备战2023年中考考前冲刺全真模拟卷（南京）

数学试卷

本卷满分120分，考试时间120分钟。

一、选择题（本大题共6小题，每小题2分，共12分．每小题只有一个选项是符合题意的）

1.某正方形广场的边长为$4\times10^{2}\text{m}$，其面积用科学记数法表示为（　）

A．$4\times10^{4}\text{m}^{2}$　　B．$16\times10^{4}\text{m}^{2}$　　C．$1.6\times10^{5}\text{m}^{2}$　　D．$1.6\times10^{4}\text{m}^{2}$

2.下列正确的是（　）

A．$\sqrt{4+9}=2+3$　　B．$\sqrt{4\times9}=2\times3$　　C．$\sqrt{9^{4}}=\sqrt{3^{2}}$　　D．$\sqrt{4.9}=0.7$

3.如果$x<y$，那么下列不等式正确的是（　）

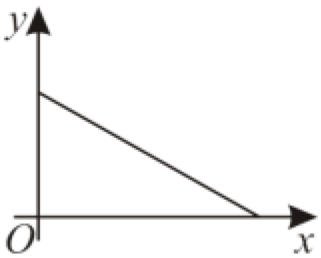
A．$2x<2y$　　B．$-2x<-2y$　　C．$x-1>y-1$　　D．$x+1>y+1$

4.下面的三个问题中都有两个变量：

①汽车从A地匀速行驶到B地，汽车的剩余路程y与行驶时间x；

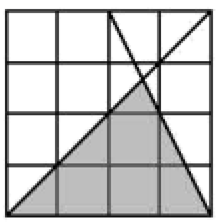
②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量y与放水时间x；

③用长度一定的绳子围成一个矩形，矩形的面积y与一边长x，其中，变量y与变量x之间的函数关系可以利用如图所示的图象表示的是（　）



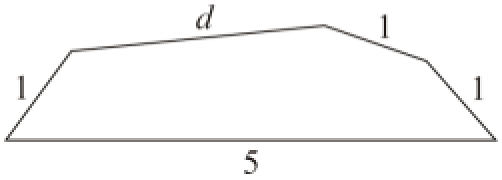
A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

5.如图，若方格纸中每个小正方形的边长均为1，则阴影部分的面积为（　）



A．5　　B．6　　C．$\frac{16}{3}$　　D．$\frac{17}{3}$

6.平面内，将长分别为1，5，1，1，d的线段，顺次首尾相接组成凸五边形（如图），则d可能是（　）



A．1　　　　　B．2　　　　　C．7　　　　　D．8

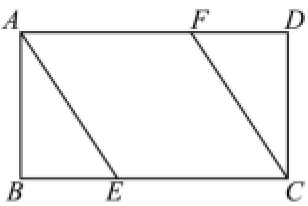
二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分.）

7.计算：$\sqrt[3]{8}=$______.

8.使代数式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是______.

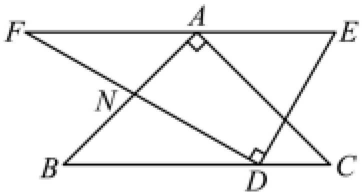
9.已知 $x+y=4$，$x-y=6$，则 $x^2-y^2=$______.

10.如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在 BC,AD 上，$AF=EC$．只需添加一个条件即可证明四边形 $AECF$ 是菱形，这个条件可以是__________（写出一个即可）.

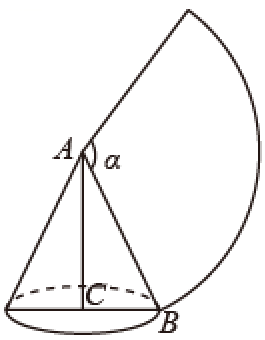


11.请写出一个函数的表达式，使其图像分别与 x 轴的负半轴、y 轴的正半轴相交：________.

12.将一副直角三角板如图放置，已知 $\angle E=60°$，$\angle C=45°$，$EF\parallel BC$，则 $\angle BND=$________°.

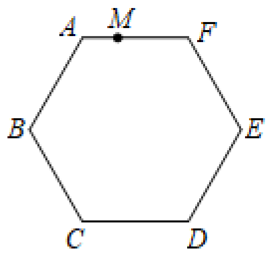


13.如图，圆锥的母线 $AB=6$，底面半径 $CB=2$，则其侧面展开图扇形的圆心角α=______.

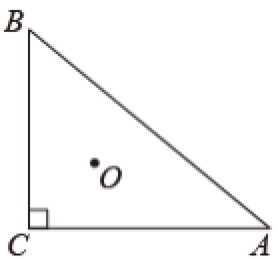


14.把二次函数 $y=x^2+4x+m$ 的图像向上平移 1 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度，如果平移后所得抛物线与坐标轴有且只有一个公共点，那么 m 应满足条件：________.

15.如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=6$，点 M 在边 AF 上，且 $AM=2$．若经过点 M 的直线 l 将正六边形面积平分，则直线 l 被正六边形所截的线段长是_____.



