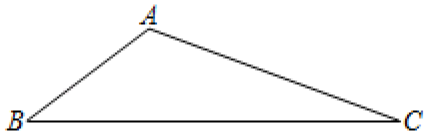
2022-2023 学年九年级下册数学检测卷

第 7 章《锐角三角函数》

姓名：_________ 班级：_________ 学号：_________

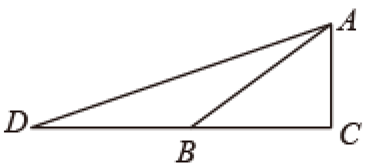
一、单选题(共 24 分)

1．(本题 3 分)如图，在△ABC中，∠BAC＝120°，AC＝8，AB＝4，则BC的长是（　　）



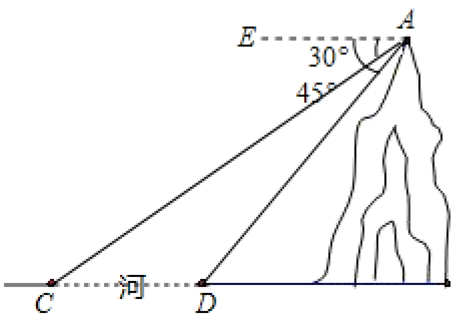
A．$4\sqrt{3}$　　　B．$4\sqrt{7}$　　　C．6　　　D．8

2．(本题 3 分)如图，在□ABC中，$AC\perp BC$，$\angle ABC=30°$，点D是CB延长线上的一点，且$BD=BA$，则$\tan\angle DAC$的值为（　　）



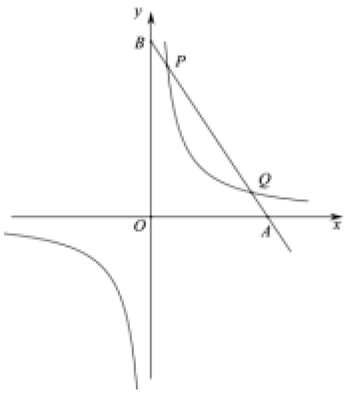
A．$2+\sqrt{3}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．$2-\sqrt{3}$　　　D．$3\sqrt{3}$

3．(本题 3 分)如图，河旁有一座小山，从山顶A处测得河对岸点C的俯角为$30°$，测得岸边点D的俯角为$45°$，又知河宽CD为 50 米．现需从山顶A到河对岸点C拉一条笔直的缆绳AC，则缆绳AC的长是（　　）



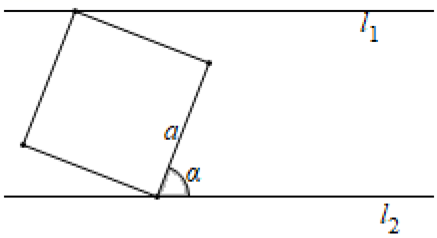
A．$(50\sqrt{3}-50)$米　　B．$(50\sqrt{3}+50)$米　　C．$(25\sqrt{3}-50)$米　　D．$50\sqrt{3}$米

4．(本题 3 分)在平面直角坐标系中，一次函数 $y=-2x+b$（b为常数）的图像与x、y轴分别交于点A、B，直线AB与双曲线$y=\dfrac{4}{x}$ 分别交于点P、Q，则$AP\cdot BP$的值是（　　）



A．4　　B．8　　C．10　　D．与 b 的取值有关

5．(本题 3 分)如图是墙壁上在 l_1，l_2 两条平行线间边长为 a 的正方形瓷砖，该瓷砖与平行线的较大夹角为 α，则两条平行线间的距离为（　　）



A．$a\sin\alpha$　　B．$a\sin\alpha+a\cos\alpha$

C．$2a\cos\alpha$　　D．$a\sin\alpha-a\cos\alpha$

6．(本题 3 分)图 1 是一个地铁站入口的双翼闸机．如图 2，当双翼收起时，可以通过闸机的物体的最大宽度是 64cm，它的双翼展开时，双翼边缘的端点 A 与 B 之间的距离为 10cm，此时双翼的边缘 AC、BD 与闸机侧立面夹角 $\angle PCA=\angle BDQ=30^\circ$，则双翼的边缘 AC、BD（$AC=BD$）的长度为（　　）

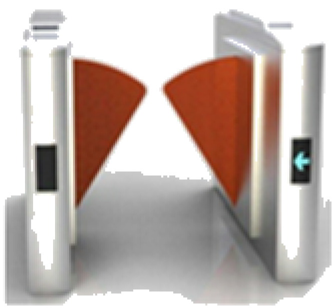


图 1

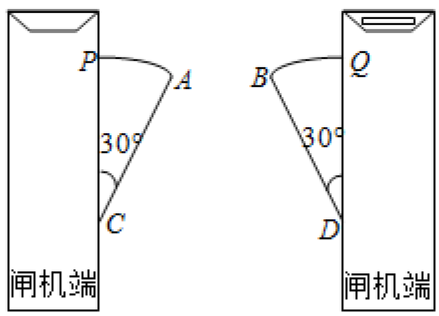
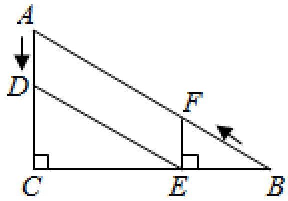


