九年级上册数学第2章对称图形测试卷

姓名：_________ 班级：_________ 学号：_________

一、选择题（每小题3分，共18分）

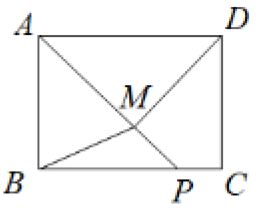
1.⊙O的直径为2，点P到圆心的距离为d，且关于x的方程$2x^2+2\sqrt{2}x+3-d=0$有实数根，则过点P可作⊙O的切线的条数有（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．1或2

2.已知⊙O的直径$CD=10\text{cm}$，AB是⊙O的弦，$AB\perp CD$，垂足为M，且$AB=8\text{cm}$，则AC的长为（　　）

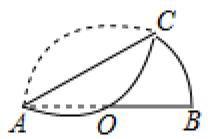
A．$2\sqrt{5}\text{cm}$　　B．$4\sqrt{3}\text{cm}$　　C．$2\sqrt{5}\text{cm}$或$4\sqrt{5}\text{cm}$　　D．$2\sqrt{3}\text{cm}$或$4\sqrt{3}\text{cm}$

3.如图，四边形$ABCD$为矩形，$AB=3$，$BC=4$．点P是线段BC上一动点，点M为线段AP上一点．$\angle ADM=\angle BAP$，则BM的最小值为（　　）



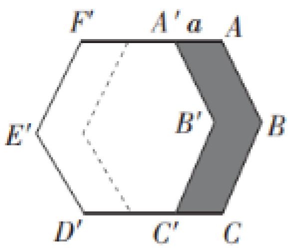
A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\sqrt{13}-\frac{3}{2}$　　D．$\sqrt{13}-2$

4.如图，AB是半圆O的直径，以弦AC为折痕折叠$\overset{\frown}{AC}$后，恰好经过点O，则$\angle AOC$等于（　　）



A．120°　　B．125°　　C．130°　　D．145°

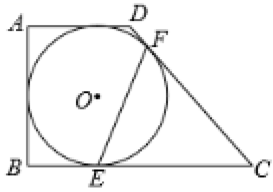
5.如图，两张完全相同的正六边形纸片（边长为$2a$）重合在一起，下面一张保持不动，将上面一张纸片六边形$A'B'C'D'E'F'$沿水平方向向左平移a个单位长度，则上面正六边形纸片面积与折线$A'-B'-C'$扫过的面积（阴影部分面积）之比是（　　）



A．3:1　　B．4:1　　C．5:2　　D．2:1

6.如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC, AB\perp BC$，⊙$O$是四边形$ABCD$的内切圆，$CD, BC$分别切⊙$O$于

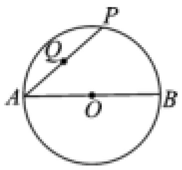
F，E 两点，若 $AD=3, BC=6$，则 EF 的长是（　　）



A．$\frac{8}{5}\sqrt{5}$　　　　B．$\frac{16}{5}\sqrt{5}$　　　　C．$\frac{1}{5}\sqrt{97}$　　　　D．$\frac{2}{5}\sqrt{97}$

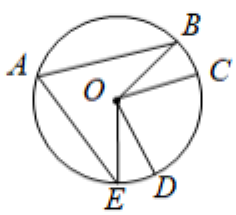
二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

7.如图，⊙O 的直径 AB＝4，P 为⊙O 上的动点，连结 AP，Q 为 AP 的中点，若点 P 在圆上运动一周，则点 Q 经过的路径长是_________.

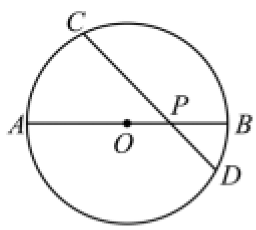


8.已知直线 l: y=x+4，点 A（0，2），点 B（2，0），设点 P 为直线 l 上一动点，当 P 的坐标为_________时，过 P，A，B 三点不能作出一个圆．

9.如图，在半径为 1 的⊙O 上顺次取点 A，B，C，D，E，连接 AB，AE，OB，OC，OD，OE.若 $\angle BAE=65°$，$\angle COD=70°$，则 $\overset{\frown}{BC}$ 与 $\overset{\frown}{DE}$ 的长度之和为__________．（结果保留 π）．



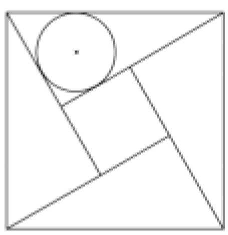
第 9 题图



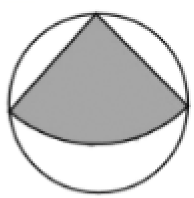
第 10 题图

10.如图，⊙O 的直径 AB 与弦 CD 相交于点 P，且 $\angle APC=45°$，若 $PC^2+PD^2=32$，则⊙O 的半径为______.