16.如图上，ΔABC中,$\angle C=90^{\circ}$,$AC=8$,$BC=6$,O为内心，过点 O 的直线分别与 AC、AB 相交于 D、E，若 $DE=CD+BE$，则线段 CD 的长为__________.



三、解答题（本大题共 11 小题，共 88 分.）

17.（6 分）解不等式组$\begin{cases}5x-10\le 0\\x+3>-2x\end{cases}$，并把解集在数轴上表示出来.

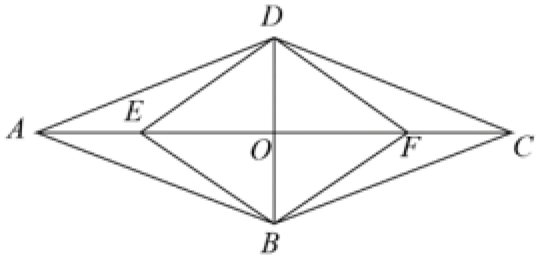
18.（7 分）解方程：$\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3}{x}=1$.

19.（8 分）整式$3\left(\dfrac{1}{3}-m\right)$的值为 P.

(1)当 $m=2$ 时，求 P 的值；

(2)若 P 的取值范围如图所示，求 m 的负整数值.

20.（8 分）如图，在▱ABCD 中，AC，BD交于点O，点E，F在AC上，$AE=CF$.

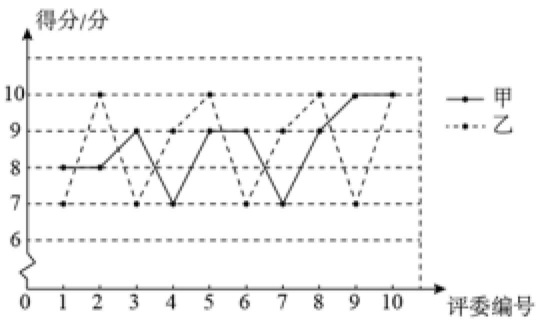


(1)求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形；

(2)若 $\angle BAC=\angle DAC$，求证：四边形 $EBFD$ 是菱形．

21.（8 分）某校举办"歌唱祖国"演唱比赛，十位评委对每位同学的演唱进行现场打分，对参加比赛的甲、乙、丙三位同学得分的数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息．

a．甲、乙两位同学得分的折线图：



b．丙同学得分：

10，10，10，9，9，8，3，9，8，10

c．甲、乙、丙三位同学得分的平均数：

同学	甲	乙	丙
平均数	8.6	8.6	m

根据以上信息，回答下列问题：

(1)求表中 m 的值；

(2)在参加比赛的同学中，如果某同学得分的 10 个数据的方差越小，则认为评委对该同学演唱的评价越一致．据此推断：甲、乙两位同学中，评委对________的评价更一致（填"甲"或"乙"）；

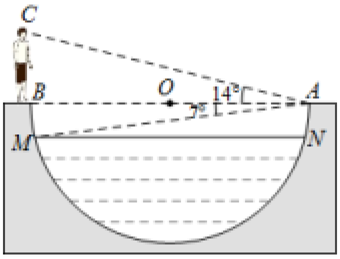
(3)如果每位同学的最后得分为去掉十位评委打分中的一个最高分和一个最低分后的平均分，最后得分越高，则认为该同学表现越优秀．据此推断：在甲、乙、丙三位同学中，表现最优秀的是________（填"甲""乙"或"丙"）．

22.（8分）一只不透明的袋子中装有1个白球，3个红球，这些球除颜色外都相同．

(1)搅匀后从中任意摸出1个球，这个球是白球的概率为______；

(2)搅匀后从中任意摸出1个球，记录颜色后放回，搅匀，再从中任意摸出1个球，求2次摸到的球恰好是1个白球和1个红球的概率．（请用画树状图或列表等方法说明理由）

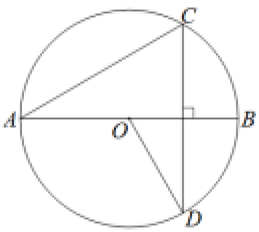
23.（8分）如图，某水渠的横断面是以AB为直径的半圆O，其中水面截线$MN \parallel AB$． 嘉琪在A处测得垂直站立于B处的爸爸头顶C的仰角为14°，点M的俯角为7°．已知爸爸的身高为1.7m．



(1)求$\angle C$的大小及AB的长；

(2)请在图中画出线段DH，用其长度表示最大水深（不说理由），并求最大水深约为多少米（结果保留小数点后一位）．（参考数据：$\tan 76°$取4，$\sqrt{17}$取4.1）

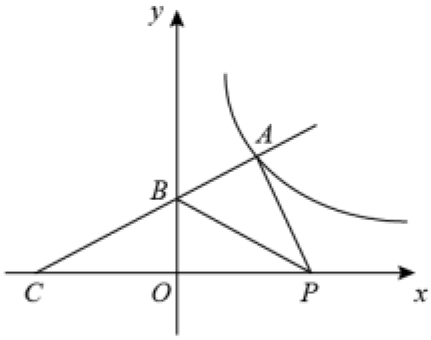
24.（8分）如图，AB是⊙O的直径，CD是⊙O的一条弦，$AB \perp CD$,连接AC,OD.