图 2

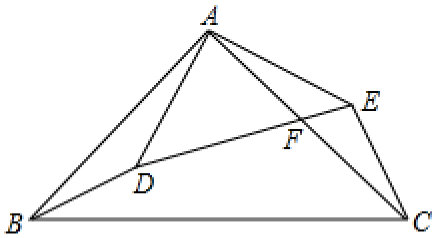
A．$27\sqrt{3}$ cm　　B．$27\sqrt{2}$ cm　　C．27cm　　D．54cm

7．(本题 3 分)如图，在 Rt□ABC 中，$\angle C=90^\circ, AC=3\text{cm}, BC=4\text{cm}$，$D$ 从 A 出发沿 AC 方向以 1cm/s 向终点 C 匀速运动，过点 D 作 $DE//AB$ 交 BC 于点 E，过点 E 作 $EF\perp BC$ 交 AB 于点 F，当四边形 $ADEF$ 为菱形时，点 D 运动的时间为（　　）



A．$\frac{3}{2}$　　　　B．$\frac{5}{2}$　　　　C．$\frac{12}{7}$　　　　D．$\frac{15}{8}$

8．(本题 3 分)如图，在△ABC中，$\angle BAC=90°, AB=AC=10cm$，点 D 为△ABC内一点，$\angle BAD=15°, AD=6cm$，连接 BD，将△ABD绕点 A 按逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点为点 E，连接 DE, DE交 AC 于点 F，则 CF 的长为（　　）cm．

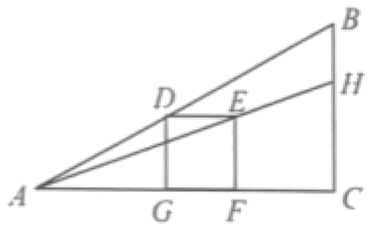


A．$10-2\sqrt{3}$　　　　B．$10-2\sqrt{6}$　　　　C．2　　　　D．3

二、填空题(共 30 分)

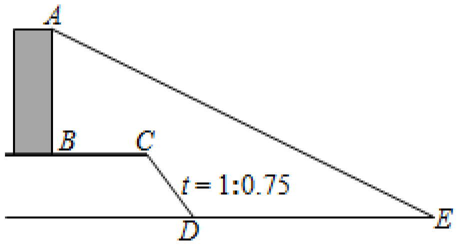
9．(本题 3 分)在△ABC中，$\angle ACB<90°$，$AB=13$，$AC=4\sqrt{10}$，$\tan\angle ABC=\frac{12}{5}$，则 BC 的长为______．

10．(本题 3 分)如图，△ABC中∠ACB＝90°，BC＝2，AC＝4，若正方形 $DEFG$ 的顶点 D 在 AB 上，顶点 F、G 都在 AC 上，射线 AE 交 BC 边于点 H，则 CH 长为___．

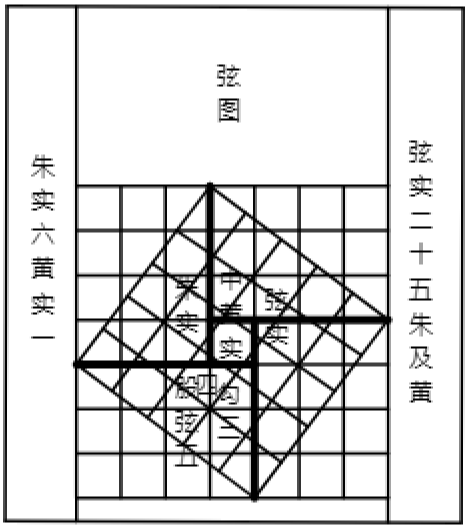


11．(本题 3 分)在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心，2 个单位长度为半径画圆．若一次函数 $y=kx+5k$（k 为常数，$k\neq 0$）的图像与⊙O 有公共点，则 k 的取值范围是_________．

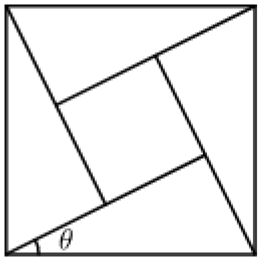
12．(本题 3 分)如图，AB 是一垂直于水平面的建筑物，BC 是建筑物底端的一个平台，斜坡 CD 的坡度（或坡比）为 i＝1：0.75，坡长为 10 米，DE 为地平面（A，B，C，D，E 均在同一平面内），则平台距地面的高度为_____．



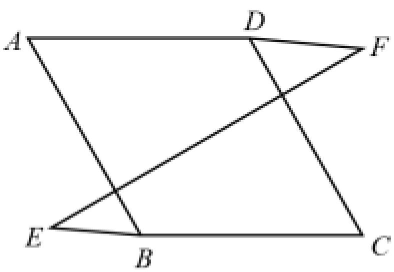
13．(本题 3 分)我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出的“赵爽弦图”如图所示，它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形，如果大正方形的面积是 130，小正方形面积是 10，则 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 的值是____________.



