

# 备战 2023 年中考考前冲刺全真模拟卷（徐州）

## 数学试卷

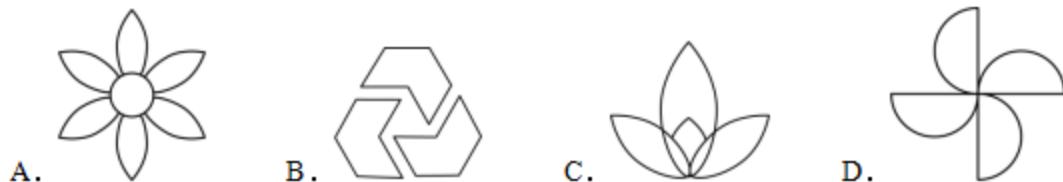
本卷满分 140 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。每小题只有一个选项是符合题意的）

1. 在有理数  $-|-1|$ , 0,  $-\frac{1}{2^2}$ ,  $(-1)^{2021}$  中，负数的个数为（ ）

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

2. 下面的图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



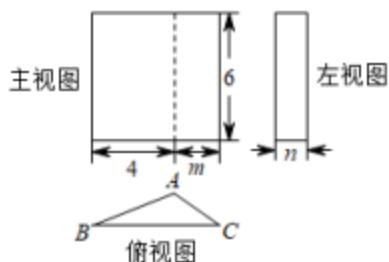
3. 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  中自变量  $x$  的取值范围是（ ）

- A.  $x \geq 0$       B.  $x > 1$       C.  $x \geq 1$       D.  $x \neq 0$

4. 计算： $(-a^2)^3 \cdot a^3$  结果为（ ）

- A.  $-a^9$       B.  $a^9$       C.  $-a^8$       D.  $a^8$

5. 某三棱柱的三视图如图所示，已知俯视图中  $\tan B = \frac{1}{2}$ ,  $BC = 7$ ，下列结论不正确的是（ ）



- A.  $m = 3$       B.  $n = 2$       C.  $\tan C = \frac{3}{2}$       D.  $S_{\triangle ABC} = 7$

6. 下表记录了 4 名队员几次游泳选拔赛成绩的平均数与方差，其中游得快又发挥稳定的是（ ）

	队员 1	队员 2	队员 3	队员 4
平均数 $\bar{x}$ (秒)	51	50	51	50
方差 $s^2$	3.5	3.5	14.5	15.5

- A. 队员 1      B. 队员 2      C. 队员 3      D. 队员 4

7.如图是一个以\_\_\_\_\_的正方形网格为背景的飞镖游戏板，其中灰色六边形的顶点都在格点上，随意向其投掷一枚飞镖，则飞镖落在游戏板中任何一个点上的机会都相等，那么飞镖落在灰色区域上的概率为（ ）

- A.      B.      C.      D.

8.如图，在矩形\_\_\_\_\_中，点\_\_\_\_\_是边\_\_\_\_\_的三等分点\_\_\_\_\_，点\_\_\_\_\_是边\_\_\_\_\_的中点，线段\_\_\_\_\_，与对角线\_\_\_\_\_分别交于点\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_.设矩形\_\_\_\_\_的面积为\_\_\_\_\_，则以下4个结论中：①\_\_\_\_\_；②\_\_\_\_\_；③\_\_\_\_\_；④\_\_\_\_\_.正确的结论有（ ）

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

二、填空题（本大题共10小题，每小题3分，共30分。）

9.因式分解：\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

10.将等边三角形、正方形、正五边形按如图所示的位置摆放，如果 $\angle 1=41^\circ$ ， $\angle 2=51^\circ$ ，那么 $\angle 3$ 的度数等于\_\_\_\_\_。

11.一元二次方程\_\_\_\_\_的一个根为\_\_\_\_\_，则另一个根为\_\_\_\_\_。

12.2013年12月2日，“嫦娥三号”从西昌卫星发射中心发射升空，并于12月14日在月球上成功实施软着陆。月球距离地球平均为384401000米，用四舍五入法取近似值，精确到百万位，并用科学计数法表示，其结果是\_\_\_\_\_米。

13.如图,已知 是 的直径, 为 上两点,若 ,则 的度数为\_\_\_\_\_.