(1)求证：$\angle BOD = 2\angle A$;

(2)连接DB,过点C作$CE \perp DB$,交DB的延长线于点E，延长DO,交AC于点F，若F为AC的中点，求证：直线CE为⊙O的切线．

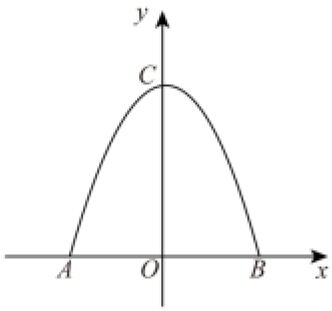
25.（8分）如图，一次函数$y = kx + 2\left(k \neq 0\right)$的图像与反比例函数$y = \dfrac{m}{x}\left(m \neq 0, x > 0\right)$的图像交于点$A\left(2,n\right)$，与$y$轴交于点$B$，与$x$轴交于点$C\left(-4,0\right)$．



(1)求 k 与 m 的值；

(2) $P(a,0)$ 为 x 轴上的一动点，当 $\triangle APB$ 的面积为 $\frac{7}{2}$ 时，求 a 的值．

26.（9 分）如图是一块铁皮余料，将其放置在平面直角坐标系中，底部边缘 AB 在 x 轴上，且 $AB=8$ dm，外轮廓线是抛物线的一部分，对称轴为 y 轴，高度 $OC=8$ dm．现计划将此余料进行切割：



(1)若切割成正方形，要求一边在底部边缘 AB 上且面积最大，求此正方形的面积；

(2)若切割成矩形，要求一边在底部边缘 AB 上且周长最大，求此矩形的周长；

(3)若切割成圆，判断能否切得半径为 3 dm 的圆，请说明理由．

27.（10 分）【发现问题】

小明在练习簿的横线上取点 O 为圆心，相邻横线的间距为半径画圆，然后半径依次增加一个间距画同心圆，描出了同心圆与横线的一些交点，如图 1 所示，他发现这些点的位置有一定的规律．

【提出问题】

小明通过观察，提出猜想：按此步骤继续画圆描点，所描的点都在某二次函数图像上．

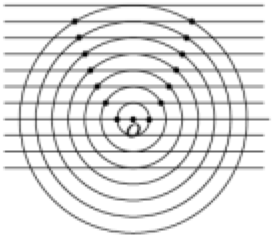


图1

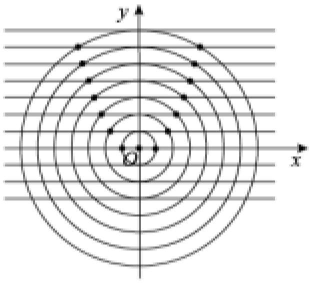
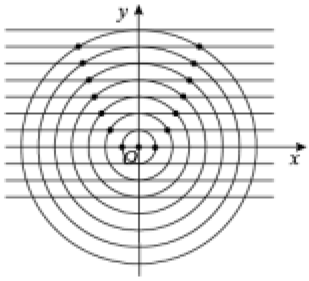


图2



备用图

(1)【分析问题】

小明利用已学知识和经验，以圆心O为原点，过点O的横线所在直线为x轴，过点O且垂直于横线的直线为y轴，相邻横线的间距为一个单位长度，建立平面直角坐标系，如图2所示．当所描的点在半径为5的同心圆上时，其坐标为___________．

(2)【解决问题】

请帮助小明验证他的猜想是否成立．

(3)【深度思考】

小明继续思考：设点$P(0,m)$，m为正整数，以OP为直径画$\odot M$，是否存在所描的点在$\odot M$上．若存在，求m的值；若不存在，说明理由．

参考答案

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分．每小题只有一个选项是符合题意的）

1、C

【解析】解：面积为：$4\times10^2\times4\times10^2=16\times10^4=1.6\times10^5(m^2)$，

故选：C．

2、B

【解析】解：A. $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\neq2+3$，故错误；

B. $\sqrt{4\times9}=2\times3$，故正确；

C. $\sqrt{9^4}=\sqrt{3^8}\neq\sqrt{3^2}$，故错误；

D. $\sqrt{4.9}\neq0.7$，故错误；

故选：B．

3、A

【解析】解：A、由 x＜y 可得：$2x<2y$，故选项成立；

B、由 x＜y 可得：$-2x>-2y$，故选项不成立；

C、由 x＜y 可得：$x-1<y-1$，故选项不成立；

D、由 x＜y 可得：$x+1<y+1$，故选项不成立；

故选 A.