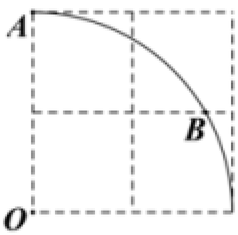
图①



14．(本题 3 分)如图，已知菱形 $ABCD$，$\angle ABC=120^\circ$，$BE\,//\,DF$，$BE=4$，$DF=5$，$EF=15$，$\sin\angle BEF=\frac{3}{5}$，则 $BC=$__________.

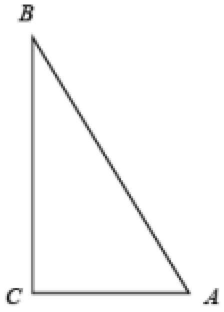


15．(本题 3 分)如图，在 2×2 的正方形网格中，每个小正方形的边长为 1．以点 O 为圆心、2 为半径画弧，交图中网格线于点 A、B，则扇形 OAB 围成圆锥的底面半径为_____.

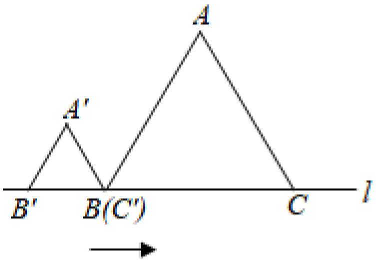


16．(本题 3 分)如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ,\angle CBA=30^\circ,AC=1$，$D$ 是 AB 上一点（点 D 与点 A

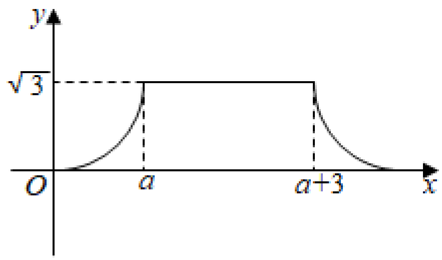
不重合）．若在 Rt□ABC 的直角边上存在 4 个不同的点分别和点 A、D 成为直角三角形的三个顶点，则 AD 长的取值范围是________．



17．(本题 3 分)如图（1），$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是两个边长不相等的等边三角形，点 B'、C'、B、C 都在直线 l 上，$\triangle ABC$ 固定不动，将 $\triangle A'B'C'$ 在直线 l 上自左向右平移．开始时，点 C' 与点 B 重合，当点 B' 移动到与点 C 重合时停止．设 $\triangle A'B'C'$ 移动的距离为 x，两个三角形重叠部分的面积为 y，y 与 x 之间的函数关系如图（2）所示，则 $\triangle ABC$ 的边长是___．

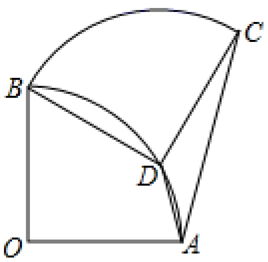


(1)



(2)

18．(本题 3 分)如图，扇形 OAB 中，$\angle AOB=90°$，将扇形 OAB 绕点 B 逆时针旋转，得到扇形 BDC，若点 O 刚好落在弧 AB 上的点 D 处，则 $\dfrac{AD}{AC}$ 的值为______．



三、解答题(共 96 分)

19．(本题 10 分)计算：

（1）$2\tan45°\cdot\sin30°+\cos30°\cdot\tan60°$；

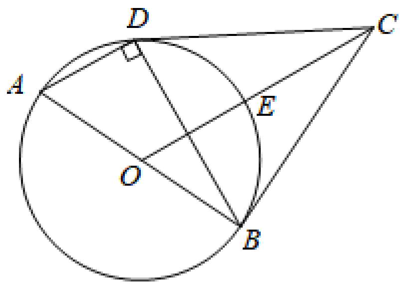
（2）$\cos60°-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos45°+3\tan^2 30°$．

20．(本题 10 分)在Rt△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A-\angle B=30^\circ$，$a-b=2\sqrt{3}-2$，解这个直角三角形．

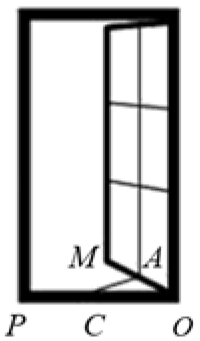
21．(本题 10 分)如图，BD是四边形$ABCD$的对角线，$BD\perp AD$，⊙O是△ABD的外接圆，∠BDC=∠BAD．

