\therefore \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ,$$

根据折叠的性质得, $\angle A'ED + \angle A'DE = 110^\circ$,

$$\therefore \angle AEA' + \angle ADA' = 110^\circ + 110^\circ = 220^\circ,$$

$$\because \angle AEA' + \angle 1 + \angle ADA' + \angle 2 = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ,$$

故答案为: 140° .

(3) ①由折叠的性质可知: $\angle IBD = \angle FBD$, $\angle ABC = \angle EBC$, 且 $\angle IBD + \angle FBD + \angle ABC + \angle EBC = 180^\circ$,

$$\therefore \angle CBD = \angle CBE + \angle DBE = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

②根据折叠的性质及上述知识可知,

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \frac{1}{2} \angle ABE \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle IBF) \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle IBD) \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - 2 \times 58^\circ 17') \\ &= 31^\circ 43'. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查折叠问题中角的计算问题, 掌握翻折的性质是本题的关键.

【变式 14-2】(2023 秋·江西南昌·七年级校联考期末) 我们在小学已经学习了“三角形内角和等于 180° ”. 在三角形纸片中, 点 D, E 分别在边 AC, BC 上, 将 $\angle C$ 沿 DE 折叠, 点 C 落在点 C' 的位置.

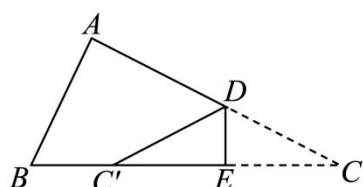


图1

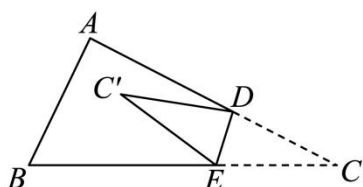


图2

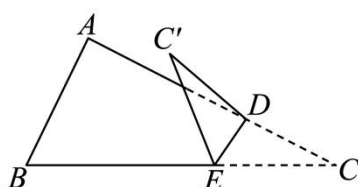


图3

(1) 如图 1, 当点 C 落在边 BC 上时, 若 $\angle ADC' = 58^\circ$, 则 $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$, 可以发现 $\angle ADC'$ 与 $\angle C$ 的数量关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 如图 2, 当点 C 落在 $\triangle ABC$ 内部时, 且 $\angle BEC' = 42^\circ$, $\angle ADC' = 20^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数;



(3)如图 3, 当点 C 落在 $\triangle ABC$ 外部时, 若设 $\angle BEC'$ 的度数为 x , $\angle ADC'$ 的度数为 y , 请求出 $\angle C$ 与 x, y 之间的数量关系.

【答案】(1) 29° , $\angle ADC' = 2\angle C$

(2) 31°

(3) $\angle C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$

【分析】(1) 根据邻补角得出 $\angle CDC'$, 根据折叠的性质得出 $\angle CDE = \angle C'DE = \frac{1}{2}\angle CDC'$, $\angle DEC = \angle DEC' = 90^\circ$,

根据三角形内角和定理即可求解;

(2) 方法一: 根据平角的定义得出 $\angle CEC'$, $\angle CDC'$, 根据折叠的性质得出 $\angle EDC$, $\angle DEC$, 然后根据三角形内角和定理即可求解.

方法二: 根据 (1) 的结论得出 $\angle DCC' = 10^\circ$, $\angle C'CE = 21^\circ$, 进而即可求解;

(3) 方法一: 根据 (2) 的方法一进行计算即可求解;

方法二: 根据 (2) 的方法二, 即可求解.

【详解】(1) $\because \angle ADC' = 58^\circ$,

$\therefore \angle CDC' = 180^\circ - \angle ADC' = 122^\circ$,

由折叠得: $\angle CDE = \angle C'DE = \frac{1}{2}\angle CDC' = 61^\circ$,

$\angle DEC = \angle DEC' = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle EDC - \angle DEC = 29^\circ$,

设 $\angle ADC' = \alpha$,

$\therefore \angle CDC' = 180^\circ - \angle ADC' = 180^\circ - \alpha$,

由折叠得: $\angle CDE = \angle C'DE = \frac{1}{2}\angle CDC' = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

$\angle DEC = \angle DEC' = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle EDC - \angle DEC = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right)$,

$\therefore \angle ADC' = 2\angle C$;

故答案为: 29° , $\angle ADC' = 2\angle C$;

(2) $\because \angle BEC' = 42^\circ$, $\angle ADC' = 20^\circ$,



$$\therefore \angle CEC' = 180^\circ - \angle BEC' = 138^\circ, \angle CDC' = 180^\circ - \angle ADC' = 160^\circ,$$

$$\text{由折叠得: } \angle CDE = \angle C'DE = \frac{1}{2} \angle CDC' = 80^\circ, \angle DEC = \angle DEC' = \frac{1}{2} \angle CEC' = 69^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle EDC - \angle DEC = 31^\circ,$$

方法二：连接 CC'