11.我国古代数学家赵爽的“弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形（如图所示）．若直角三角形的内切圆半径为 3，小正方形的面积为 49，则大正方形的面积为_________.



第 11 题图

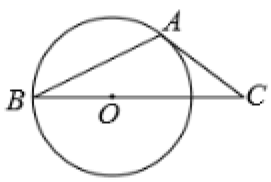


第 12 题图

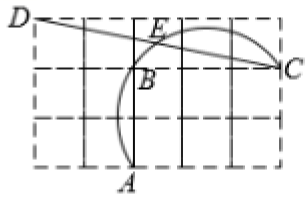
12.从一块直径是 $2\sqrt{2}$ 的圆中剪出一个圆心角为 90°的扇形，将减下来的扇形围成一个圆锥，圆锥底面

圆的半径是__________．

13.如图，在△ABC 中，AC=2，BC=4，点 O 在 BC 上，以 OB 为半径的圆与 AC 相切于点 A，D 是 BC 边上的动点，当△ACD 为直角三角形时，AD 的长为__________．



第 13 题图

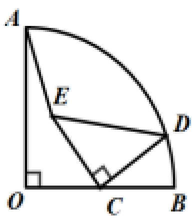


第 14 题图

14.如图，在每个小正方形的边长均为 1 的网格图中，一段圆弧经过格点 A，B，C，格点 C，D 的连线交 $\overset{\frown}{BC}$ 于点 E，则 $\overset{\frown}{EC}$ 的长为____________．

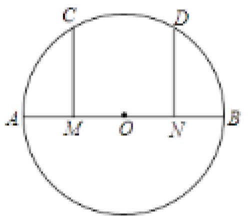
15.已知等腰△ABC 内接于半径为 10 的⊙O 中，且圆心 O 到 BC 的距离为 6，则这个等腰△ABC 底边上的高是 ___．

16.如图，弧 AB 所对圆心角∠AOB＝90°，半径为 4，点 C 是 OB 中点，点 D 是弧 AB 上一点，CD 绕点 C 逆时针旋转 90°得到 CE，则 AE 的最小值是_________．



三、**解答题**（共 62 分）

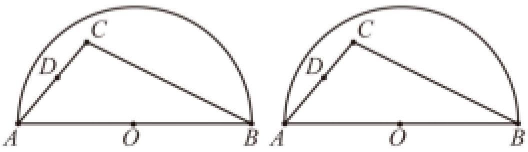
17.（6 分）如图，已知 AB 是⊙O 的直径，M，N 分别是 AO，BO 的中点，CM⊥AB，DN⊥AB．求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ ．



18.（8 分）如图，点 C 是以 AB 为直径的半圆 O 内任意一点，连接 AC，BC，点 D 在 AC 上，且 AD＝CD，请仅用无刻度的直尺分别按下列要求画图（保留画图痕迹）．

(1)在图（1）中，画出$\triangle ABC$的中线 AE；

(2)在图（2）中，画出$\triangle ABC$的角平分线 AF．

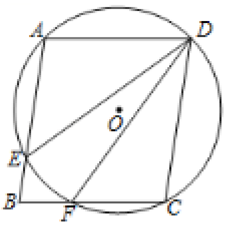


图（1）　　图（2）

19.（8 分）如图，在四边形 ABCD 中，AD//BC，⊙O 经过点 A、C、D，分别交边 AB、BC 于点 E、F，连接 DE、DF，且 DE＝DF．

（1）求证：AB//CD；

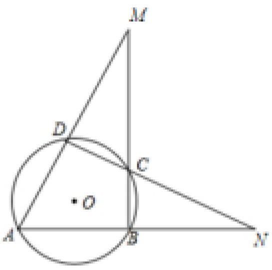
（2）连接 AF，求证：AB＝AF．



20.（10 分）如图，⊙O 的内接四边形 ABCD 两组对边的延长线分别交于点 M，N．

（1）当∠M=∠N=42°时，求∠A 的度数；

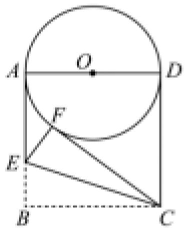
（2）若 $\angle DMC=\alpha$，$\angle BNC=\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$，请你用含有 α、β 的代数式表示∠A 的度数．



21.（10分）如图，正方形 $ABCD$ 的边长 AD 为⊙O 的直径，E 是 AB 上一点（不与 A，B 重合），将正方形的一个角沿 EC 折叠，使得点 B 恰好与圆上的点 F 重合．

(1)判断直线 CF 与⊙O 的位置关系？并说明理由；

(2)若⊙O 的半径为 1，求 AE 的长？



22.（10 分）已知等腰△ABC中，AB＝AC．

（1）如图 1，若⊙O为△ABC的外接圆，求证：$AO\perp BC$；

（2）如图 2，若$AB=AC=10$，$BC=12$，I 为△ABC的内心，连接 IC，过点 I 作$ID\parallel BC$交 AC 于点 D，求 ID 的长．