14.如图,从一张腰长为 ,顶角为 的等腰三角形铁皮 中剪出一个最大的扇形 ,用剪下的扇形铁皮围成一个圆锥的侧面(不计损耗),则该圆锥底面半径为\_\_\_\_\_cm.

15.关于 的一元二次方程 有两个不相等的实数根,请写出一个合适的 的值\_\_\_\_\_.

16.如图,正方形 的边长为 4,点 是 边上一点, ,将线段 绕点 旋转,使点 落在直线 上,落点记为 ,则 的长为\_\_\_\_\_.

17.如图,直线 与直线 的交点是 ,则不等式 的解集是\_\_\_\_\_.

18.如图(1),在 中,点 从点 出发向点 运动,在运动过程中,设 表示线段 的长, 表示线段 的长, 与 之间的关系如图(2)所示,则边 的长是( )

A.

B.

C.

D. 6

三、解答题（本大题共 10 小题，共 86 分。）

19. (10 分) 计算：

(1)

；

(2)

。

20. (10 分) (1) 解方程组：\_\_\_\_\_； (2) 解不等式组：\_\_\_\_\_。

21. (7 分) 2022 年 3 月 23 日 15:40，“天宫课堂”第二课开讲，本次太空授课活动同样采取天地对话方式进行，在约 45 分钟的授课中，神舟十三号飞行乘组生动演示了微重力环境下太空“冰雪”实验、液桥演示实验、水油分离实验、太空抛物实验。为弘扬科学精神，传播航天知识、感悟榜样精神与力量。学校教务处决定开展“飞天梦永不失重，科学梦张力无限”的主题活动，包含了以下四个内容：①. 书写观后感；②. 演示科学实验；③. 绘制手抄报；④. 开展主题班会。王老师在四张完全相同的卡片上分别写了 ①，②，③，④，然后背面朝上放置，搅匀后要求：

(1) 小强从中随机抽取一张卡片是“书写观后感”的概率是\_\_\_\_\_。

(2) 由九年级一名学生代表从中随机抽取两张，请用列表或画树状图的方法，求九年级代表抽到的主题卡片中一个是演示科学实验 另一个是开展主题班会 的概率。

22. (7 分) 习近平总书记指出，中华优秀传统文化是中华民族的“根”和“魂”，是最深厚的文化软实力，为了大力弘扬中华优秀传统文化，某校决定开展名著读书活动，用 3400 元购买“四大名著”若干套后，发现这批图书满足不了学生的阅读需求，图书管理员在购买第二批时正赶图书城 8 折销售该套书，于是用 3200 元购买的套数反而比第一批多 3 套。

(1) 求第一批购买的“四大名著”每套的价格是多少元？

(2)该校共购买“四大名著”多少套?

23. (8分)如图,在平行四边形 中,对角线 , 相交于点 ,点 在 上,且 .

(1)求证: ;

(2)不添加辅助线,请你补充一个条件,使得四边形 是菱形;并给予证明.

24. (8分)如图,四边形 是 的内接四边形,且对角线 为 的直径,过点 作 ,与 的延长线交于点 ,且 平分 .

(1)求证: 是 的切线;

(2)若 的半径为 5, , 求 的长.

25. (7分)甲、乙两人 5 场 10 次投篮命中次数如图:

(1)根据图形填表:

	平均数	众数	中位数	方差
甲	8		8	0.4
乙	8	9		3.2

- (2)①教练根据这 5 个成绩, 选择甲参加投篮比赛, 理由是什么?  
 ②如果乙再投篮 1 场, 命中 8 次, 那么乙的投篮成绩的方差将会怎样变化? (“变大”“变小”或“不变”)

26. (8 分) 如图, 一楼房 后有一假山 , 的坡度为 , 山坡坡面上  $E$  点处有一休息亭, 测得假山山脚与楼房水平距离 米, 与亭子距离 米, 小丽从楼房房顶  $A$  处测得  $E$  的俯角为 .