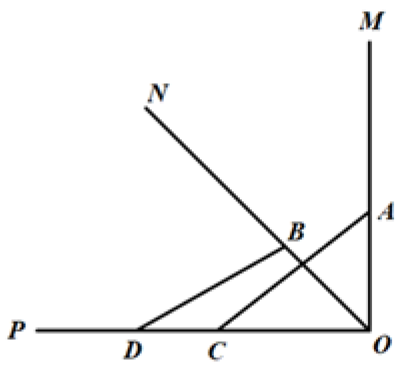
（1）求证：CD是⊙O的切线；

（2）连接OC交⊙O于点E，若AD=2，CD=6，cos∠BDC=$\frac{1}{3}$，求CE的长．



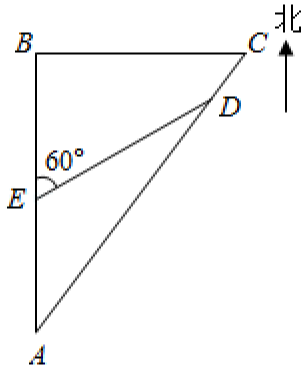
22．(本题 10 分)如图，一扇窗户垂直打开，即$OM\perp DP$，AC是长度不变的滑动支架，其中一端固定在窗户的点A处，另一端在OP上滑动，将窗户OM按图示方向向内旋转45°到达ON位置，此时，点A、C的对应位置分别是点B、D．测出此时$\angle ODB$为30°，BO的长为20cm．求滑动支架AC的长．



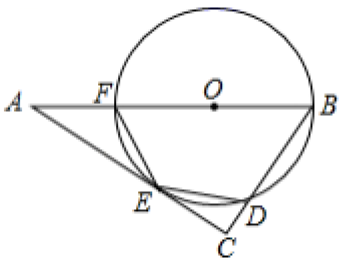


23．(本题 10 分)如图，某海岸边有B，C两码头，C码头位于B码头的正东方向，距B码头 60 海里.甲、乙两船同时从A岛出发，甲船向位于A岛正北方向的B码头航行，乙船向位于A岛北偏东 37°方向的C码头航行，当甲船到达距B码头 40 海里的E处时，乙船位于甲船北偏东 60°方向的D处，求此时乙

船与 C 码头之间的距离（结果精确到 0.1 海里）．（参考数据：$\sin37°\approx0.60$，$\cos37°\approx0.80$，$\tan37°\approx0.75$，$\sin23°\approx0.39$，$\cos23°\approx0.92$，$\tan23°\approx0.42$，$\sqrt{3}\approx1.732$）



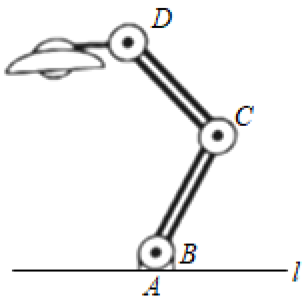
24．(本题 10 分)如图，点 O 是 ΔABC 的边 AB 上一点，$\odot O$ 与边 AC 相切于点 E，与边 BC、AB 分别相交于点 D、F，且 $DE=EF$．



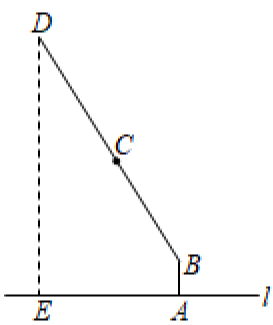
（1）求证：$\angle C=90°$；

（2）当 $BC=3$，$\sin A=\frac{3}{5}$ 时，求 AF 的长．

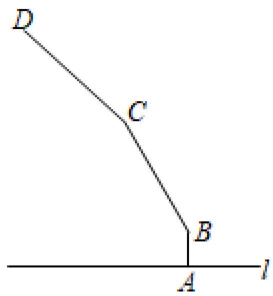
25．(本题 12 分)如图①，一台灯放置在水平桌面上，底座 AB 与桌面垂直，底座高 $AB=5\text{cm}$，连杆 $BC=CD=20\text{cm}$，BC，CD 与 AB 始终在同一平面内．



图①



图②



图③

（1）如图2，转动连杆 BC,CD，使 $\angle BCD$ 成平角，$\angle ABC=143°$，求连杆端点 D 离桌面 l 的高度 DE．

（2）将图②中的连杆 CD 再绕点 C 逆时针旋转$16°$，如图③，此时连杆端点 D 离桌面 l 的高度减小了多少cm？（参考数据：$\sin 37°=0.6.\cos 37°=0.8,\tan 37°=0.75$）

26．(本题12分)如图，图1是一个小朋友玩“滚铁环”的游戏，铁环是圆形的，铁环向前滚动时，铁环钩保持与铁环相切．现在将这个游戏抽象为数学问题，如图2，已知铁环的半径为30cm，设铁环中心为 O，铁环钩与铁环相切点为 M，铁环与地面接触点为 A，$\angle MOA=\alpha,\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

（1）求点 M 离地面 AC 的高度 BM;