4、A

【解析】解：①汽车从 A 地匀速行驶到 B 地，汽车的剩余路程 y 随行驶时间 x 的增大而减小，故①可以利用该图象表示；

②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量 y 随放水时间 x 的增大而减小，故②可以利用该图象表示；

③设绳子的长为 L，一边长 x，则另一边长为 $\frac{1}{2}L-x$，

则矩形的面积为：$y=\left(\frac{1}{2}L-x\right)\cdot x=-x^2+\frac{1}{2}Lx$，

故③不可以利用该图象表示；

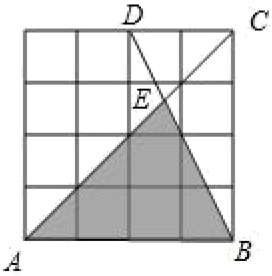
故可以利用该图象表示的有：①②，

故选：A．

5、C

【解析】解：∵$CD \parallel AB$，∴$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$，∴$\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{CD}=\frac{4}{2}=2$，

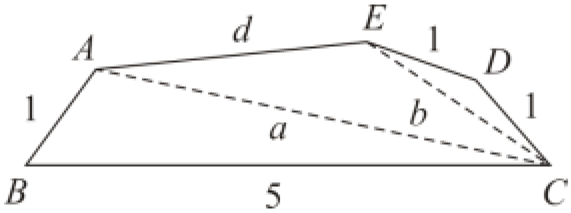
∴$S_{阴影}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4=\frac{16}{3}$，



故选：C．

6、C

【解析】解：如图，设这个凸五边形为$ABCDE$，连接AC,CE，并设$AC=a,CE=b$，



在□ABC中，$5-1<a<1+5$，即$4<a<6$，

在□CDE中，$1-1<b<1+1$，即$0<b<2$，

所以$4<a+b<8$，$2<a-b<6$，

在$\triangle ACE$中，$a-b<d<a+b$，

所以$2<d<8$，

观察四个选项可知，只有选项C符合，

故选：C．

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分．）

7、2

【解析】解：∵$2^3=8$，

∴$\sqrt[3]{8}=2$，

故答案为：2．

8、x≠1

【解析】解：代数式$\frac{x}{x-1}$有意义，

X-1≠0，∴x≠1

故答案为：x≠1

9、24

【解析】解：∵$x+y=4$，$x-y=6$，

∴$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=4\times6=24$，

故答案为：24．

10、$AF=AE$（答案不唯一）

【解析】解：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AD//BC$，

∵$AF=EC$，

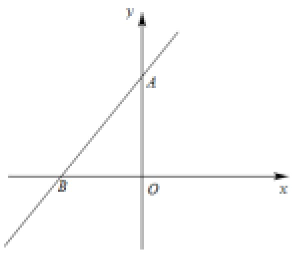
∴四边形$AECF$是平行四边形，

若要添加一个条件使其为菱形，则可添加$AF=AE$或AE=CE或CE=CF或AF=CF，理由：一组邻边相等的平行四边形是菱形；

故答案为$AF=AE$（答案不唯一）．

11、$y=x+5$

【解析】函数$y=x+5$的图像如下，函数分别于x轴相交于点B、和y轴相交于点A，



当$x=0$时，$y=5$，即$A(0,5)$

当$y=0$时，$x=-5$，即$B(-5,0)$

∴函数图像分别与x轴的负半轴、y轴的正半轴相交

故答案为：$y=x+5$．

12、105

【解析】∵$\angle B=\angle C=45°$，$EF\,//\,BC$，

∴$\angle FAN=\angle B=45°$，

∵$\angle E$=60°，

∴$\angle F$=30°，

∴$\angle BND=\angle ANF=180°-\angle F-\angle BAF=105°$

故答案为：105

13、120°.

【解析】解：根据题意得$\frac{\alpha\pi\times 6}{180}$=2π•2，

解得α=120，

即侧面展开图扇形的圆心角为120°.

故答案为120°.

14、$m>3$

【解析】解：∵$y=x^2+4x+m=(x+2)^2+m-4$，

此时抛物线的顶点坐标为（-2，m-4），

函数的图象向上平移1个单位长度，再向右平移3个单位长度后的顶点坐标为（-2+3，m-4+1），即（1，m-3），

∵平移后所得抛物线与坐标轴有且只有一个公共点，

∴$m-3>0$，

解得：$m>3$，

故答案为：$m>3$.

15、$4\sqrt{7}$

【解析】解：如图，连接AD，CF，交于点O，作直线MO交CD于H，过O作$OP\perp AF$于P，

由正六边形是轴对称图形可得：$S_{\text{四边形}ABCO}=S_{\text{四边形}DEFO}$，

由正六边形是中心对称图形可得：$S_{VAOM}=S_{VDOH}, S_{VMOF}=S_{VCHO}$，$OM=OH$，

∴直线MH平分正六边形的面积，O为正六边形的中心，

由正六边形的性质可得：□AOF为等边三角形，? AFO 60?，而$AB=6$，

\ $AB=AF=OF=OA=6, AP=FP=3$，

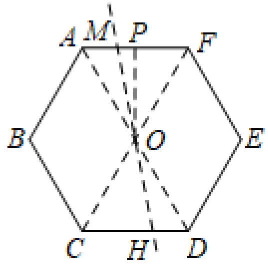
\ $OP=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

Q $AM=2$，则$MP=1$，

\ $OM=\sqrt{1^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{7}$，

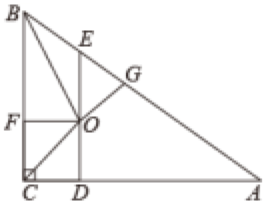
\ $MH=2OM=4\sqrt{7}$.