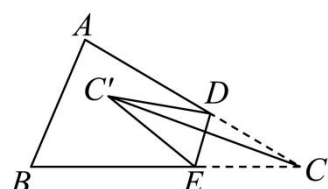


图2

$$\text{由①结论可知: } \angle ADC' = 2\angle DCC' = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle DCC' = 10^\circ$$

$$\text{同理, 由①结论可知: } \angle BEC' = 2\angle C'CE = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle C'CE = 21^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCC' + \angle C'CE = 10^\circ + 21^\circ = 31^\circ.$$

$$(3) \because \angle BEC' = x, \angle ADC' = y,$$

$$\therefore \angle CEC' = 180^\circ - x, \angle EDC' + \angle EDC = 180^\circ + \angle ADC' = 180^\circ + y,$$

$$\text{由折叠得: } \angle CDE = \angle C'DE = \frac{1}{2} \angle CDC' = 90^\circ + \frac{1}{2}y,$$

$$\angle DEC = \angle DEC' = \frac{1}{2} \angle CEC' = 90^\circ - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle EDC - \angle DEC = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}y\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y,$$

$$\therefore \angle C \text{ 与 } x, y \text{ 之间的数量关系: } \angle C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

方法二：连接 CC' ,

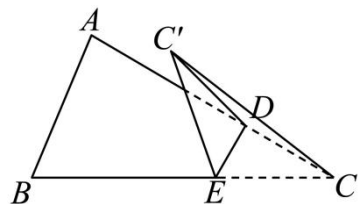


图3

$$\text{由①结论可知: } \angle BEC' = 2\angle ECC' = x,$$

$$\therefore \angle ECC' = \frac{1}{2}x$$



润禾托管

同理，由①结论可知： $\angle ADC' = 2\angle DCC' = y$ ，

$$\therefore \angle DCC' = \frac{1}{2}y$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ECC' - \angle DCC' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

【点睛】本题考查了三角形折叠问题，三角形内角和定理，掌握三角形的内角和定理与折叠的性质是解题的关键。

【变式 14-3】（2023 春·江苏·七年级统考期中）将一张三角形纸片 ABC 的一角折叠，使得点 A 落 A' 的位置，折痕为 DE 。

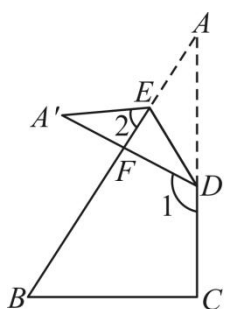


图1

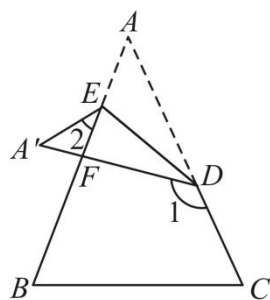


图2

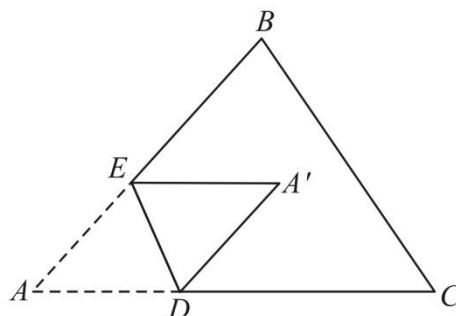


图3

(1) 当点 A 落在四边形 $BCDE$ 的外部 A' 的位置且 A' 与点 C 在直线 AB 的两侧。

① 如图 1，若 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\angle 1 - \angle 2$ 的度数；

② 如图 2，请写出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle A$ 的关系并证明；

(2) 如图 3，有一张三角形纸片 ABC ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，若点 E 是 AB 边上的固定点 ($AE < \frac{1}{2}AB$)，请在 AC 上找一点 D ，将纸片沿 DE 折叠， DE 为折痕点 A 落在 A' 处，使 $A'D$ 与三角形 ABC 的其中一边平行，求 $\angle AED$ 的度数。（四边形内角和 360° ）

【答案】(1) ① 60° ；② $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$

(2) $\angle AED = 75^\circ$ 或 125° 或 35°

【分析】(1) ① 先求出 $\angle B$ 的度数，在根据四边形内角和求出 $\angle 1 + \angle BFD$ 的度数，由 $\angle BFD = \angle A'FE$ 和 $\angle A'$ 的度数可求出答案；

② 同①的方法即可求解。

(2) 分三种情况讨论，当 $A'D \parallel AB$ 时，当 $A'D \parallel BC$ ， A' 在 AC 上方时，当 $A'D \parallel BC$ ， A' 在 AC 下方时，画出图形，根据平行线的性质以及三角形的内角和定理进行求解即可。



【详解】(1) 由折叠可知, $\angle A' = \angle A = 30^\circ$

在 $\triangle A'EF$ 中, $\angle A' + \angle 2 + \angle A'FE = 180^\circ$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle A' - \angle AFE = 150^\circ - \angle A'FE$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 60^\circ$

