备战2023年中考考前冲刺全真模拟卷（南京）

数学试卷

本卷满分120分，考试时间120分钟。

一、选择题（本大题共6小题，每小题2分，共12分．每小题只有一个选项是符合题意的）

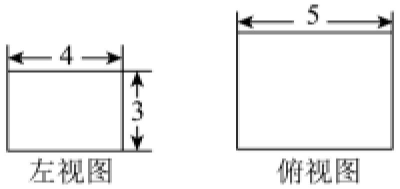
1. KN95型口罩能过滤空气中95%的粒径约为0.0000003 m的非油性颗粒．用科学记数法表示0.0000003是（　）

A．0.3×10^{-6}　　B．0.3×10^{-7}　　C．3×10^{-6}　　D．3×10^{-7}

2.计算$\left(a^{3}\right)^{2}\cdot a^{-2}$ 的结果是（　）

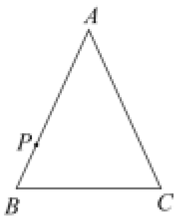
A．a^{7}　　B．a^{4}　　C．a^{3}　　D．a^{-12}

3.一个长方体的左视图、俯视图及相关数据如图所示，则其主视图的面积为（　）



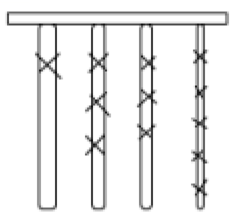
A．12　　B．15　　C．20　　D．60

4.如图，在□ABC中，$AB=AC$，$\angle A=55^\circ$，P是AB上的一个动点，则$\angle APC$的度数可能是（　）



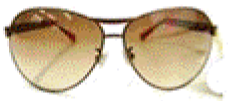
A．55°　　B．62°　　C．120°　　D．130°

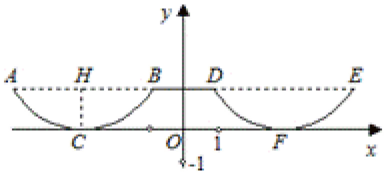
5.在古代，人们通过在绳子上打结来计数．即“结绳计数”．当时有位父亲为了准确记录孩子的出生天数，在粗细不同的绳子上打结（如图），由细到粗（右细左粗），满七进一，那么孩子已经出生了（　）



A．1335天　　B．516天　　C．435天　　D．54天

6.如图是一副眼镜镜片下半部分轮廓对应的两条抛物线关于y轴对称．$AB\parallel x$轴，$AB=4\text{cm}$，最低点C在x轴上，高$CH=1\text{cm}$，$BD=2\text{cm}$.则右轮廓线DFE的函数解析式为(　)





A．$y=\frac{1}{4}(x-3)^2$　　B．$y=\frac{1}{4}(x+3)^2$　　C．$y=-\frac{1}{4}(x+3)^2$　　D．$y=\frac{1}{4}(x-4)^2$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分．）

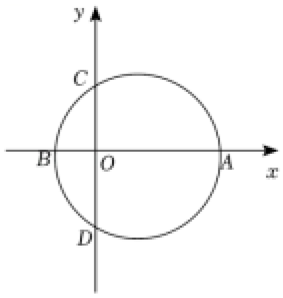
7.$\frac{1}{3}$的倒数是 ______；$\frac{1}{3}$的相反数是 ______．

8.若$\sqrt{x-8}$在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是___________．

9.计算$\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}$的结果是______．

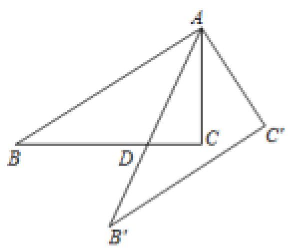
10.若关于 x 的一元二次方程 $x^2+3(m-2)x+2c-1=0$ 有两个相等的实数根，则 c 的最小值是 ______．

11.如图，在平面直角坐标系中，一个圆与两坐标轴分别交于 A、B、C、D 四点．已知 A（6，0），B（－2，0），C（0，3），则点 D 的坐标为 ______．

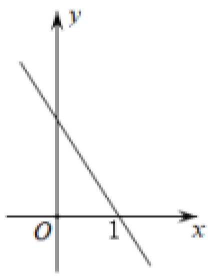


12.在△ABC 中，AC=3，BC=4，若∠C 为钝角，则 AB 的长的取值范围是______．

13.如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=6，BC=8，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转得到△$AB'C'$，点 B、C 的对应点分别为点 B'、C'，AB'与 BC 相交于点 D，当 $B'C'$∥AB 时，则 CD=________．



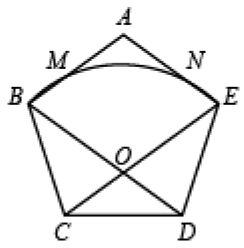
第 13 题图



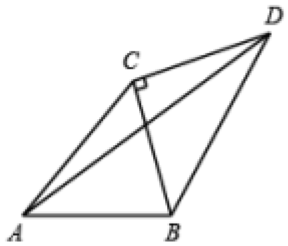
第 14 题图

14.若函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则关于 x 的不等式 $k(x-4)+b\le 0$ 的解集是________．

15.如图，在正五边形 $ABCDE$ 中，BD、CE 相交于点 O．以 O 为圆心，OB 为半径画弧，分别交 AB，AE 于点 M，N．若 BC=2，则$\overset{\frown}{MN}$的长为______（结果保留π）．



16.如图，在△ABC中，AB=2，∠ACB=60°，DC⊥BC，DC=BC，则AD的长的最大值为______.