- (1)求点  $E$  到水平地面的距离.  
 (2)求楼房 的高 (精确到 米. 参考数据: , , ).

27. (9 分) 规定: 在平面直角坐标系中, 横坐标与纵坐标均为整数的点, 叫做整点, 点 在反比例函数 的图象上;

- (1) ;  
 (2)已知 , 过点 、  $D$  点 作直线交双曲线 于  $E$  点, 连接  $OB$ , 若阴影区域

(不包括边界) 内有 4 个整点, 求  $b$  的取值范围.

28. (12 分) 定义: 若一个四边形能被其中一条对角线分割成两个相似三角形, 则称这个四边形为“和谐四边形”, 这条对角线叫“和谐线”.

(1) 如图 1, 在 的正方形网格中, 有一个网格 和两个网格四边形 与四边形 , 其中是被 分割成的“和谐四边形”的是\_\_\_\_\_.

(2) 如图 2, 平分 , , 四边形 是被 分割成的“和谐四边形”, 求 长;

(3) 如图 3,  $A$  为抛物线 的顶点, 抛物线与 轴交于点  $B$ ,  $C$ . 在线段 上有一个点 , 在射线 上有一个点  $Q$ .  $P$ 、 $Q$  两点分别以 个单位/秒, 5 个单位/秒的速度同时从 出发分别沿  $BA$ ,  $BC$  方向运动, 设运动时间为 , 当其中一个点停止运动时, 另一个点也随之停止运动. 在第一象限的抛物线上是否存在点 , 使得四边形 是以 为和谐线分割的“和谐四边形”, 若存在, 请直接写出 的值; 若不存在, 请说明理由.

## 参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。每小题只有一个选项是符合题意的）

1、C

【解析】 $\pi$  是负数，

0 既不是正数也不是负数，

是负数，

是负数。

故选 C.

2、A

【解析】解：A. 该图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故此选项符合题意；

B. 该图形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，故此选项不合题意；

C. 该图形不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项不合题意；

D. 该图形既是中心对称图形，不是轴对称图形，故此选项不合题意；

故选：A.

3、B

【解析】解：根据题意得：

解得：

故选：B.

4、A

【解析】解：

故选：A.

5、C

【解析】解：由题意可知，这个三棱柱的高为 6，

，  
，  
，

，故选项 A 结论正确，不符合题意；

，  
，  
，

，即  
，故选项 B 结论正确，不符合题意；

在 中，

因此选项 C 结论不正确，符合题意；

俯视图三角形的底边 为 7，高 为 2，

所以 ，

因此选项 D 结论正确，不符合题意.

故选：C.

6、B

【解析】解： ，

∴游得快又发挥稳定的是队员 1，

故选 B.

7、B

【解析】解：灰色部分的面积为：4，总面积为：12，

∴落在灰色区域上的概率为： ，

故选：B.

8、D

【解析】解： ∵四边形 是矩形，

∴∠A=∠B=∠C=∠D=90°，AB=CD，AD=BC，

∵点 E 是边 AB 的三等分点，点 F 是边 BC 的中点，

∴AE=EB=BF=FC，

设 AE=x，则 EB=BF=FC=2x，AD=BC=3x，

∴AE=EB=BF=FC=2x，故①②正确；

∵AE=EB=BF=FC，∠A=∠B=∠C=∠D=90°，同理可得：AD=BC=3x，

∴AE=EB=BF=FC=2x，AD=BC=3x，故③④正确；

设  $\angle A = \alpha$ , 则  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $\angle D = \delta$ ,  $\angle E = \epsilon$ .  
 $\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 180^\circ$ , 故③④正确;  
故选D.

二、填空题(本大题共10小题,每小题3分,共30分.)