故答案为：$4\sqrt{7}$.



16、2或$\frac{1}{2}$

【解析】解：①如图，作$DE // BC$，$OF \perp BC$，$OG \perp AB$，连接OB，则$OD \perp AC$，



$\because DE // BC$，$\therefore \angle OBF = \angle BOE$

$\because O$为ΔABC的内心，$\therefore \angle OBF = \angle OBE$，

$\therefore \angle BOE = \angle OBE$，$\therefore BE = OE$，同理，$CD = OD$，$\therefore DE=CD+BE$，

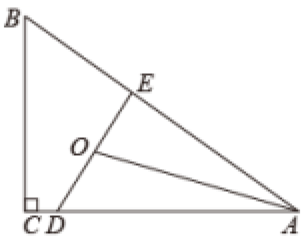
$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\because O$为ΔABC的内心，$\therefore OF = OD = OG = CD$，

$\therefore BF = BG$，$AD = AG$，$\therefore AB = BG + AG = BC - CD + AC - CD = 6 - CD + 8 - CD = 10$

$\therefore CD = 2$

②如图，作$DE \perp AB$，



由①知，$BE = 4$，$AE = 6$，

$\because \angle ACB = \angle AED$，$\angle CAB = \angle EAD$，$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADE$

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$，$\therefore AD = \frac{AB \cdot AE}{AC} = \frac{10 \times 6}{8} = \frac{15}{2}$

$\therefore CD = AC - AD = 8 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

$\because DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 6^2} = \frac{9}{2}$

$\therefore DE=BE+CD=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，$\therefore CD=\frac{1}{2}$

故答案为：2或$\frac{1}{2}$.

三、解答题（本大题共11小题，共88分.）

17、$-1<x\le 2$；解集表示见解析

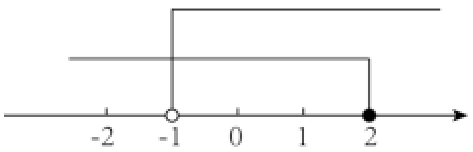
【解析】解：原不等式组为$\begin{cases}5x-10\le 0① \\ x+3>-2x②\end{cases}$，

解不等式①，得$x\le 2$；

解不等式②，得$x>-1$.

∴原不等式组的解集为$-1<x\le 2$，

将不等式组的解集表示在数轴上如下：



18、$x=-\frac{3}{2}$

【解析】方程两边同乘以$x(x+1)$，得$x^2+3(x+1)=x(x+1)$.

解方程，得$x=-\frac{3}{2}$.

经检验，$x=-\frac{3}{2}$是原方程的解.

19、(1)-5；(2)$-2,-1$

【解析】(1) 解：∵$P=3\left(\frac{1}{3}-m\right)$

当$m=2$时，$P=3\times\left(\frac{1}{3}-2\right)=3\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-5$；

(2) ∵$P=3\left(\frac{1}{3}-m\right)$，由数轴可知$P\le 7$，即$3\left(\frac{1}{3}-m\right)\le 7$，

$\therefore \frac{1}{3}-m\le\frac{7}{3}$，解得$m\ge -2$，

$\therefore m$的负整数值为$-2,-1$.

20、(1)见解析；(2)见解析

【解析】(1) 证明：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

$\therefore AO=CO$， $BO=DO$，

$\because AE=CF$，$\therefore AO-AE=CO-CF$，即 $EO=FO$，

∴四边形 $EBFD$ 是平行四边形．

（2）∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB\,//\,CD$，$\therefore \angle DCA=\angle BAC$，

$\because \angle BAC=\angle DAC$，$\therefore \angle DCA=\angle DAC$，$\therefore DA=DC$，

∴四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，即 $EF\perp BD$，

∵四边形 $EBFD$ 是平行四边形，

∴四边形 $EBFD$ 是菱形．

21、(1)8.6；(2)甲；(3)丙

【解析】（1）解：丙的平均数：$\dfrac{10+10+10+9+9+8+3+9+8+10}{10}=8.6$，

则 $m=8.6$．

（2）$s_{甲}^{2}=\dfrac{1}{10}\left[2\times(8.6-8)^2+4\times(8.6-9)^2+2\times(8.6-7)^2+2\times(8.6-10)^2\right]=1.04$，

$s_{乙}^{2}=\dfrac{1}{10}\left[4\times(8.6-7)^2+4\times(8.6-10)^2+2\times(8.6-9)^2\right]=1.84$，