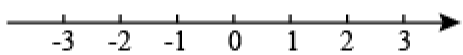


三、解答题（本大题共11小题，共88分.）

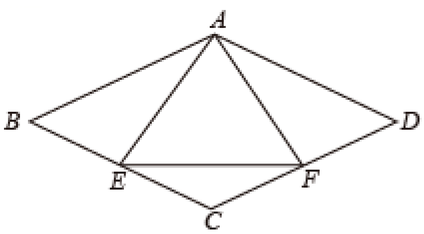
17.（7分）计算：（$\dfrac{a^2}{a-3}+\dfrac{9}{3-a}$）÷$\dfrac{a+3}{a}$.

18.（7分）解方程：$\dfrac{1-x}{x-2}=\dfrac{1}{2-x}-2$.

19.（7分）解不等式组$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ \dfrac{x+1}{2}-1<\dfrac{x}{3} \end{cases}$，并将解集在数轴上表示出来.



20.（8分）如图，在菱形$ABCD$中，E、F分别是BC、DC的中点.

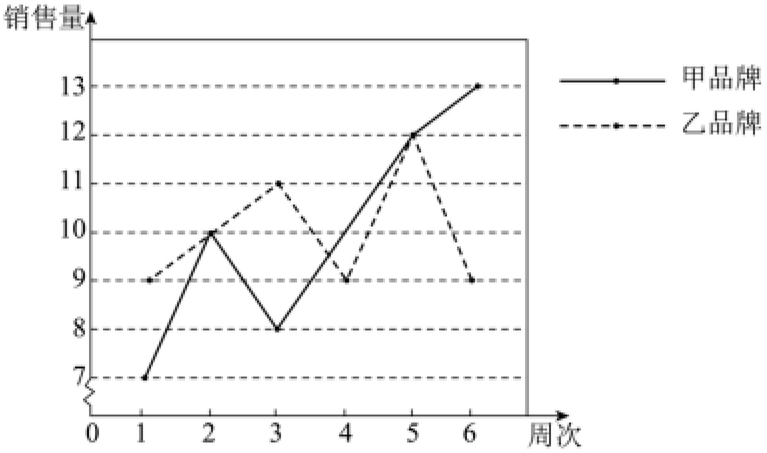


(1)求证$\angle AEF=\angle AFE$；

(2)若菱形$ABCD$的面积为8，则△AEF的面积为______.

21.（8分）某家电销售商店1~6周销售甲、乙两种品牌冰箱的数量如图所示（单位：台）：

某家电销售商店1~6周销售甲、乙两种品牌冰箱的数量如图所示



(1)甲品牌冰箱 1~6 周销售量的中位数是____，乙品牌冰箱 1~6 周销售量的众数是____.

(2)求该商店甲品牌冰箱 1~6 周销售量的平均数和方差；

(3)经过计算可知，乙品牌冰箱 1~6 周销售量的平均数是 10，方差是$\frac{4}{3}$. 根据上述数据处理的结果及折线统计图，对该商店今后采购这两种品牌冰箱的意向提出建议，并说明理由.

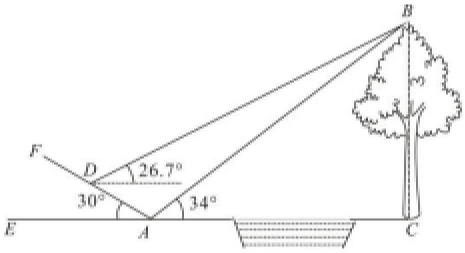
22.（8 分）南京市自 2013 年 6 月 1 日起实施“生活垃圾分类管理办法”，阳光花园小区设置了“可回收物”、“有害垃圾”、“厨余垃圾”、和“其他垃圾”四种垃圾箱，分别记为 A、B、C、D.

(1)快递包装纸盒应投入_______垃圾箱；

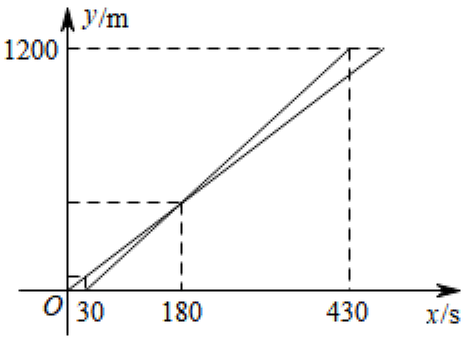
(2)小明将“弃置药品”随机投放，则她投放正确的概率是 _______；

(3)小丽将二种垃圾“废弃食物”（属于厨余垃圾，记为 C)、“打碎的陶瓷碗”（属于其他垃圾，记为 D）随机投放，求她投放正确的概率.