9、

【解析】根据完全平方公式  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  进行因式分解为:

故答案为 .

10、 $10^\circ$

【解析】等边三角形的内角的度数是  $60^\circ$ , 正方形的内角度数是  $90^\circ$ , 正五边形的内角的度数是:  $(5-2) \times 180^\circ = 108^\circ$ , 则  $\angle 3 = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 108^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 10^\circ$ .

故答案为  $10^\circ$ .

11、2

【解析】解: 设方程 的两根为 , ,

则有: ,

故答案为: .

12、

【解析】解: .

故答案为: .

13、

【解析】如图,连接 .

$\because AB$  是直径,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ .

$\therefore \angle A = \angle B$ .

故答案为: .

14、1

【解析】解：如图，过 $O$ 作 $\perp$ 于 $E$ ，

$\therefore$ 弧 $AB$ 的长 $=\pi r=\pi \times 2=2\pi$ ， $\therefore$ 圆锥的底面圆的半径为 $1$ ，

故答案为：1.

15、 答案不唯一

【解析】解：根据题意得 $x^2+2x-8=0$ ，解得 $x_1=-4$ ，

所以当 $x=-4$ 时，方程有两个不相等的实数根.

故答案为： 答案不唯一 .

16、9或1

【解析】解：如图，正方形 $ABCD$ 中，

$\angle D=90^\circ$ ， $AD=CD=1$ ，

$\therefore AD=CD=1$ ， $\therefore$ 点 $D$ 到 $AC$ 的距离为 $1$ ，

由旋转可知： $AD=CD=CF=1$ ，

$\therefore$ 当点 $F$ 在 $CD$ 延长线上时， $CF=1$ ，

当点 $F$ 在 $AD$ 延长线上时， $CF=3$ ，

故答案为：9或1.

17、

【解析】解：直线 $y = -x + 3$ 与直线 $y = 2x - 1$ 的交点是 $(2, 1)$ ，不等式 $y < -x + 3$ 的解集为 $x > 2$ ，故答案为：

18、C

【解析】解：由图象可知： $\begin{cases} y \geq -x \\ y \leq 2x - 1 \end{cases}$ ，如图：

当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，此时 $y = 0$ ，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，

，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

故选：C.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 86 分.）

19、(1) ；(2)

【解析】(1) 解： $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 2y \end{cases}$ ；

(2)解：

20、(1) ；(2)

【解析】解：(1)  $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 2y \end{cases}$ ，

① ②，得： $y = 4$ ，解得 $y = 4$ ，将 $y = 4$ 代入①，得： $x = 6$ ，解得 $x = 6$ ，

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ ；

(2) 由 $\quad$ , 得:  $\quad$ ,

由 $\quad$ , 得:  $\quad$ ,

则不等式组的解集为 $\quad$ .

21、(1) ; (2)

【解析】(1) 解: 四张卡片完全相同,

小强从中随机抽取一张卡片是“书写观后感”的概率是 $\quad$ ,

故答案为:  $\quad$ ;

(2) 解: 画树状图如下:

由图可知, 当随机抽取两张卡片时共有 12 种等可能的情况, 其中有 2 种情况抽到的是 B 和 D,

,

因此该代表抽到的主题卡片中一个是演示科学实验 另一个是开展主题班会 的概率是 .

22、(1)200 元; (2)37 套

【解析】(1) 解: 设第一批购买的“四大名著”每套的价格为 元, 则第二批购买的“四大名著”每套的价格为 元,

依题意得:  $\quad$ ,

解得:  $\quad$ ,

经检验,  $\quad$  是原方程的解,

答: 第一批购进的“四大名著”每套的价格是 200 元;

(2) 由(1)得:  $\quad$  (套),

$\quad$  (套),

$\quad$  (套).

答: 该校共购进“四大名著”37 套.

23、(1)见解析; (2)补充:  $\quad$ , 证明见解析.