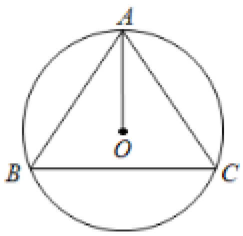


图 1

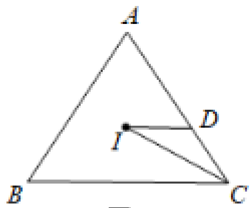


图 2

23.（10 分）（1）课本再现：在⊙O中，$\angle AOB$是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角，$\angle C$是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，我们在数学课上探索两者之间的关系时，要根据圆心 O 与$\angle C$的位置关系进行分类．图 1 是其中一种情况，请你在图 2 和图 3 中画出其它两种情况的图形，并从三种位置关系中任选一种情况证明$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$；

（2）知识应用：如图 4，若⊙O的半径为 2，PA,PB分别与⊙O相切于点 A，B，$\angle C=60^{\circ}$，求PA的长．

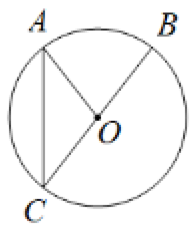


图1

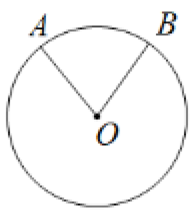


图2

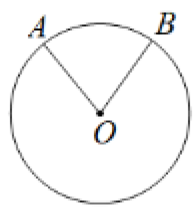


图3

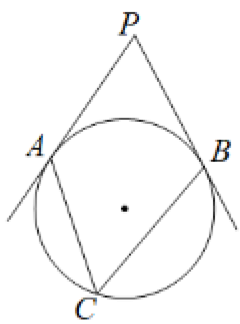


图4

参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、C

【解析】解：∵关于 x 的方程 $2x^2+2\sqrt{2}x+3-d=0$ 有实数根，

∴$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times2\times(3-d)\geq0$，解得 $d\geq2$，

即 $OP\geq2$，

∵⊙O 的半径为 1，

∴点 P 在⊙O 外．

∴过点 P 可作⊙O 的切线的条数有两条．

故选：C．

2、C

【解析】连接 AC，AO，

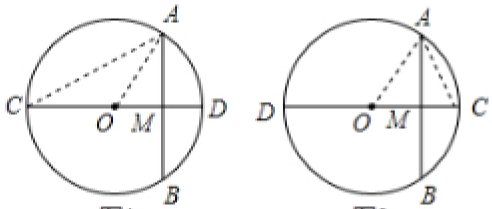


图1　　图2

∵圆 O 的直径 CD=10cm，AB⊥CD，AB=8cm，∴$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$cm，OD=OC=5cm，

当 C 点位置如图 1 所示时，

∵OA=5cm，AM=4cm，CD⊥AB，∴$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$cm，

∴CM=OC+OM=5+3=8cm，∴$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$ cm；

当 C 点位置如图 2 所示时，同理可得 OM=3cm，

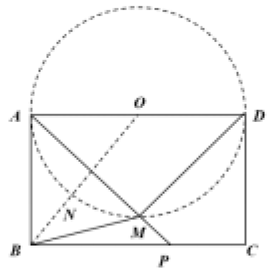
∵OC=5cm，∴MC=5−3=2cm，

在 Rt△AMC 中，$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ cm．

故选 C．

3、D

【解析】设 AD 的中点为 O，以 O 点为圆心，AO 为半径画圆



∵四边形 $ABCD$ 为矩形,∴ $\angle BAP+\angle MAD=90^{\circ}$

∵ $\angle ADM=\angle BAP$,∴ $\angle MAD+\angle ADM=90^{\circ}$

∴ $\angle AMD=90^{\circ}$,∴点 M 在 O 点为圆心，以 AO 为半径的园上

连接 OB 交圆 O 与点 N

∵点 B 为圆 O 外一点,∴当直线 BM 过圆心 O 时，BM 最短

∵ $BO^2=AB^2+AO^2$，$AO=\frac{1}{2}AD=2$

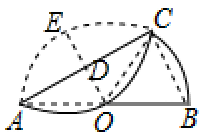
∴ $BO^2=9+4=13$,∴ $BO=\sqrt{13}$

∵ $BN=BO-AO=\sqrt{13}-2$

故选：D．

4、A

【解析】解：如图，连接 OC，BC，过 O 作 OE⊥AC 于 D 交圆 O 于 E，



∵把半圆沿弦 AC 折叠，$\overset{\frown}{AC}$ 恰好经过点 O，∴OD=$\frac{1}{2}$OE，$OD\perp AC$

∵AB 是半圆 O 的直径，∴∠ACB=90°，∴OD∥BC，

∵OA=OB，∴OD=$\frac{1}{2}$BC，∴BC=OE=OB=OC，∴$\triangle OCB$ 是等边三角形，∴∠COB=60°，

∴∠AOC=120°，

5、A

【解析】解：连接 $A'D'$，$C'F'$，$E'B'$，交于点 O

连接 $A'C'$ 交 $E'B'$ 点 G，连接 BB'