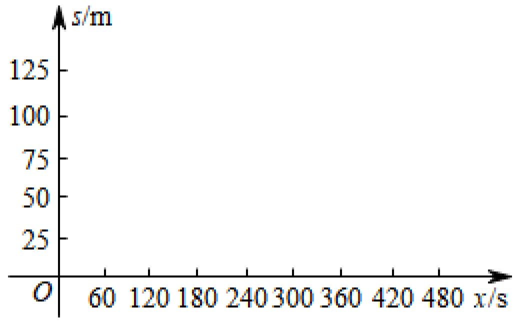
23.（8 分）如图，为了测量小河对岸大树 BC 的高度，小明在点 A 处测得大树顶端 B 的仰角为 37°，再从点 A 出发沿倾斜角为 30°的斜坡 AF 走 4m 到达斜坡上点 D，在此处测得树顶端 B 的仰角为 26.7°. 求大树 BC 的高度（精确到 0.1m).（参考数据：tan37°≈0.75，tan26.7°≈0.5，$\sqrt{3}$≈1.73.）



24.（8分）甲、乙两人从 A 地前往 B 地，先到终点的人在原地休息．已知甲先出发 $30s$ 后，乙才出发.在运动过程中，甲、乙两人离 A 地的距离分别为 y_1（单位：m）、y_2（单位：m），y_1是甲出发时间 x（单位：s）的函数，它们的图像如图①．设甲的速度为 v_1m/s，乙的速度为 v_2m/s．



①



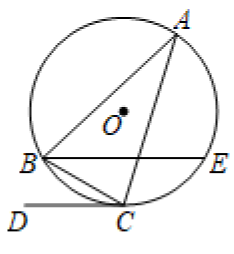
②

(1)$v_1 : v_2 =$______，$a =$______；

(2)求 y_2 与 x 之间的函数表达式；

(3)在图②中画出甲、乙两人之间的距离 s（单位：m）与甲出发时间 x（单位：s）之间的函数图像．

25.（8分）如图，已知点 A、B、C 在⊙O 上，点 D 在⊙O 外，$\angle BCD = \angle BAC$，$BE \parallel CD$ 交⊙O 于 E 点．



(1)求证：CD 是⊙O 的切线；

(2)若⊙O 的半径为 5，$\angle BAC = 30°$，求线段 BE 的长．

26.（9 分）已知二次函数$y=a(x-1)(x-1-a)$（a为常数，且$a\neq0$）.

(1)求证：该函数的图像与x轴总有两个公共点；

(2)若点$(0,y_1)$，$(3,y_2)$在函数图像上，比较y_1与y_2的大小；

(3)当$0<x<3$时，$y<2$，直接写出a的取值范围.

27.（10 分）【问题情境】

学完《探索全等三角形的条件》后，老师提出如下问题：如图①，△ABC中，若$AB=12$，$AC=8$，求BC边上中线AD的取值范围. 通过分析、思考，小丽同学形成两种解题思路.

思路 1：将△ADC绕着点D旋转$180°$，使得CD和BD重合，得到△EDB；

思路 2：延长AD到E，使得$DE=AD$，连接BE，根据SAS可证得△ADC≌△EDB；

(1)根据上面任意一种解题思路，再结合三角形三边关系，我们都可以得到AD的取值范围为

____________.

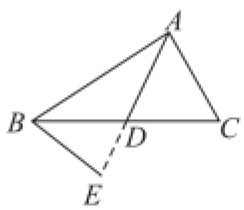
(2)【类比探究】

如图②，$DB=DE$，$DC=DA$，$\angle BDC+\angle ADE=180°$，$DF$是△$ADE$的边$AE$上的中线，试探索$DF$与$BC$的数量关系，并说明理由.

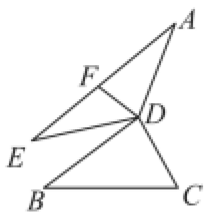
(3)【迁移应用】

【应用 1】如图③，已知⊙O的半径为 6，四边形$ABCD$是⊙O的圆内接四边形. $AD=8$，$\angle AOD+\angle BOC=180°$，求$BC$的长.

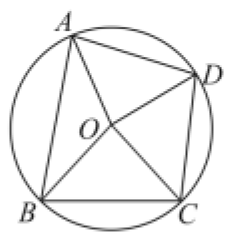
【应用 2】如图④，$DB=DE$，$DC=DA$，$\angle BDC+\angle ADE=180°$，$BD\perp DE$，$AE=a$，$BC=b(a>b)$，$AB$、$CE$相交于点$G$，连接$DG$，若$\angle BDC$的度数发生改变，请问$DG$是否存在最小值？如果存在，则直接写出其最小值（用含a和b的式子表示），如果不存在，请说明理由.



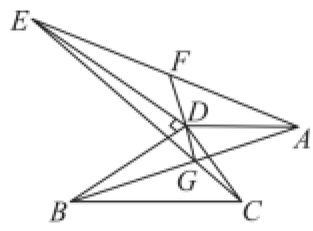
图①



图②



图③



图④

参考答案

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分．每小题只有一个选项是符合题意的）

1、D

【解析】解：$0.0000003=3?10^{-7}$，故选 D．

2、B

【解析】解：$\left(a^{3}\right)^{2}\cdot a^{-2}=a^{6}\cdot a^{-2}=a^{4}$．

故选 B．

3、B

【解析】由左视图和俯视图可得：主视图的长为 5，宽为 3，

∴主视图的面积为 $3\times5=15$，

故选 B．

4、C

【解析】∵ $AB=AC$， $\angle A=55°$，

∴ $\angle B=\angle C=62.5^{\circ}$，

∵ $\angle A+\angle APC+\angle PCA=180^{\circ}$，

∴ $62.5^{\circ}\leq\angle APC<125^{\circ}$，在这个范围的角度只有 120°

故选：C．

5、B

【解析】解：绳结表示的数为 $5\times7^{0}+3\times7+3\times7^{2}+1\times7^{3}=5+21+49\times3+7^{3}=516$