$\because s_{甲}^{2}<s_{乙}^{2}$，

∴甲、乙两位同学中，评委对甲的评价更一致，

故答案为：甲．

（3）由题意得，去掉一个最高分和一个最低分后的平均分为：

甲：$\dfrac{8+8+9+7+9+9+9+10}{8}=8.625$，

乙：$\dfrac{7+7+7+9+9+10+10+10}{8}=8.625$，

丙：$\dfrac{10+10+9+9+8+9+8+10}{8}=9.125$，

∵去掉一个最高分和一个最低分后丙的平均分最高，

因此最优秀的是丙，

故答案为：丙．

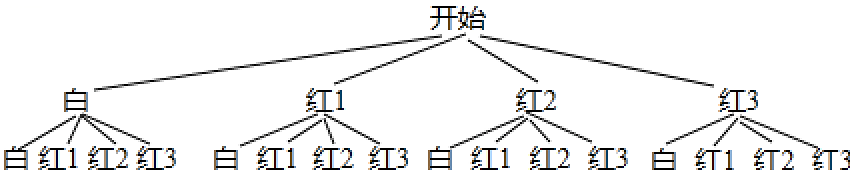
22、(1)$\dfrac{1}{4}$；(2)2 次摸到的球恰好是 1 个白球和 1 个红球的概率为 $\dfrac{3}{8}$

【解析】（1）解：∵一只不透明的袋子中装有 1 个白球和 3 个红球，这些球除颜色外都相同，

∴搅匀后从中任意摸出 1 个球，则摸出白球的概率为：$\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$．

故答案为：$\frac{1}{4}$；

（2）解： 画树状图，如图所示：



共有 16 种不同的结果数，其中两个球颜色不同的有 6 种，

∴2 次摸到的球恰好是 1 个白球和 1 个红球的概率为 $\frac{3}{8}$．

23、(1)$\angle C=76°$，$AB=6.8(\mathrm{m})$；(2)见详解，约2.6米

【解析】（1）解：∵水面截线 $MN \parallel AB$

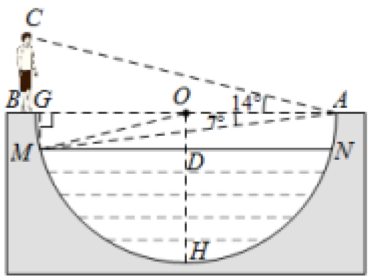
$\therefore BC \perp AB$，$\therefore \angle ABC=90°$，

$\therefore \angle C=90°-\angle CAB=76°$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$BC=1.7$，

$\therefore \tan 76°=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{1.7}$，解得 $AB \approx 6.8(\mathrm{m})$．

（2）过点 O 作 $OH \perp MN$，交 MN 于 D 点，交半圆于 H 点，连接 OM，过点 M 作 $MG \perp OB$ 于 G，如图所示：



$\because$ 水面截线 $MN \parallel AB$，$OH \perp AB$，

$\therefore DH \perp MN$，$GM=OD$，$\therefore DH$ 为最大水深，

$\because \angle BAM=7°$，$\therefore \angle BOM=2\angle BAM=14°$，

$\because \angle ABC=\angle OGM=90°$，且 $\angle BAC=14°$，$\therefore \triangle ABC \sim \triangle OGM$，

$\therefore \frac{OG}{AB}=\frac{MG}{CB}$，即 $\frac{OG}{6.8}=\frac{MG}{1.7}$，即 $OG=4GM$，

在 $Rt\triangle OGM$ 中，$\angle OGM=90°$，$OM=\frac{AB}{2}\approx 3.4$，

$\therefore OG^2+GM^2=OM^2$，即 $(4GM)^2+GM^2=(3.4)^2$，

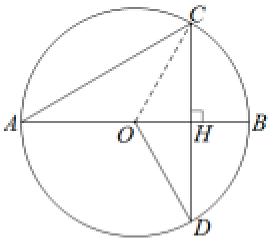
解得 $GM \approx 0.8$，

$\therefore DH=OH-OD=3.4-0.8\approx 2.6$，

∴最大水深约为2.6米.

24、(1)答案见解析；(2)答案见解析

【解析】（1）证明：设AB交CD于点H，连接OC，



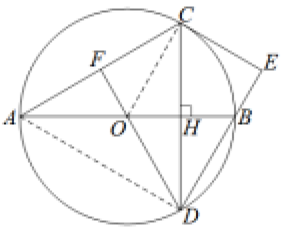
由题可知，$\therefore OC=OD$，$\angle OHC=\angle OHD=90^\circ$，

$\because OH=OH$，$\therefore \text{Rt}\triangle COH\cong \text{Rt}\triangle DOH\left(\text{HL}\right)$，$\therefore \angle COH=\angle DOH$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，$\therefore \angle COB=\angle BOD$，