∵六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 是正六边形,∴ $A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'F'=F'A'=2a$

$\angle A'B'C'=\angle B'C'D'=\angle C'D'E'=\angle D'E'F'=\angle E'F'A'=\angle F'A'B'=\frac{180^{\circ}\times(6-2)}{6}=120^{\circ}$

点 O 是正六边形的中心,∴ $A'O=B'O=C'O=D'O=E'O=F'O$

在$\triangle OC'B'$和□$OA'B'$中

$$\begin{cases} A'B' = B'C' \\ OA' = OC' \\ OB' = OB' \end{cases}$$

$\therefore \triangle OC'B' \cong \triangle OA'B'$，$\therefore OA' = OC' = A'B' = B'C'$，$\therefore$四边形$OA'B'C'$是菱形

同理可证：四边形$OA'F'E'$是菱形，四边形$OC'D'E'$是菱形

菱形$OA'B'C' \cong$菱形$OA'F'E' \cong$菱形$OC'D'E'$

$\because$四边形$OA'B'C'$是菱形，$\therefore A'C' \perp OB'$，$A'G = \dfrac{1}{2}A'C$，$A'B' = OA' = OB' = 2a$

$\therefore \angle A'GB' = 90°$，$\angle A'B'O = 60°$

在$Rt\triangle A'GB'$中，

$$\sin\angle A'B'O = \sin 60° = \frac{A'G}{A'B'} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore A'G = \sqrt{3}a$$

$$\therefore S_{菱形OB'C'D'} = \frac{1}{2}A'C' \cdot OB' = A'G \cdot OB' = \sqrt{3}a \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^2$$

$$\therefore S_{正六边形A'B'C'D'E'F'} = 3S_{菱形OB'C'D'} = 6\sqrt{3}a^2$$

$\because$六边形$A'B'C'D'E'F'$是正六边形

$\therefore$由平移得：E'、B'、B，三点共线，四边形$A'B'BA$是平行四边形，$BB' = a$

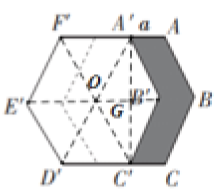
同理：四边形$B'C'CB$是平行四边形，且□$A'B'BA \cong$□$B'C'CB$

$$\therefore A'G \perp BB', \therefore S_{□A'B'BA} = A'G \cdot BB' = \sqrt{3}a \cdot a = \sqrt{3}a^2$$

$$\therefore S_{阴影} = 2S_{□A'B'BA} = 2\sqrt{3}a^2$$

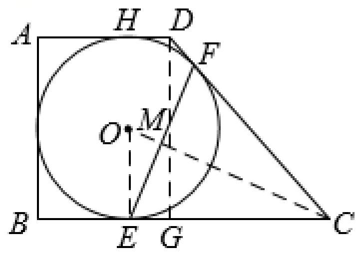
$$\therefore S_{正六边形A'B'C'D'E'F'} : S_{阴影} = 6\sqrt{3}a^2 : 2\sqrt{3}a^2 = 3:1$$

故选 A．



6、A

【解析】连接 OC，与 EF 相交于点 M，作 DG⊥BC 于点 G，连接 OE，设 AD 与圆的切点为 H，如图，



$\because AD // BC, AB \perp BC, DG \perp BC$， ∴四边形 ABGD 是矩形，∴BG=AD=3，CG=BC-BG=6-3=3，

∵点 E、F、H 是切点，∴DF=DH，CF=CE，OC 平分∠ECF，

∴△ECF 是等腰三角形，OC 是 EF 的垂直平分线，∴EM=FM，

设圆 O 半径为 R，则 BE=R，DG=2R，，∴CE=CF=6-R，DF=DH=3-R，

$\because DG^2+CG^2=CD^2$，$\therefore (2R)^2+3^2=[(3-R)+(6-R)]^2$,解得：R=2，

∴CE=6-2=4，$\therefore OC=\sqrt{OE^2+CE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

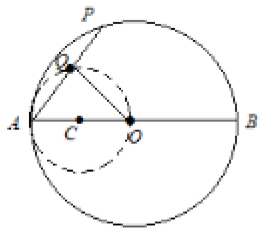
$\because S_{\triangle OEC}=\frac{1}{2}OE\cdot CE=\frac{1}{2}OC\cdot EM$， $\therefore EM=\frac{OE\cdot CE}{OC}=\frac{2\times 4}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$， $\therefore EF=2EM=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，