故选 B

6、B

【解析】∵高 $CH=1\text{cm}$， $BD=2\text{cm}$，且 B、D 关于 y 轴对称，

∴ D 点坐标为 $(1,1)$，

∵ $AB\,//\,x$ 轴， $AB=4\text{cm}$，最低点 C 在 x 轴上，

∴ AB 关于直线 CH 对称，

∴左边抛物线的顶点 C 的坐标为 $(-3,0)$，

∴右边抛物线的顶点 F 的坐标为 $(3,0)$，

设右边抛物线的解析式为 $y=a(x-3)^{2}$，

把 $D(1,1)$ 代入得 $1=a\times(1-3)^{2}$，解得 $a=\dfrac{1}{4}$，

∴右轮廓线 DFE 的函数解析式为 L $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$，

故选：B．

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分．）

7、3　$-\frac{1}{3}$

【解析】根据倒数与相反数的定义求解，乘积为1的两数互为倒数，和为 0 的两个数互为相反数．

【详解】解：$\frac{1}{3}$的倒数是 3；$\frac{1}{3}$的相反数是$-\frac{1}{3}$．

故答案为：3；$-\frac{1}{3}$．

8、$x\geq8$

【解析】解：由题意得：$x-8\geq0$，

解得：$x\geq8$．

故答案为：$x\geq8$．

9、$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】解：$\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{5\sqrt{2}}{2}$．

10、$\frac{1}{2}$

【解析】解：∵方程 $x^2+3(m-2)x+2c-1=0$ 有两个相等的实数根，

∴$\Delta=9(m-2)^2-8c+4=0$，

∴$(m-2)^2=\frac{8c-4}{9}$，

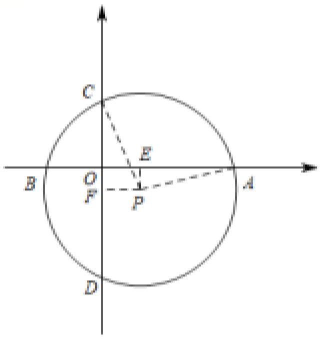
∵$(m-2)^2\geq0$，∴$\frac{8c-4}{9}\geq0$，解得：$c\geq\frac{1}{2}$，

∴c 的最小值是$\frac{1}{2}$．

故答案为：$\frac{1}{2}$．

11、$(0,-4)$

【解析】解：设圆心为 P，过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E，$PF\perp CD$ 于点 F，则 $EA=EB=\frac{AB}{2}=4$，$FC=FD$，



$\therefore OE=EB-OB=4-2=2$，$\therefore E$（2，0），

设 P（2，m），则 F（0，m），

连接 PC、PA，

在 $Rt\triangle CPF$ 中，$PC^2=(3-m)^2+2^2$，

在 $Rt\triangle APE$ 中，$PA^2=m^2+4^2$，

$\because PA=PC$，$\therefore (3-m)^2+2^2=m^2+4^2$，$\therefore m=\pm\frac{1}{2}$（舍正），

$\therefore F$（0，$-\frac{1}{2}$），$\therefore CF=DF=3-(-\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$，$\therefore OD=OF+DF=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$，

$\therefore D$（0，-4），

故答案为：（0，-4）.

12.在$\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，若$\angle C$为钝角，则AB的长的取值范围是______.

【答案】$5<AB<7$

【解析】解：在$\triangle ABC$中，若$\angle C$为直角，$AC=3$，$BC=4$，则$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$；

$\because \angle C$为钝角，两边之和大于第三边，

$\therefore 5<AB<3+4$，

$\therefore 5<AB<7$，

故答案为：$5<AB<7$.

13、$\frac{7}{4}$

【解析】设 $CD=x$，

$\because B'C'\parallel AB$，$\therefore \angle BAD=\angle B'$，

由旋转的性质得：$\angle B=\angle B'$，$AC=AC'=6$，

$\therefore \angle BAD=\angle B$，$\therefore AD=BD=8-x$，$\therefore (8-x)^2=x^2+6^2$，

$\therefore x=\frac{7}{4}$，$\therefore CD=\frac{7}{4}$，

故答案为：$\frac{7}{4}$.