（2）设人站立点 C 与点 A 的水平距离 AC=60cm，求铁环钩 MF 的长度．

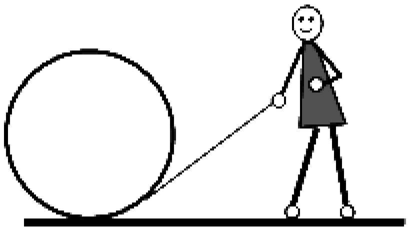


图 1

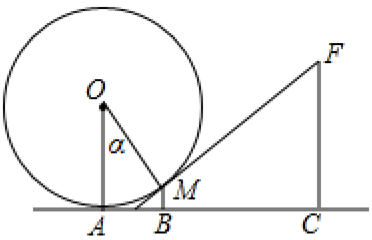


图 2

27．(本题12分)如图，二次函数 $y=-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4$ 的图象与坐标轴交于 A、B、C 三点，该二次函数图象的顶点为 D，连接 AC，BC．

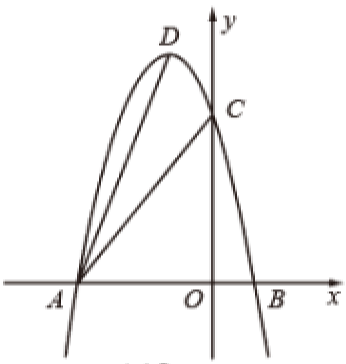
（1）直接写出 D 点的坐标：_____；

（2）如图①，求△ABC 的面积；

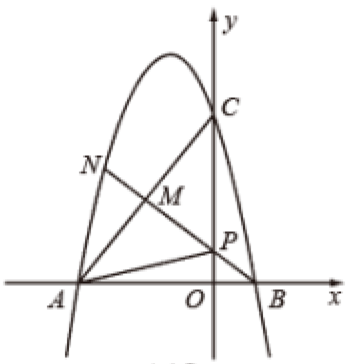
（3）点 P 在线段 CO 上运动．

①如图②，直线 BP 交 AC 干点 M，交该二次函数图象于点 N，若 $MP:BP=2:1$，求 N 点坐标；

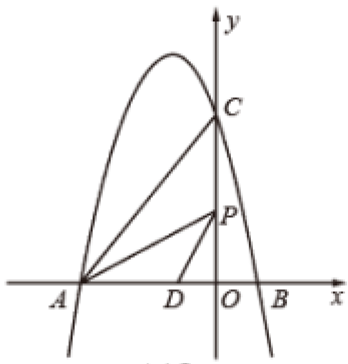
②如图③，在线段 AO 上有一点 $D(-\frac{1}{2},0)$，连接 PD，请探究在 P 点的运动过程中，$\tan\angle APD$ 的值是否能为 $\frac{3}{4}$？如能，直接写出此时 P 点坐标；若不能，说明理由．



图①



图②



图③

参考答案

1．B

【分析】

过点 C 作 $CE\perp BA$ 交 BA 的延长线于 E，然后利用三角函数和勾股定理求解即可得到答案.

【详解】

解：如图，过点 C 作 $CE\perp BA$ 交 BA 的延长线于 E.

$\because \angle BAC=120°$，

$\therefore \angle CAE=180°-120°=60°$，

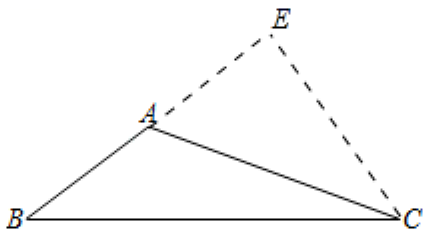
$\therefore AE=AC\cdot\cos 60°=4$，$EC=AC\cdot\sin 60°=4\sqrt{3}$

$\because AB=4$，

$\therefore BE=AB+AE=8$，

$\therefore BC=\sqrt{CE^2+BE^2}=4\sqrt{7}$，

故选 B．



【点睛】

本题主要考查了解直角三角形和勾股定理，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

2．A

【分析】

设 $AC=x$，根据三角函数可得：$BC=\sqrt{3}x$、$BD=AB=2x$，再表示出 DC，最后根据正切的定义解答即可．

【详解】

解：设 $AC=x$，

$\because AC\perp BC$，$\angle ABC=30°$，

$\therefore \tan\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore BC=\sqrt{3}x$，$AB=2x$，

$\therefore BD=AB=2x$，

$\therefore DC=BD+DC=2x+\sqrt{3}x=(2+\sqrt{3})x$，

$\therefore \tan\angle DAC=\frac{DC}{AC}=\frac{(2+\sqrt{3})x}{x}=2+\sqrt{3}$，

故选 A．

【点睛】

本题考查了解直角三角形、特殊角的三角函数和求三角函数值，掌握运用三角函数解直角三角形、特殊角的三角形函数值成为解答本题的关键．

3．B

【分析】

首先分析图形：根据题意构造直角三角形；本题涉及到两个直角三角形，应利用其公共边构造等量关系，进而可求出答案．

【详解】

解：作 $AB\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 B，

在 Rt△ABC 中，

$\because \angle ACB=\angle CAE=30^\circ$， $\angle ADB=\angle EAD=45^\circ$，

$\therefore AC=2AB$， $DB=AB$．

设 $AB=x$，则 $BD=x$， $AC=2x$， $CB=50+x$，

$\because \tan\angle ACB=\tan 30^\circ$，

$\therefore AB=CB\cdot\tan\angle ACB=CB\cdot\tan 30^\circ$．

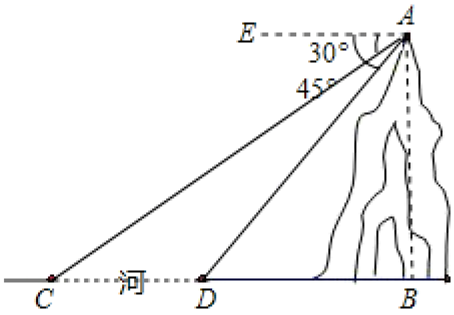
$\therefore x=(50+x)\square\frac{\sqrt{3}}{3}$．