故选 A．

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

7、2π

【解析】解：连接 OQ．



在⊙O 中，

∵AQ=PQ，OQ 经过圆心 O，∴OQ⊥AP．∴∠AQO=90°．∴点 Q 在以 OA 为直径的⊙C 上．

∴当点 P 在⊙O 上运动一周时，点 Q 在⊙C 上运动一周．

∵AB=4，∴OA=2．∴⊙C 的周长为 2π．

∴点 Q 经过的路径长为 2π．

故答案为：2π

8、$(-1, 3)$

【解析】解：设直线 AB 的解析式为 y=kx+b，

∵A(0,2)，点 B(2,0)，$\therefore\begin{cases}b=2\\2k+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-1\\b=2\end{cases}$，∴y=−x+2.

解方程组$\begin{cases}y=-x+2\\y=x+4\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$，

∴当 P 的坐标为(−1, 3)时，过 P，A，B 三点不能作出一个圆.

故答案为(−1, 3).

9、$\frac{1}{3}\pi$

【解析】解：∵$\angle BAE=65°$，∴$\angle BOE=2\angle BAE=130°$

又⊙O的半径为 1，$\overset{\frown}{BE}$的长度=$\frac{130\pi\times1}{180}=\frac{13\pi}{18}$，

又$\angle COD=70°$，∴$\overset{\frown}{DC}$的长度=$\frac{70\pi\times1}{180}=\frac{7\pi}{18}$，

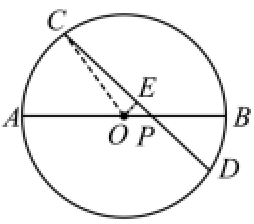
∴$\overset{\frown}{BC}$与$\overset{\frown}{DE}$的长度之和=$\frac{13}{18}\pi-\frac{7}{18}\pi=\frac{6}{18}\pi=\frac{1}{3}\pi$，

故答案为：$\frac{1}{3}\pi$．

10、4

【解析】解：设⊙O的半径为 R

过点O作$OE\perp CD$，连接OC，∴$CE=DE$，



∵$\angle APC=45°$，∴$EP=OE$，

$PC^2+PD^2=\left(CE+EP\right)^2+\left(DE-EP\right)^2$，$=CE^2+2CE\cdot EP+EP^2+DE^2-2DE\cdot EP+EP^2$，$=2CE^2+2EP^2$，

$=2\left(CE^2+EP^2\right)$，$=2\left(CE^2+OE^2\right)$，

∴$2R^2=32$，解得：$R=4$.

故答案为：4

11、289

【解析】解：设四个全等的直角三角形的三边分别为a,b,c，较长的直角边为a,较短的直角边为b,c为斜边，

∵直角三角形的内切圆半径为 3，小正方形的面积为 49，∴$\frac{a+b-c}{2}=3$,$(a-b)^2=49$，

∴$a+b-c=6$①，$a-b=7$②，∴$a=\frac{13+c}{2}$,$b=\frac{c-1}{2}$，

$\because a^2+b^2=c^2$③，$\therefore \left(\frac{13+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c-1}{2}\right)^2=c^2$，

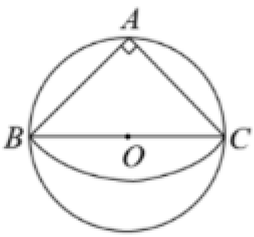
解得 $c=17$ 或 $c=-5$（舍去），

大正方形的面积为 $c^2=17^2=289$，

故答案为：289．

12、0.5

【解析】解：如图：



$\because \angle BAC=90°$，$\therefore BC=2\sqrt{2}$，

$\because AB=AC$，$AB^2+AC^2=BC^2$，$\therefore AB=2$，

设圆锥的底面圆的半径为 r，

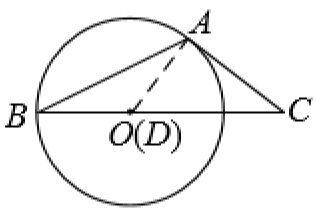
根据题意得 $2\pi r=\frac{90°\pi\times 2}{180°}$，解得 $r=0.5$，

即圆锥的底面圆的半径为 0.5．

故答案为：0.5

13、$\frac{3}{2}$ 或 $\frac{6}{5}$

【解析】解：连接 OA，

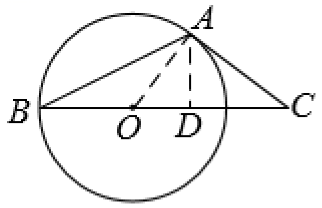


①当 D 点与 O 点重合时，∠CAD 为 90°，

设圆的半径=r，∴OA=r，OC=4-r，

∵AC=4，在 Rt△AOC 中，根据勾股定理可得：$r^2+4=(4-r)^2$，解得：$r=\frac{3}{2}$，即 $AD=AO=\frac{3}{2}$；