在四边形 $BCDF$ 中, $\angle 1 + \angle C + \angle B + \angle BFD = 360^\circ$

$$\therefore \angle 1 = 360^\circ - \angle C - \angle B - \angle BFD = 210^\circ - \angle BFD$$

$$\because \angle BFD = \angle A'FE$$

$$\therefore \angle 1 - \angle 2 = 210^\circ - 150^\circ = 60^\circ;$$

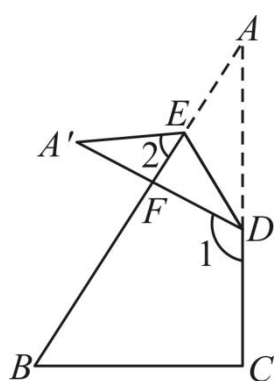


图1

②由折叠可知, $\angle A' = \angle A$

在 $\triangle A'EF$ 中, $\angle A' + \angle 2 + \angle A'FE = 180^\circ$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle A' - \angle AFE = 180^\circ - \angle A - \angle AFE$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$

在四边形 $BCDF$ 中, $\angle 1 + \angle C + \angle B + \angle BFD = 360^\circ$

$$\therefore \angle 1 = 360^\circ - \angle C - \angle B - \angle BFD$$

$$\because \angle BFD = \angle A'FE$$

$$\therefore \angle 1 - \angle 2 = (360^\circ - \angle C - \angle B - \angle BFD) - (180^\circ - \angle A - \angle AFE)$$

$$= 360^\circ - \angle C - \angle B - \angle BFD - 180^\circ + \angle A + \angle AFE;$$

$$= 180^\circ - (\angle C + \angle B) + \angle A$$

$$= 2\angle A$$

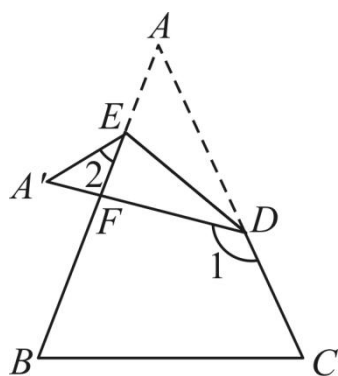
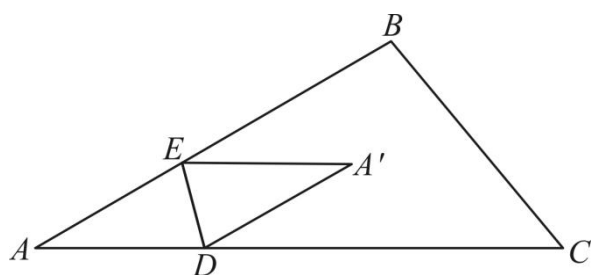


图2

(2) 解：①当 $A'D \parallel AB$ 时，如图所示，

$$\therefore \angle BEA' = \angle A',$$

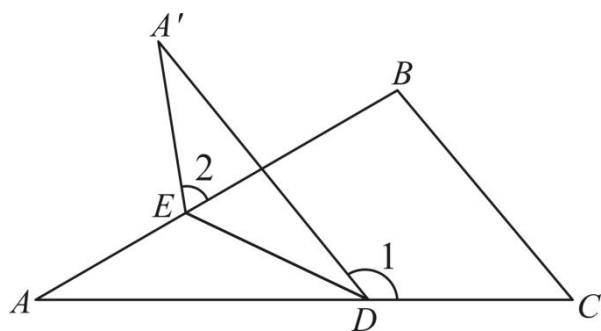
$$\because \text{由折叠可知, } \angle A' = \angle A = 30^\circ, \angle AED = \angle A'ED,$$



$$\therefore \angle AED + \angle A'ED + \angle BEA' = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BEA') = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ;$$

②当 $A'D \parallel BC$ ， A' 在 AC 上方时，如图所示，



$$\because \angle C = 50^\circ, \angle C + \angle 1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 130^\circ,$$

$$\text{由 (1) 可得 } \angle 1 - \angle 2 = 2\angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 70^\circ,$$

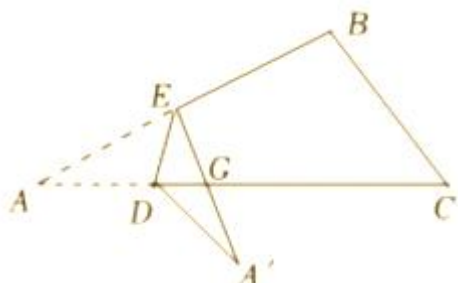
$$\text{由折叠可知, } \angle AED = \angle A'ED,$$



$$\therefore \angle 2 + 180^\circ = 2\angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = 125^\circ;$$

③当 $A'D \parallel BC$, A' 在 AC 下方时, 如图所示, ,



$$\text{则 } \angle CDA' = \angle C = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle A' + \angle CDA' = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = 180^\circ - \angle A - \angle AGE = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ,$$

$$\text{由折叠可知, } \angle AED = \angle A'ED,$$

$$\therefore \angle AED = \frac{1}{2} \angle AEG = 35^\circ,$$

综上所述, $\angle AED = 75^\circ$ 或 125° 或 35° .

【点睛】 本题考查了三角形内角和定理, 折叠的性质, 平行线的性质, 熟练掌握以上知识, 并能分类讨论是解题的关键.