14、 $x \geq 5$

【解析】解：把（1，0）代入 $y=kx+b$ 得 $k+b=0$，则 $b=-k$，

∴$k(x-4)+b \leq 0$ 化为 $k(x-4)-k \leq 0$，

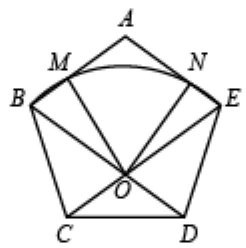
即 $kx-5k \leq 0$，∴$kx \leq 5k$

∵$k<0$，所以 $x \geq 5$，

故答案为：$x \geq 5$

15、 $\frac{2\pi}{5}$

【解析】连接 OM，ON；



∵在正五边形 $ABCDE$

∴正五边形的每个内角为：540°÷5=108°

所以∠BCD=108°，BC=CD，CD=DE

即三角形 BCD 和三角形 CDE 是等腰三角形，

∴∠ECD=∠CBD=（180°-108°）÷2=36°

∠BCO=180°-36°=72°，∠BOC=180°-72°-36°=72°，∴∠BOC=∠BCO

所以三角形 BCO 为等腰三角形，∴BC=BO=2∴∠BOE=180°-∠BOC=108°

∠ABO=108°-∠CBO-∠$CB0$=108°-36°=72°

∵OB=OM∴∠OBM=∠BMO-72°∴∠BOM=180°-∠OBM-∠OMB=180°-72°-72°

同理可得;∠NOE=36°

∴∠MON=108°-∠BOM-∠NOE=108°-36°-36°=36°

所以 $\overset{\frown}{MN}=\frac{36\pi\times 2}{180}=\frac{2\pi}{5}$

故答案为：$\frac{2\pi}{5}$

16、 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

【解析】解：过点 D 作 $DE \perp AC$ 的延长线于点 E，

∵∠ACB=60°，$DC \perp BC$，∴∠DCE=30°，

令 $CD=CB=x$，$AC=y$，则 $DE=\frac{1}{2}x$，

由勾股定理，得 $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{x^2-(\frac{1}{2}x)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$\therefore AE=AC+CE=y+\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

在 Rt△ADE 中，$AD^2=DE^2+AE^2$，$\therefore AD^2=(\frac{1}{2}x)^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$，

$\because (x-y)^2\geq 0$，$\therefore x^2+y^2-2xy\geq 0$，

即 $xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$，当 $x=y$ 时，等号成立，

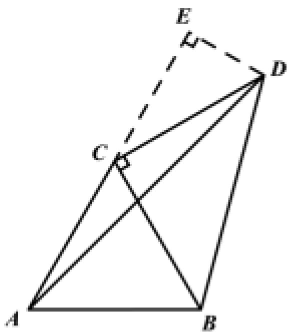
$\therefore AD^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy\leq x^2+y^2+\sqrt{3}\times\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{(2+\sqrt{3})(x^2+y^2)}{2}$

当 $x=y$ 时，AD 有最大值， 且 $AD^2=\frac{(2+\sqrt{3})(x^2+y^2)}{2}$，

$\because AB=2$，$\angle ACB=60°$，$\therefore$△ABC 为等边三角形，$\therefore$当 $x=y=2$ 时，$AD^2=\frac{(2+\sqrt{3})(2^2+2^2)}{2}=8+4\sqrt{3}$，

又 $AD>0$，$\therefore AD=\sqrt{6}+\sqrt{2}$．

故答案为：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$．



三、解答题（本大题共 11 小题，共 88 分.）

17、a

【解析】原式 $=\left(\frac{a^2}{a-3}-\frac{9}{a-3}\right)\div\frac{a+3}{a}=\frac{a^2-9}{a-3}\div\frac{a+3}{a}=(a+3)\cdot\frac{a}{a+3}=a$

18、方程无实数根．

【解析】解：方程两边同乘（$x-2$）得：

$1-x=-1-2(x-2)$，

解得：$x=2$，

检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0$，

故此方程无实数根．

19、$-1\le x<3$，见解析

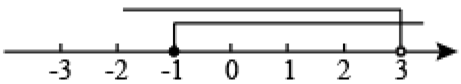
【解析】解：$\begin{cases} x+1\ge 0① \\ \dfrac{x+1}{2}-1<\dfrac{x}{3}② \end{cases}$

解不等式①，得$x\ge -1$，

解不等式②，得$x<3$，

∴原不等式组的解集为$-1\le x<3$，

∴将不等式组的解集在数轴上表示为：



20、(1)见解析；(2)3

【解析】（1）证明：∵四边形$ABCD$是菱形，

∴AB＝AD，BC＝DC，$\angle B$＝$\angle D$，

∵E、F分别是BC、DC的中点,

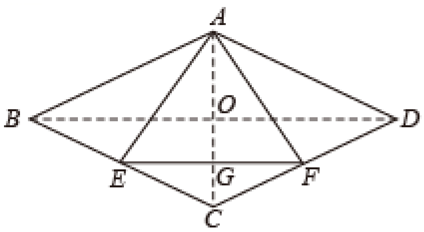
∴$BE=\dfrac{1}{2}BC$，$DF=\dfrac{1}{2}CD$，∴BE＝DF，

在△ABE和△ADF中

$\begin{cases} AB=AD \\ \angle B=\angle D \\ BE=DF \end{cases}$，

∴△ABE≌△ADF（SAS）；∴AE＝AF，∴$\angle AEF$＝$\angle AFE$．

（2）连接AC、BD，交于点O，AC交EF于点G，



∵四边形$ABCD$是菱形，∴AO＝OC，菱形ABCD的面积为：$\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=8$，

∵点E、F分别是边BC、CD的中点，∴$EF\parallel BD$，EF＝$\frac{1}{2}BD$，

∴$AC\perp EF$，AG＝$3CG$，

设AC＝a，BD＝b，∴$\dfrac{1}{2}ab=8$，即ab＝16，

$\therefore S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot AG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}b\times\frac{3}{4}a=\frac{3}{16}ab=3$．