$\because \angle COB=2\angle A$，$\therefore \angle BOD=2\angle A$；

（2）证明：



连接AD，

$\because OA=OD$，$\therefore \angle OAD=\angle ODA$，

同理可得：$\angle OAC=\angle OCA$，$\angle OCD=\angle ODC$，

∵点H是CD的中点，点F是AC的中点，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=\angle OAC=\angle OCA=\angle OCD=\angle ODC$，

$\because \angle OAD+\angle ODA+\angle OAC+\angle OCA+\angle OCD+\angle ODC=180^\circ$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=\angle OAC=\angle OCA=\angle OCD=\angle ODC=30^\circ$，

$\therefore \angle COB=2\angle CAO=2\times 30^\circ=60^\circ$，

$\because AB$为$\odot O$的直径，$\therefore \angle ADB=90^\circ$，$\therefore \angle ABD=90-\angle DAO=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle COB=60^\circ$，$\therefore OC\parallel DE$，$\text{Q}CE\perp BE$，

$\therefore CE\perp OC$，$\therefore$直线CE为$\odot O$的切线.

25、(1)k的值为$\frac{1}{2}$，m的值为6；(2)$a=3$或$a=-11$

【解析】（1）解：把$C(-4,0)$代入$y=kx+2$，得$k=\frac{1}{2}$．$\therefore y=\frac{1}{2}x+2$．

把$A(2,n)$代入$y=\frac{1}{2}x+2$，得$n=3$．$\therefore A(2,3)$．

把$A(2,3)$代入$y=\frac{m}{x}$，得$m=6$．

$\therefore k$的值为$\frac{1}{2}$，m的值为6．

（2）当$x=0$时，$y=2$．$\therefore B(0,2)$．

$\because P(a,0)$为x轴上的一动点，$\therefore PC=|a+4|$．

$\therefore S_{\triangle CBP}=\frac{1}{2}PC\cdot OB=\frac{1}{2}\times|a+4|\times2=|a+4|$，

$S_{\triangle CAP}=\frac{1}{2}PC\cdot y_A=\frac{1}{2}\times|a+4|\times3=\frac{3}{2}|a+4|$．

$\because S_{\triangle CAP}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle CBP}$，$\therefore \frac{3}{2}|a+4|=\frac{7}{2}+|a+4|$．$\therefore a=3$或$a=-11$．

26、(1)$\left(96-32\sqrt{5}\right)\text{dm}^2$；(2)20dm；(3)能切得半径为3dm的圆．

【解析】（1）由题目可知A（-4，0），B（4，0），C（0，8）

设二次函数解析式为$y=ax^2+bx+c$，

∵对称轴为y轴，∴$b=0$，将A、C代入得，$a=-\frac{1}{2}$，$c=8$

则二次函数解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+8$，

如下图所示,正方形$MNPQ$即为符合题意得正方形，设其边长为$2m$，

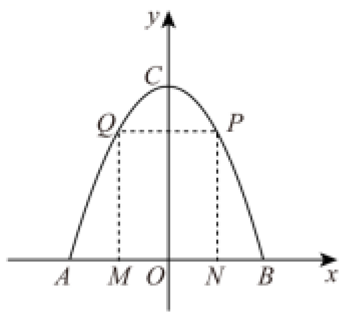
则P点坐标可以表示为（m，$2m$）

代入二次函数解析式得，

$-\frac{1}{2}m^2+8=2m$，解得$m_1=2\sqrt{5}-2, m_2=-2\sqrt{5}-2$（舍去），

∴$2m=4\sqrt{5}-4$，$(2m)^2=\left(4\sqrt{5}-4\right)^2=96-32\sqrt{5}$

则正方形的面积为$\left(96-32\sqrt{5}\right)dm^2$；



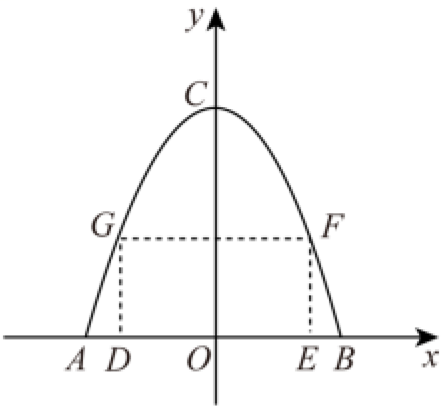
（2）如下如所示矩形 $DEFG$，设 $DE=2n$，则 E（n，0）

将 $x=n$ 代入二次函数解析式，得 $y=-\frac{1}{2}n^2+8$，

则 $EF=-\frac{1}{2}n^2+8$，

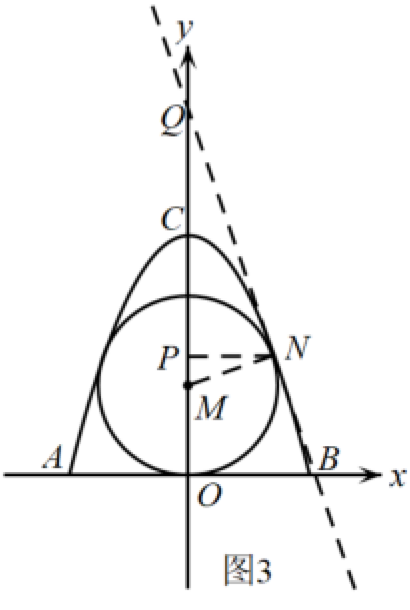
矩形 $DEFG$ 的周长为：2（$DE+EF$）=2（$2n+-\frac{1}{2}n^2+8$）$=-n^2+4n+16=-(n-2)^2+20$，