②当∠ADC=90°时，过点 A 作 AD⊥BC 于点 D，



$\because \frac{1}{2}$AO•AC=$\frac{1}{2}$OC•AD，∴AD=$\frac{AO \cdot AC}{OC}$，

∵AO=$\frac{3}{2}$，AC=2，OC=4-r=$\frac{5}{2}$，∴AD=$\frac{6}{5}$，

综上所述，AD 的长为$\frac{3}{2}$或$\frac{6}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{2}$或$\frac{6}{5}$．

14、$\frac{\sqrt{13}\pi}{4}$

【解析】解：如图所示：连接AE、AC、AD，

$\because \angle ABC=90°$，$\therefore AC$是直径，$\therefore \angle ABC=\angle AEC=90°$，

根据网格图形可知：$AC=AD=\sqrt{13}$，$CD=\sqrt{26}$，

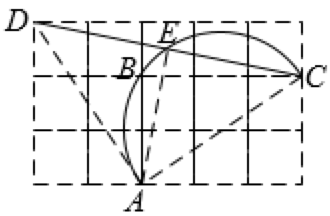
$\therefore AC^2+AD^2=CD^2=26$，$\therefore \triangle ACD$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle CAD=90°$，$\angle ACE=45°$，$\therefore \angle EAC=45°$，$\therefore \overset{\frown}{EC}$所对的圆心角是 90°，

$\therefore \overset{\frown}{EC}$的长为以$AC$为直径的圆周长的$\frac{1}{4}$，

即$l_{\overset{\frown}{EC}}=\frac{1}{4}\times\pi\times\sqrt{13}=\frac{\sqrt{13}\pi}{4}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{13}\pi}{4}$．



15、4 或 16 或$\frac{64}{5}$

【解析】解：①当BC是底，ΔABC是锐角三角形时，如图 1，

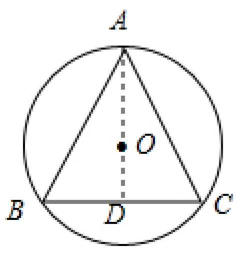


图1

连接 OA 交 BC 于点 D，

$\because AB=AC$，$\therefore AD\perp BC$，

$\because OA=10$，$OD=6$，$\therefore AD=10+6=16$，

②当 BC 是底，ΔABC 是钝角三角形时，如图 2，

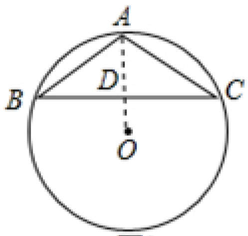


图2

同理可得，$AD=OA-OD=10-6=4$．

③当 BC 是腰时，连接 BO 并延长到 AC 于 E，作 $OD\perp BC$ 于点 D，

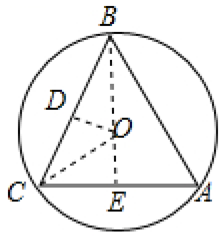


图3

在 $Rt\triangle BOD$ 中，$OB=10$，$OD=6$，$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，$\therefore BC=2BD=16$，

设 $OE=x$，在 $Rt\triangle COE$ 中，$CE^2=OC^2-OE^2=10^2-x^2$，

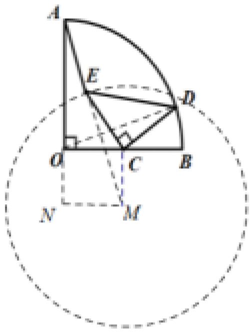
在 $Rt\triangle BCE$ 中，$CE^2=BC^2-BE^2=16^2-(10+x)^2$，

$\therefore 10^2-x^2=16^2-(10+x)^2$，解得 $x=\frac{14}{5}$，$\therefore BE=10+\frac{14}{5}=\frac{64}{5}$．