故答案为：3

21、(1)10；9；(2)平均数是 10，方差为 $\frac{13}{3}$；(3)答案不唯一，见解析

【解析】（1）解：甲品牌的销售量分别为 7、10、8、10、12、13，

重新排列为 7、8、10、10、12、13，

处于中间的两个数都是 10，则甲品牌冰箱 1~6 周销售量的中位数是 10，

乙品牌的销售量分别为 9、10、11、9、12、9，

9 出现次数最多，则乙品牌冰箱 1~6 周销售量的众数是 9，

故答案为：10，9；

（2）解：甲品牌冰箱周销售量的平均数为=$\frac{1}{6}\times(7+10+8+10+12+13)=10$，

$S^2_{甲}=\frac{1}{6}\times[(7-10)^2+(10-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2]=\frac{13}{3}$；

（3）解：甲、乙两种品牌冰箱周销售量的平均数相同，乙品牌冰箱周销售量的方差较小，说明乙品牌冰箱销售量比较稳定，可建议商家多采购乙品牌冰箱；

从折线统计图的变化趋势看，甲品牌冰箱的周销售量呈上升趋势，可建议商家多采购甲品牌冰箱；（答案不唯一）

22、(1)A；(2)$\frac{1}{4}$；(3)$\frac{1}{16}$

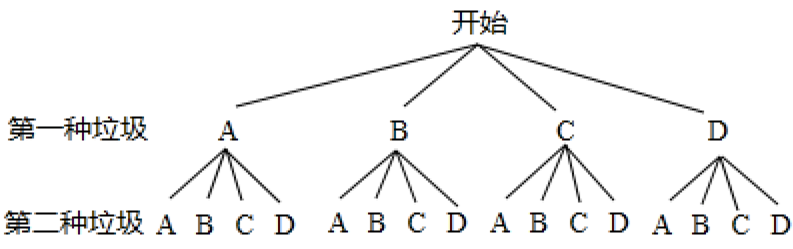
【解析】（1）解：快递包装纸盒应投入 A 垃圾箱，

故答案为：A；

（2）解：小明将“弃置药品”随机投放，则她投放正确的概率是$\frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$；

（3）解：画树状图如下：



由树状图知，共有 16 种等可能结果，其中她投放正确的只有 1 种结果，

∴她投放正确的概率为$\frac{1}{16}$．

23、11.2m

【解析】解：如图，过点 D 分别作 $DG\perp AC$，$DH\perp BC$，垂足分别为 G，H．

∴$\angle DGC=\angle DHC=\angle HCG=90°$，

∴四边形 $DGCH$ 为矩形，∴$DG=CH$，$DH=CG$，

在 $Rt\triangle ADG$ 中，$\angle DAG=30°$，$AD=4$m，

∵$\sin 30°=\dfrac{DG}{AD}$，$\cos 30°=\dfrac{AG}{AD}$，　∴$DG=AD\cdot\sin 30°=2$．　$AG=AD\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}$．

在 $Rt\triangle ABC$ 中，∵$\tan 37°=\dfrac{BC}{AC}$，∴$BC=\tan 37°\cdot AC$．

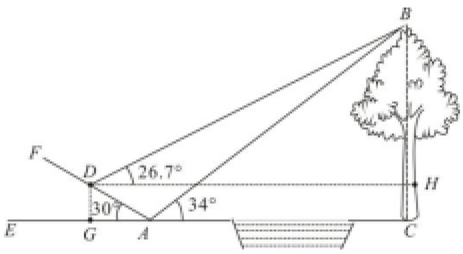
在 $Rt\triangle BDH$ 中，∵$\tan 26.7°=\dfrac{BH}{DH}$，∴ $BH=DH\tan 26.7°$ ∴$BC-2=\tan 26.7°(AC+2\sqrt{3})$．

∴$\tan 37°\cdot AC-2=\tan 26.7°(AC+2\sqrt{3})$．即 $0.75AC-2\approx 0.5(AC+2\sqrt{3})$．

∴$AC=4\sqrt{3}+8$．

∴$BC=0.75\times(4\sqrt{3}+8)=3\sqrt{3}+6\approx 11.2$m．

答：大树 BC 的高度为 11.2m．



24、(1)5:6，75；(2)$y_2=3x-90$；(3)见解析

【解析】(1)解：设甲的速度为 v_1m/s，乙的速度为 v_2m/s

根据题意得：$180v_1=(180-30)v_2$，解得 $v_1:v_2=5:6$

$\because v_2=\dfrac{1200}{430-30}=3(m/s)$，$\therefore v_1=\dfrac{5}{6}\times 3=2.5(m/s)$

$\therefore a=30\times 2.5=75$

故答案为：5:6，75

(2)解：设 y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=kx+b$

把(0,30)，(430,1200)分别代入解析式，得

$\begin{cases}30k+b=0\\430k+b=1200\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3\\b=-90\end{cases}$