【解析】(1) 解: 四边形  $\quad$  是平行四边形,

， $\angle A = \angle C$ ，

，

在 和 中，

，

；

(2) 补充的条件是： ．

证明：四边形 是平行四边形， ， ，

， ， 四边形 是平行四边形，

又 ，

四边形 是菱形．

24、(1)见解析；(2) 的长是 ．

【解析】(1) 证明：如图，连接 ，

∴ 平分 ， ∴ ．

∴ 平分 ， ∴ ．

又 ∵ ， ∴ ．

∴ ， ∴ 是 的切线；

(2) 解：过点 作 于 ．

∴ ， ∴ 四边形 是矩形， ∴ ．

∴ ， ∴ ．

在 中， ， ∴ ．

在 中， ， ∴ 的长是 ．

25、(1)见解析；(2)①见解析； ②变小

【解析】(1) 解：甲 5 次的成绩是：8, 8, 7, 8, 9；

则众数为 8；

乙 5 次的成绩是：5, 9, 7, 10, 9；

则中位数为 9；

填表如下：

	平均数	众数	中位数	方差
甲	8	8	8	0.4
乙	8	9	9	3.2

(2) 解：① ∵  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 8$ ，

∴ 甲的成绩稳定，故选甲；

② 乙再投篮 1 场，命中 8 次的方差为

，

所以乙的投篮成绩的方差将会变小.

26、(1) 8 米；(2)  $\frac{1}{2}$  米.

【解析】(1) 解：如图，过点 E 作  $AB \perp EF$  于点 F，

∴  $\angle AFB = 90^\circ$ ，即  $EF \perp AB$ ，

∴  $\tan A = \frac{EF}{AF} = \frac{8}{AF}$ ，即  $\frac{8}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得： $AF = 8\sqrt{3}$  米，

即点 E 到水平地面的距离 8 米；

(2) 解：过点 E 作  $AB \perp EG$  于点 G，则  $EG = AF = 8\sqrt{3}$  米，

由(1)得： $EF = 8\sqrt{3}$  米，∴  $EG = EF - GF = 8\sqrt{3} - 8$  米，

在  $Rt\triangle EGF$  中， $\tan G = \frac{EF}{GF} = \frac{8}{GF}$ ，即  $\frac{8}{GF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得： $GF = 8\sqrt{3}$  米，

∴  $EG = 8\sqrt{3} - 8$  米，

即楼房  $E$  的高  $8\sqrt{3} - 8$  米.

27、(1)  $y = \frac{1}{x}$ ；(2)  $y = \frac{1}{x}$ .

【解析】(1) 解：∵ 点  $(-1, -1)$ 、 $(1, 1)$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上，

∴  $k = -1$ ， $k = 1$ ，∴  $k = \pm 1$ ，

故答案为：4；

(2) 解：设直线 $y=mx+b$ 的解析式为 $y=mx+b$ ，

$\therefore$ 直线 $y=mx+b$ 过点 $(0, 1)$ ， $(1, 0)$ ，

$\therefore$ 直线 $y=mx+b$ 的解析式为 $y=-x+1$ ，

如图，当直线 $y=mx+b$ 在点 $(0, 1)$ 和点 $(1, 0)$ 之间时，阴影区域(不包括边界)内有4个整点，

当 $y=mx+b$ 经过点 $(0, 1)$ 时， $1=b$ ，解得 $b=1$ ；

当 $y=mx+b$ 经过点 $(1, 0)$ 时， $0=m+b$ ，解得 $b=-m$ ；

若阴影区域(不包括边界)内有4个整点，则 $b$ 的取值范围是 $-1 \leq b < 0$ 。

28、(1)四边形 $ABCE$ ；(2) $ABCE$ 或 $ACBE$ ；(3) $ABCE$ ， $ACBE$ ， $ACEB$ 。

【解析】(1)解： $\because$ 由题意：

由勾股定理得： $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ， $BC^2 = BE^2 + CE^2$ ，

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + BE^2 + CE^2 = AE^2 + CE^2 + 2BE^2$$