当 $n=2$ 时，矩形的周长最大，最大周长为 20dm；



（3）若能切成圆，能切得半径为 3dm 的圆，理由如下：

如图，N 为⊙ M 上一点，也是抛物线上一点，过点 N 作⊙ M 的切线交 y 轴于点 Q，连接 MN，过点 N 作 $NP\perp y$ 轴于 P，



设 $N\left(m,-\frac{1}{2}m^2+8\right)$，由勾股定理得：$PM^2+PN^2=MN^2$，

$\therefore m^2+\left(-\frac{1}{2}m^2+8-3\right)^2=3^2$，解得：$m_1=2\sqrt{2}$，$m_2=-2\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore N\left(2\sqrt{2},4\right)$，$\therefore PM=4-3=1$

$\because \cos\angle NMP = \dfrac{PM}{MN} = \dfrac{MN}{QM} = \dfrac{1}{3}$，$\therefore QM = 3MN = 9$，$\therefore Q(0,12)$

设 QN 的解析式为：$y = kx + b$

$\therefore \begin{cases} b = 12 \\ 2\sqrt{2}k + b = 4 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} k = -2\sqrt{2} \\ b = 12 \end{cases}$

$\therefore QN$ 的解析式为：$y = -2\sqrt{2}x + 12$

与抛物线联立为：$-\dfrac{1}{2}x^2 + 8 = -2\sqrt{2}x + 12$

$\dfrac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$

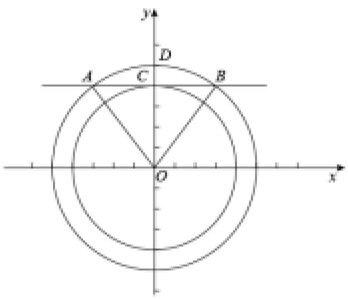
$\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times 4 = 0$

所以此时 N 为□ M 与抛物线在 y 轴右侧的唯一公共点，

所以若切割成圆，能够切成半径为 3dm 的圆．

27、(1) $(-3,4)$ 或 $(3,4)$；(2)成立，理由见解析；(3)存在，4

【解析】（1）解：如图，$OA = OB = OD = 5, OC = 4, OC \perp AB,$



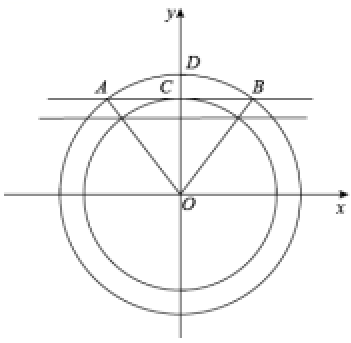
$\therefore AC = BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$

$\therefore A(-3,4), B(3,4),$

故答案为：$(-3,4)$ 或 $(3,4)$

（2）小明的猜想成立．

解法 1：如图，设半径为 n 的圆与直线 $y = n-1$ 的交点为 $P(x, n-1)$．



因为 $OP=n$，所以 $x^2+(n-1)^2=n^2$，即 $x^2=2n-1$，

所以 $n=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，

所以 $y=n-1=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$上，小明的猜想成立．

解法 2：设半径为 n 的圆与直线 $y=n-1$ 交点为 $P(x,n-1)$，

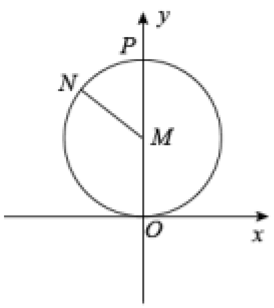
因为 $OP=n$，所以 $x^2+(n-1)^2=n^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2n-1}$，所以 $P\left(\pm\sqrt{2n-1},n-1\right)$．

$\begin{cases}x=\pm\sqrt{2n-1},\\ y=n-1\end{cases}$，消去 n，得 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，

$\therefore$点在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$上，小明的猜想成立．

（3）存在所描的点在⊙M上，理由：

如图，设所描的点 $N\left(\pm\sqrt{2n-1},n-1\right)$在⊙$M$上，



则 $MO=MN$，因为 $M\left(0,\frac{m}{2}\right)$，

所以 $\left(\frac{m}{2}\right)^2=\left(\pm\sqrt{2n-1}\right)^2+\left(n-1-\frac{m}{2}\right)^2$，

整理得 $m=\frac{n^2}{n-1}=\frac{n^2-1+1}{n-1}=n+1+\frac{1}{n-1}$，，

因为 m，n 都是正整数，所以只有 $n=2$，$m=4$ 满足要求．

因此，存在唯一满足要求的 m，其值是 4．