故 y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=3x-90$

(3)解：由题意题意可知：

前 30s 两人之间的距离逐渐增大，最大为 75m

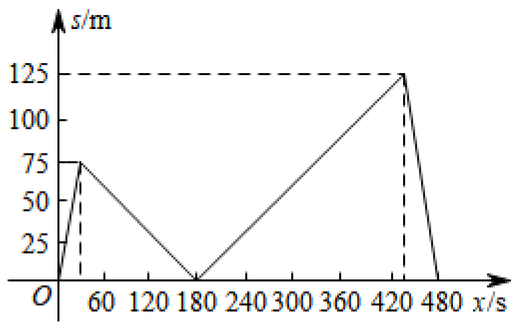
30—180s 内，两人之间的距离逐渐减小，在 180s 时，距离为 0m

180—430s 内，两人之间的距离逐渐增大，最大距离为：$1200-430\times2.5=125(m)$

甲所需的总的时间为：$\frac{1200}{2.5}=480(s)$

故 430—480s 内，两人之间的距离逐渐减小，在 480s 时，距离为 0m

画图如下：



25、(1)见解析；(2) $BE=5\sqrt{3}$

【解析】(1) 证明：连接 CO 并延长交$\odot O$于 F 点，连接 BF，

$\therefore \angle A=\angle F$，

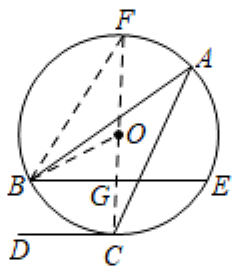
$\because \angle BCD=\angle BAC$，$\therefore \angle BCD=\angle F$，

$\because CF$ 为$\odot O$直径，$\therefore \angle CBF=90^\circ$，

$\therefore \angle F+\angle BCO=90^\circ$，$\therefore \angle BCD+\angle BCO=90^\circ$，即 $\angle DCO=90^\circ$，

$\because CF$ 是$\odot O$的直径，$\therefore CD$ 是$\odot O$的切线；

(2) 解：连接 BO，OC 交 BE 于点 G，



$\because BE\,/\!/\,CD$，$\therefore \angle OGB=\angle OCD=90^\circ$，即 $OC\perp BE$，$\therefore BE=2BG$，

$\because \angle BOC=2\angle BAC=2\times30^\circ=60^\circ$，$BO=5$，

$\therefore BG=BO\cdot\sin60^\circ=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore BE=2BG=5\sqrt{3}$．

26、(1)证明见解析

(2)当$a<0$或$a>1$时，$y_1>y_2$；当$a=1$时，$y_1=y_2$；当$0<a<1$时，$y_1<y_2$

(3)$-2\le a\le 1$，且$a\ne 0$

【解析】（1）证明：令$y=0$，

即$a(x-1)(x-1-a)=0$，

$\therefore x-1=0$或$x-1-a=0$，

即$x_1=1$，$x_2=1+a$，

$\because a\ne 0$，$\therefore 1\ne 1+a$，$\therefore$方程有两个不相等的实数根，

$\therefore$该函数的图像与x轴总有两个公共点.

（2）解：$\because$点$(0,y_1)$，$(3,y_2)$在函数图像上，$\therefore$当$x=0$时，$y_1=a^2+a$，

当$x=3$时，$y_2=-2a^2+4a$，$\therefore y_1-y_2=a^2+a-\left(-2a^2+4a\right)=3a^2-3a=3a(a-1)$，

$\therefore$当$a<0$或$a>1$时，$y_1>y_2$，

当$a=1$时，$y_1=y_2$，

当$0<a<1$时，$y_1<y_2$.

（3）$\because$二次函数$y=a(x-1)(x-1-a)$，

整理可得：$y=ax^2-a(a+2)x+a(a+1)$，

由（1）可知：当$y=0$时，解得：$x_1=1$，$x_2=1+a$，

$\therefore$二次函数的图像交x轴于$(1,0)$和$(1+a,0)$两点，

对称轴$x=-\dfrac{-a(a+2)}{2a}=\dfrac{a+2}{2}$，

当$x=\dfrac{a+2}{2}$时，$y=a\left(\dfrac{a+2}{2}-1\right)\left(\dfrac{a+2}{2}-1-a\right)=a\times\dfrac{a}{2}\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^3}{4}$，

$\therefore$二次函数图像的顶点坐标为$\left(\dfrac{a+2}{2},-\dfrac{a^3}{4}\right)$，

由（2）可知：当$x=0$时，$y_1=a^2+a$，

当$x=3$时，$y_2=-2a^2+4a$，

当$a>0$时，二次函数的图像开口向上，$\because 0<x<3$，$\therefore\begin{cases}a^2+a\le 2\\-2a^2+4a\le 2\end{cases}$，

解得：$-2\le a\le 1$，∴$0<a\le 1$，

当$a<0$时，二次函数图像开口向下，

∵对称轴$x=\frac{a+2}{2}$，当$0<\frac{a+2}{2}<3$，即$-2<a<0$时，

∴二次函数图像在顶点处取得最大值，∴$-\frac{a^2}{4}<2$，解得：$a>-2$，∴$-2<a<0$，

当$\frac{2+a}{a}\le 0$,即$a\le -2$,

由题意可知，$a^2+a\le 2$,解得：$-2\le a\le 1$,即$a=-2$;

综上所述，当$0<x<3$时，$y<2$，a的取值范围是：$-2\le a\le 1$，且$a\ne 0$．

27、(1)$2<AD<10$；(2) $BC=2DF$，见解析

(3)$4\sqrt{5}$；存在最小值，其最小值为$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

【解析】（1）解：延长AD到E，使得$DE=AD$，连接BE，如图①，∴$AE=2AD$，

在$\triangle ADC$和$\triangle EDB$中，

$$\begin{cases}AD=ED\\ \angle ADC=\angle EDB\\ CD=BD\end{cases},$$

∴$\triangle ADC\cong\triangle EDB(\mathrm{SAS})$，∴$AC=EB=8$．

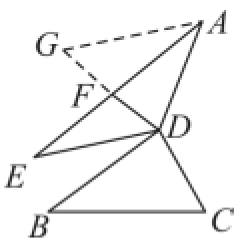
∵$AB-BE<AE<AB+BE$，∴$12-8<2AD<12+8$，∴$2<AD<10$．