故答案为：4 或 16 或 $\frac{64}{5}$．

16、$2\sqrt{10}-4$

【解析】解：过点 C 作 MC⊥OB，且使得 CM＝OC，连接 EM，OD，则∠OCM＝90°，



∵点 C 是 OB 中点，∴OC＝BC＝$\frac{1}{2}$OB＝2，∴CM＝OC＝2，

∵CD 绕点 C 逆时针旋转 90°得到 CE，∴CD＝CE，∠DCE＝90°，∴∠OCM＝∠DCE，

∴∠OCM＋∠OCE＝∠DCE＋∠OCE，∴∠ECM＝∠DCO，

在△ECM 和△DCO 中，

$$\begin{cases} EC = DC \\ \angle ECM = \angle DCO \\ CM = CO \end{cases},$$

∴△ECM≌△DCO（SAS），∴EM＝OD＝4，

∴点 E 在以点 M 为圆心，半径为 4 的圆上，∴当 A、E、M 三点共线时，AE 取最小值，

作 M 作 MN⊥AO 交 AO 的延长线于点 N，∴∠MNO＝∠MCO＝∠CON＝90°，∴四边形 COMN 是矩形，

∵CM＝OC，∴四边形 COMN 是正方形，∴MN＝OC＝ON＝2，

∴AN＝AO＋ON＝6，∴AM＝$\sqrt{AN^2+MN^2}=2\sqrt{10}$，

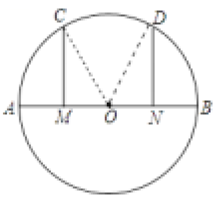
∴AE 的最小值为 AM－EM＝$2\sqrt{10}-4$，

故答案为：$2\sqrt{10}-4$．

三、解答题（共 62 分）

17、见解析

【解析】证明：连结 OC、OD，如图，



∵AB 是⊙O 的直径，M，N 分别是 AO，BO 的中点，∴OM=ON，

∵CM⊥AB，DN⊥AB，∴∠OMC=∠OND=90°，

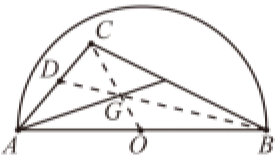
在 Rt△OMC 和 Rt△OND 中，

$$\begin{cases} OM = ON \\ OC = OD \end{cases},$$

∴Rt△OMC≌Rt△OND（HL），∴∠COM=∠DON，∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$．

18、(1)见解析；(2)见解析

【解析】(1)解：如图（1），线段 AE 即为△ABC 的中线；

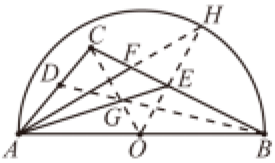


图（1）

；

根据三角形三条中线交于一点即可证明；

(2)解：如图（2），线段 AF 即为△ABC 的角平分线；



图（2）

证明：∵OA=OH，∴∠HAO=∠H，

∵点 O 是 AB 的中点，点 E 是 BC 的中点，∴OE 是△ABC 的中位线，

∴OE∥AC，∴∠CAH=∠H，∴∠CAF=∠BAF，∴AF 为△ABC 的角平分线．

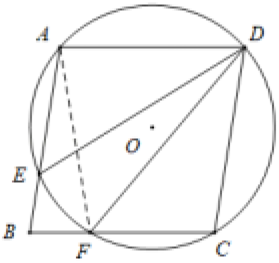
19、（1）见解析；（2）见解析．

【解析】解：（1）∵AD//BC，∴∠A+∠B＝180°，

∵DE＝DF，∴ $\overset{\frown}{DAE}=\overset{\frown}{DCF}$ ，∴ $\overset{\frown}{DAE}+\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{DCF}+\overset{\frown}{EF}$ ，∴ $\overset{\frown}{DAF}=\overset{\frown}{DCE}$ ，

∴∠A＝∠C，∴∠B+∠C＝180°，∴AB//CD；

（2）连接 AF，



∵AB//CD，AD//BC，∴四边形 ABCD 是平行四边形，∴∠B＝∠D，

∵四边形 AFCD 是圆内接四边形，∴∠AFC+∠D＝180°，

∵∠AFC+∠AFB＝180°，∴∠AFB＝∠D＝∠B，∴AB＝AF．

20、（1）∠A=48°；（2）∠A=90°$-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$．

【解析】解：（1）在△CDM 与△CBN 中，∵∠M=∠N=42°，∠MCD=∠NCB，∴∠CDM=∠CBN，

∴180°-∠CDM=180°-∠CBN，即∠ADC=∠ABC，

∵四边形 ABCD 内接于⊙O，∴∠ADC+∠ABC=180°，∴∠ABC=90°；

∵∠M =42°，∴∠A=90°-∠M=48°；

（2）∵四边形 ABCD 内接于⊙O，∴∠ADC+∠ABC=180°，∴∠MDC+∠NBC=180°，

∵∠M+∠MDC+∠MCD=180°，∠N+∠NCB+∠NBC=180°，∴∠M+∠N+∠MCD+∠NCB=180°，

又 $\angle DMC=\alpha$，$\angle BNC=\beta$，∴∠MCD+∠NCB=180°-（α+β），

∴∠BCD+∠NCM=360°-（∠MCD+∠NCB）=180°+（α+β），

∵∠BCD=∠NCM，∴∠BCD=90°+$\frac{\alpha+\beta}{2}$，

∵∠A+∠BCD=180°，∴∠A=90°-$\frac{\alpha+\beta}{2}$.