解得： $x=25(1+\sqrt{3})$，

$\therefore AC=50(1+\sqrt{3})$（米）．

∴缆绳 AC 的长为 $50(1+\sqrt{3})$ 米．

故选：B．



【点睛】

本题要求学生借助仰角关系构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形.

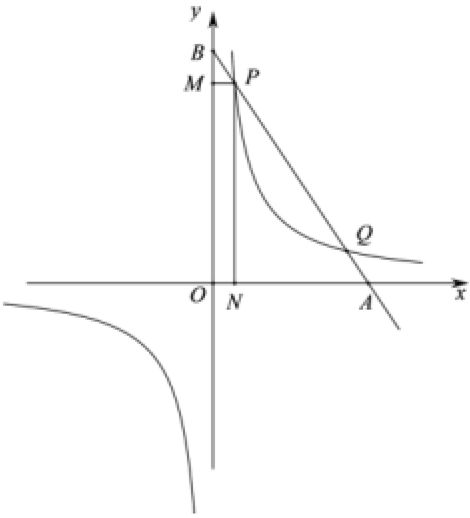
4．C

【分析】

如图，过P向x,y轴作垂线，垂足分别为N,M，由于P点在$y=\frac{4}{x}$上，设$P(m,\frac{4}{m})$，代入一次函数解析式，得到关系式，根据$\angle BPM=\angle BAO$，由正切的定义可知$BM=2MP,PN=2AN$，勾股定理求得AP,BP，结合已知关系式，即可求得答案.

【详解】

如图，过P向x,y轴作垂线，垂足分别为N,M，



$\therefore \angle BPM=\angle BAO$，

$\because$ P点在$y=\frac{4}{x}$上，设$P(m,\frac{4}{m})$，代入$y=-2x+b$得：

$\frac{4}{m}=-2m+b$，

$\therefore m(b-2m)=4$，

一次函数 $y=-2x+b$（b为常数）的图像与x、y轴分别交于点A、B，

令$x=0$， $y=b$，则$B(0,b)$，

令$y=0$， $x=\frac{b}{2}$，则$A(\frac{b}{2},0)$，

$\therefore OA=\frac{b}{2},OB=b$，

$\because$ $P(m,\frac{4}{m})$，

$\therefore OM=\frac{4}{m},ON=m$，

$\therefore AN=\frac{b}{2}-m, PM=m$，

$\because \angle BPM=\angle BAO$，

$\therefore \tan\angle BPM=\tan\angle BAO=\frac{OB}{OA}=2$，

$\therefore BM=2MP, PN=2AN$，

$\therefore AP=\sqrt{AN^2+PN^2}=\sqrt{5}AN, BP=\sqrt{BM^2+MP^2}=\sqrt{5}BM$，

$\therefore AP\cdot BP=5AN\cdot PM=5(\frac{b}{2}-m)\times m$，

$\because m(b-2m)=4$，

$\therefore AP\cdot BP=10$．

故选C．

【点睛】

本题考查了一次函数与反比例函数的综合，勾股定理，正切的定义，掌握以上知识是解题的关键．

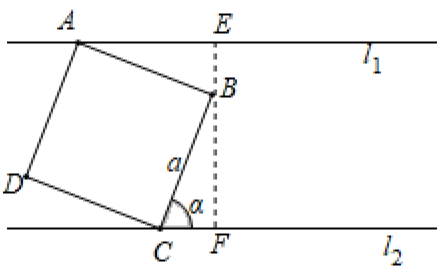
5．B

【分析】

如图，过 B 作 $EF\perp l_1$ 于点 E，EF 与 l_2 交于点 F，则 $EF\perp l_2$，再证明△ABE≌△BCF，可得 $BE=CF$，再利用三角函数求解 BF, CF，即可得到答案．

【详解】

解：如图，过 B 作 $EF\perp l_1$ 于点 E，EF 与 l_2 交于点 F，则 $EF\perp l_2$，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC=a$，$\angle ABC=90°$，