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是“和谐四边形”，

$\because$ 四边形 $ABCE$ 与 $ABCD$ 不相似， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不是“和谐四边形”，

故答案为：四边形 $ABCE$ ；

(2)  $\because$ 四边形 $ABCE$ 为被 $BD$ 分割的和谐四边形， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与 $CEBD$ 相似，

若 $AB : CD = AD : BE$ ，则 $AB : CD = AD : BE$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与 $CEBD$ 相似；

若 $AB : BE = AD : CD$ ，则 $AB : BE = AD : CD$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与 $CEBD$ 相似；

综上所述： $AB : CD = AD : BE$ 或 $AB : BE = AD : CD$ ；

(3) 存在，四边形 $ABCE$ 是以 $BD$ 为和谐线的和谐四边形的时间 $t$ 的值为： $0 < t < 1$ ， $1 < t < 2$ ， $2 < t < 3$ 。

；

理由如下： $\because P, Q$  两点分别以 1 个单位/秒，5 个单位/秒的速度，

$\therefore$  设运动时间为  $t$ ， $\therefore \angle A = \angle D$ ，

$\therefore$  点  $P$  在  $AB$  上，点  $Q$  在  $CD$  上， $\therefore AP = t$ ， $DQ = 5t$ ，

$\therefore$   $BP = 6 - t$ ， $CQ = 10 - 5t$ ， $\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{DQ}{CQ}$ ，

$\therefore$  四边形  $PBCQ$  是以  $AB$  为和谐线的和谐四边形， $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCB$ ， $\therefore \angle B = \angle C$ ，即  $\angle B = 90^\circ$ ，

①若  $t = 1$  时，且  $AB$  与  $DC$  是对应边，作  $\triangle ABC$ ，作  $\triangle DCB$ ，如图 3

$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $DC = 10$ ， $BC = 8$ ，

$\therefore$  四边形  $PBCQ$  是平行四边形， $\therefore BP = CQ$ ， $BC = PQ$ ，

$\therefore 6 - t = 10 - 5t$ ， $\therefore t = 1.6$ ，

$\therefore AP = 1.6$ ， $DQ = 8$ ， $BP = 4.4$ ， $CQ = 4.4$ ，

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{DQ}{CQ} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCB$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$  点  $M$  在抛物线上， $\therefore M(1.6, 4.4)$ ，

②若  $t = 2$  时，且  $AB$  与  $DC$  是对应边，作  $\triangle ABC$ ，作  $\triangle DCB$ ，如图 4

- ②若  $\angle A = \angle D$ , 即  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ , 则  $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$ , 且  $\angle A = \angle D$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ , 且  $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.
- ③若  $\angle A = \angle D$ , 与  $\angle C$  是对应边, 过点  $P$  作  $PF \perp AD$ ,  
 $\therefore \angle F = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A + \angle F = 180^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle F = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$ , 且  $\angle A = \angle D$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形, 且  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且点  $M$  在抛物线上,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.
- ④若  $\angle A = \angle D$ , 与  $\angle C$  是对应边, 过点  $M$  作  $MF \perp AD$ , 过点  $P$  作  $PF \perp BC$ , 延长  $MF$  交  $BC$  于  $F$ , 过点  $Q$  作  $QE \perp BC$  于  $E$ .
- $\therefore \angle F = 90^\circ$ ,  
又  $\because \angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle F = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A + \angle F = 180^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle F = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$ , 且  $\angle A = \angle D$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形, 且  $\angle A = 90^\circ$ .

在抛物线  $y = x^2$  上，点  $P$  在第一象限，且点  $M$  在抛物线上， $M$  在  $P$  的上方， $M$  在  $Q$  的右侧， $M$  在  $P$  与  $Q$  的中点的下方。

综上所述：使得四边形  $PQMN$  是以  $PQ$  为和谐线的和谐四边形的时间  $t$  的值为： $\frac{1}{2}$ ， $\frac{3}{2}$ ， $\frac{5}{2}$ ， $\frac{7}{2}$ 。