21、(1)见解析；(2)$\frac{4}{3}$

【解析】(1)解：直线 CF 与圆 O 相切，理由如下：如图所示，连接 OF，OC，

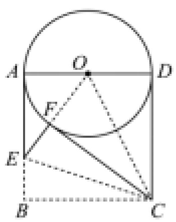
由折叠的性质可知，CF=BC，

∵四边形 ABCD 是正方形，∴CD=BC，∠ODC=90°，∴CF=CD=BC，

∵AD 是圆 O 的直径，F 在圆 O 上，∴OF=OD，

又∵OC=OC，∴△OCF≌△OCD（SSS），∴∠OFC=∠ODC=90°，

∴直线 CF 与圆 O 相切；



(2)解：∵AD 是圆 O 的直径，圆 O 的半径为 1，四边形 ABCD 是正方形，

∴AD=AB=2，∠ABC=∠BAD=90°，

由折叠的性质可知∠EFC=∠EBC=90°，EB=EF，

由（1）得∠OFC=90°，∴∠OFC+∠EFC=180°，∴O、E、F 三点共线，

设 AE=x，则 BE=AB-AE=2-x，∴OE=OF+EF=3-x，

在 Rt△AEO 中，$AE^2+OA^2=OE^2$，∴$x^2+1^2=(3-x)^2$，解得 $x=\frac{4}{3}$，

∴$AE=\frac{4}{3}$.

22、（1）见解析；（2）$\frac{15}{4}$

【解析】（1）证明：连接 OB、OC，∵AB＝AC，∴A 在 BC 的垂直平分线上

又∵OB＝OC，∴O 也在 BC 的垂直平分线上∴ $AO\perp BC$

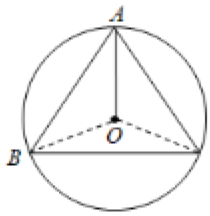
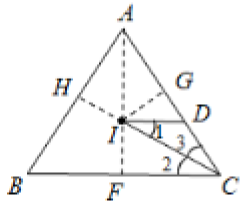


图 1

（2）连接 AI 并延长交 BC 于点 F，过点 I 分别作 $IG\perp AC$ 于点 G，$IH\perp AB$ 于点 H



∵ $AB=AC$，I 为 □ABC 的内心，∴ $AF\perp BC$，$BF=CF=6$，∴ $AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=8$

设 $IH=IF=IG=r$，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABI}+S_{\triangle BCI}+S_{\triangle ACI}$

可得：$\frac{1}{2}(10+10+12)\cdot r=\frac{1}{2}\times 12\times 8$，∴ $r=3$

设 $CF=CG=a$，则 $AH=AG=10-a$，$BF=BH=12-a$

∴ $10-a+12-a=10$，解得：$a=6$　即 $CG=6$

∵ $ID\,//\,BC$，CI 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，∴设 $ID=DC=x$，$DG=6-x$

在 Rt△IGD 中，$IG^2+GD^2=ID^2$，∴ $3^2+(6-x)^2=x^2$ 解得：$x=\frac{15}{4}$，∴ $ID=\frac{15}{4}$

23、（1）见解析；（2）$2\sqrt{3}$

【解析】解：（1）①如图 2，连接 CO，并延长 CO 交⊙O 于点 D，

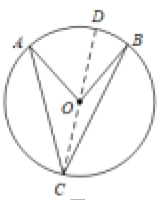


图2

∵OA=OC=OB，∴∠A=∠ACO，∠B=∠BCO，

∵∠AOD=∠A+∠ACO=2∠ACO，∠BOD=∠B+∠BCO=2∠BCO，

∴∠AOB=∠AOD+∠BOD=2∠ACO+2∠BCO=2∠ACB，∴∠ACB=$\frac{1}{2}$∠AOB；

如图 3，连接 CO，并延长 CO 交⊙O 于点 D，

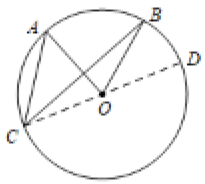


图3

∵OA=OC=OB，∴∠A=∠ACO，∠B=∠BCO，

∵∠AOD=∠A+∠ACO=2∠ACO，∠BOD=∠B+∠BCO=2∠BCO，

∴∠AOB=∠AOD-∠BOD=2∠ACO-2∠BCO=2∠ACB，∴∠ACB=$\frac{1}{2}$∠AOB；

（2）如图4，连接 OA，OB，OP，

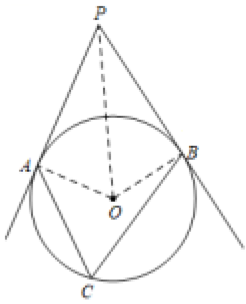


图4

∵∠C=60°，∴∠AOB=2∠C=120°，

∵PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B，

∴∠OAP=∠OBP=90°，∠APO=∠BPO=$\frac{1}{2}$∠APB=$\frac{1}{2}$（180°-120°）=30°，

∵OA=2，∴OP=2OA=4，

∴PA= $\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.