∴$\angle ABE+\angle CBF=\angle ABE+\angle BAE=90°$，

∴$\angle BAE=\angle CBF$，

∵$\angle AEB=\angle BFC=90°$，

∴△ABE≌△BCF（AAS），

∴$BE=CF$，

在Rt△BCF中，$BF=a\cdot\sin\alpha$，$CF=a\cdot\cos\alpha$，

∴$BE=a\cdot\cos\alpha$，

∴$EF=BE+BF=a\sin\alpha+a\cos\alpha$，

即两条平行线间的距离为 $a\sin\alpha+a\cos\alpha$，

故选：B．

【点睛】

本题考查的是正方形的性质，三角形全等的判定与性质，锐角三角函数的应用，掌握利用锐角三角函数求解三角形的边长是解题的关键．

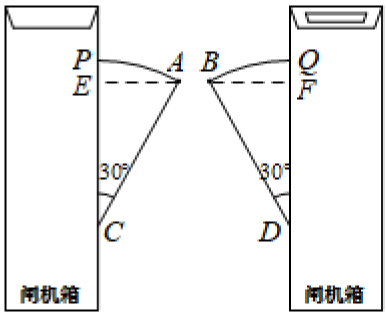
6．D

【分析】

过 A 作 $AE\perp CP$ 于 E，过 B 作 $BF\perp DQ$ 于 F，则可得 AE 和 BF 的长，依据端点 A 与 B 之间的距离为 10cm，即可得到双翼的边缘 AC、BD（$AC=BD$）的长度．

【详解】

解：如图，过 A 作 $AE\perp CP$ 于 E，过 B 作 $BF\perp DQ$ 于 F，



∵点 A 与 B 之间的距离为 10cm，可以通过闸机的物体的最大宽度是 64cm，

∴$AE=BF=(64-10)\div2=27$（cm），

$Rt\triangle ACE$ 中，$\angle PCA=30°$，$AC=2AE=27\times2=54$（cm），

故选：D．

【点睛】

本题主要考查了特殊角的三角函数值，特殊角的三角函数值应用广泛，一是它可以当作数进行运算，二是具有三角函数的特点，在解直角三角形中应用较多．

7．D

【分析】

由勾股定理可求 AB 的长，由锐角三角函数可得 $\frac{DC}{DE}=\frac{AC}{AB}$，即可求解．

【详解】

解：设经过t秒后，四边形$ADEF$是菱形，

$\therefore AD=DE=t$， $DE//AB$，

$\therefore CD=(3-t)cm$， $\angle ABC=\angle DEC$，

$\because \angle C=90°$， $AC=3cm$， $BC=4cm$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{9+16}=5cm$，

$\because \sin\angle DEC=\sin\angle ABC=\frac{DC}{DE}=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore \frac{3-t}{t}=\frac{3}{5}$，

$\therefore t=\frac{15}{8}$，

故选：D．

【点睛】

本题考查了菱形的性质，勾股定理，锐角三角函数等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键．

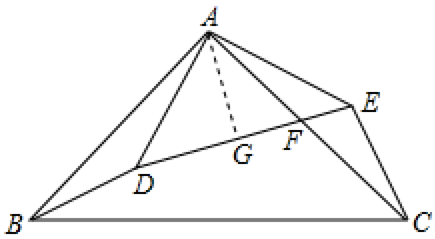
8．B

【分析】

过点A作$AG\perp DE$于点G，由旋转的性质推出$\angle AED=\angle ADG=45°$，$\angle AFD=60°$，利用锐角三角函数分别求出$AG$，$GF$，$AF$的长，再通过计算$CF=AC-AF$，即可求出答案．

【详解】

解：过点A作$AG\perp DE$于点G，



由旋转知：$AD=AE$，$\angle DAE=90°$，$\angle CAE=\angle BAD=15°$，

$\therefore \angle AED=\angle ADG=45°$，

在□AEF中，$\angle AFD=\angle AED+\angle CAE=60°$，

在Rt□ADG中，$AG=DG=\frac{AD}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}cm$，

在Rt□AFG中，$GF=\frac{AG}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}cm$， $AF=2FG=2\sqrt{6}cm$，

$\therefore CF=AC-AF=\left(10-2\sqrt{6}\right)cm$，

故选：B．

【点睛】

本题考查了旋转的性质，等腰直角三角形的性质，解直角三角形等，解题的关键是能够通过作适当的辅助线构造特殊的直角三角形，通过解直角三角形来解决问题．

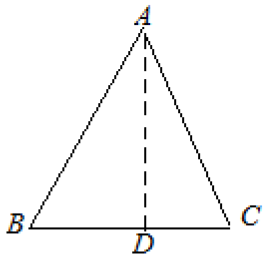
9．9

【分析】

过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，根据∠ABC 的正切可得 AD 和 BD 比例，可设 $AD=12x$，$BD=5x$，再利用勾股定理可得 $AD=12$，$BD=5$，进一步可求 CD，进而可得 $BC=BD+CD$．

【详解】

解：当 $\angle ACB<90^\circ$， B、C 在 AD 异侧时，如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，



$Rt\triangle ABD$ 中，$\tan\angle ABC=\frac{12}{5}=\frac{AD}{BD}$，

设 $AD=12x$，$BD=5x$，

∵$AB=13$，

∴$(12x)^2+(5x)^2=13^2$，

解得：$x=1$，

∴$AD=12$，$BD=5$．

∴$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{10}\right)^2-12^2}=4$．

∴$BC=BD+CD=5+4=9$．

【点睛】

本题考查解直角三角形，掌握三角函数的定义和勾股定理是解题关键．

10．$\frac{4}{3}$

【分析】

根据题意可知 $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}=\frac{DG}{AG}$， $\tan\angle HAC=\frac{EF}{AF}=\frac{CH}{AC}$再利用正方形的性质求解即可.