故答案为：$2<AD<10$；

（2）解：DF与BC的数量关系为：$BC=2DF$．

理由如下：

延长DF至点G，使$FG=DF$，连接AG，如图，



则$DG=2DF$．

∵DF是$\triangle ADE$的边AE上的中线，∴$EF=AF$，

在$\triangle DEF$和GAF中，

$\begin{cases} EF=AF \\ \angle EFD=\angle AFG \\ DF=GF \end{cases}$，$\therefore \triangle DEF\cong\triangle GAF(\mathrm{SAS})$，$\therefore DE=GA$，$\angle E=\angle GAF$，

$\therefore DE\parallel AG$，$\therefore \angle ADE+\angle GAD=180^\circ$．

$\because \angle BDC+\angle ADE=180^\circ$，$\therefore \angle BDC=\angle GAD$．

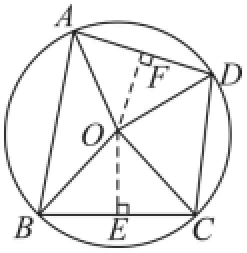
$\because DB=DE$，$\therefore DB=AG$．

在$\triangle BDC$和$\triangle GAD$中，

$\begin{cases} DB=AG \\ \angle BDC=\angle GAD \\ DC=AD \end{cases}$，

$\therefore \triangle BDC\cong\triangle GAD(\mathrm{SAS})$，$\therefore BC=GD$．$\therefore BC=2DF$．

（3）解：应用1：过点O作$OE\perp BC$于点E，$OF\perp AD$于点F，如图，



则$BE=EC=\frac{1}{2}BC$，$AF=DF=\frac{1}{2}AD=4$．

$\because OB=OC$，$OE\perp BC$，$\therefore \angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\because OA=OD$，$OF\perp AD$，$\therefore \angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOD$．

$\because \angle AOD+\angle BOC=180^\circ$，$\therefore \angle AOF+\angle BOE=90^\circ$．

$\because \angle OBE+\angle BOE=90^\circ$，$\therefore \angle OBE=\angle AOF$．

在$\triangle BOE$和$\triangle OAF$中，

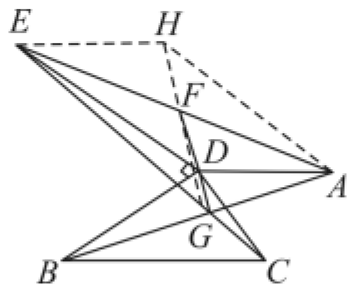
$\begin{cases} \angle OBE=\angle AOF \\ \angle OEB=\angle AFO=90^\circ \\ OB=AO \end{cases}$，$\therefore \triangle BOE\cong\triangle OAF(\mathrm{AAS})$，$\therefore OE=AF=4$，

$\therefore BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$．$\therefore BC=2BE=4\sqrt{5}$；

应用2：DG存在最小值，其最小值为$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$，

理由如下：

取AE的中点F，连接FG，延长DF至点H，使$FH=DF$，连接EH，AH，如图，



$\because BD \perp DE$，$\therefore \angle BDE = 90^\circ$．

$\because \angle BDC + \angle ADE = 180^\circ$，$\therefore \angle ADC + \angle BDE = 180^\circ$，$\therefore \angle BDE = \angle ADC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BDE + \angle BDC = \angle ADC + \angle BDC$，即 $\angle EDC = \angle BDA$．

在$\triangle EDC$和$\triangle BDA$中，

$$\begin{cases} ED = BD \\ \angle EDC = \angle BDA \\ DC = DA \end{cases}$$，$\therefore \triangle EDC \cong \triangle BDA(\mathrm{SAS})$，$\therefore \angle DEC = \angle DBA$，

∴点 E，D，G、B 四点共圆，$\therefore \angle EGB = \angle EDB = 90^\circ$，$\therefore \angle AGE = 90^\circ$，

∵F为 AE的中点，∴ $GF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}a$．

$\because AF = FE$，$DF = FH$，∴四边形 $ADEH$ 为平行四边形，

$\therefore AD = EH$，$AD /\!/ EH$，$\therefore \angle HED + \angle ADE = 180^\circ$．

$\because \angle BDC + \angle ADE = 180^\circ$，$\therefore \angle HED = \angle BDC$．Q $DA = DC$，$\therefore EH = DC$．

在$\triangle EHD$和$\triangle DCB$中，

$$\begin{cases} ED = DB \\ \angle HED = \angle CDB \\ EH = DC \end{cases}$$，

$\therefore \triangle EHD \cong \triangle DCB(\mathrm{SAS})$，$\therefore DH = BC = b$，$\therefore DF = \frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}b$．

$\therefore$若 $\angle BDC$ 的度数发生改变，当点 G，D，F 三点在一条直线上时，DG的值最小为：

$FG - FD = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$．