【详解】

解：∵四边形 $DEFG$ 是正方形，

∴$DG=GF=EF$，$\angle DGF=\angle EFA=90^\circ$，

∴$\angle DGA=90^\circ$，

$\therefore \tan\angle BAC=\frac{DG}{AG}$， $\tan\angle HAC=\frac{EF}{AF}$

$\because \angle ACB=90°$，$BC=2$，$AC=4$，

$\therefore \tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$， $\tan\angle HAC=\frac{CH}{AC}$

$\therefore \tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}=\frac{DG}{AG}$，

$\therefore AG=2DG$，

$\therefore AF=3DG=3EF$

$\therefore \tan\angle HAC=\frac{EF}{AF}=\frac{1}{3}=\frac{CH}{AC}$，

$\therefore CH=\frac{AC}{3}=\frac{4}{3}$，

故答案为：$\frac{4}{3}$

【点睛】

本题主要考查了正方形的性质和解直角三角形，解题的关键在于能够熟练掌握解直角三角形的相关知识.

11．$-\frac{2\sqrt{21}}{21}\le k\le\frac{2\sqrt{21}}{21}$且$k\ne0$

【分析】

根据题意，首先得出一次函数必过定点（-5,0），则直线绕点（-5,0）旋转，与⊙O有公共点，即找出两个相切的极限位置，求出对应的k值，k在两个极限位置k值之间.

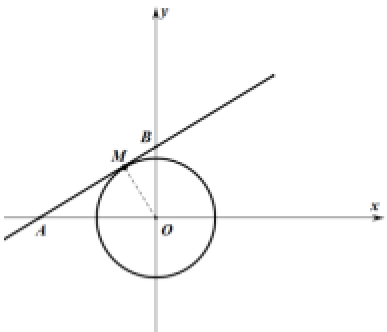
【详解】

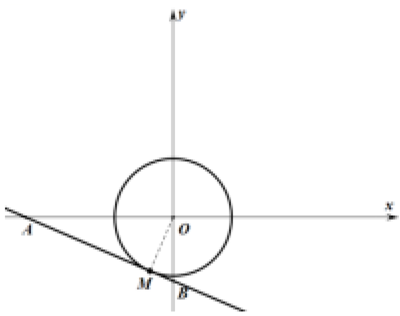
$\because$一次函数解析式为：$y=kx+5k=k(x+5)$（k为常数，$k\ne0$），

$\therefore$当$x=-5$时，$y=0$，即一次函数必过定点$(-5,0)$，

设一次函数$y=kx+5k$与x轴和y轴分别交于点A,B，

当直线AB与⊙O相切时，切点为M，有两种情况，如图所示：





①当直线与y轴交于正半轴时，连接OM，

∵直线 AB 与⊙ O 相切，

∴$OM\perp AB$，

∴$\angle AMO=90°$，

在 $Rt\triangle AMO$ 中，

$AM=\sqrt{AO^2-OM^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，

∴ $\tan\angle OAM=\frac{OM}{AM}=\frac{2}{\sqrt{21}}$，

在 $Rt\triangle ABO$ 中，

$\tan\angle BAO=\frac{BO}{AO}=\frac{BO}{5}=\frac{2}{\sqrt{21}}$，

解得：$BO=\frac{10\sqrt{21}}{21}$，

即 B 点坐标为 $(0,\frac{10\sqrt{21}}{21})$，

代入一次函数解析式 $y=kx+5k$，

解得 $k=\frac{2\sqrt{21}}{21}$，

②当直线与 y 轴交于负半轴时，同理可得：

B 点坐标为 $(0,-\frac{10\sqrt{21}}{21})$，

代入一次函数解析式 $y=kx+5k$，

解得 $k=-\frac{2\sqrt{21}}{21}$，

∴ $-\frac{2\sqrt{21}}{21}\le k\le\frac{2\sqrt{21}}{21}$ 且 $k\neq0$，

故填：$-\frac{2\sqrt{21}}{21}\le k\le\frac{2\sqrt{21}}{21}$ 且 $k\neq0$．

【点睛】

本题考查直线与圆的位置关系，一次函数的性质，勾股定理及解直角三角形，解题关键是熟练掌握直线与圆的位置关系，将几何关系转化为代数关系．

12．8米

【分析】

延长 AB 交 ED 的延长线于 F，过 C 作 $CG\perp EF$ 于 G，由斜坡的坡度 $i=1:0.75$ 易得出 $\frac{CG}{DG}=\frac{4}{3}$，设 $CG=4x$ 米，则 $DG=3x$ 米，在 Rt△CDG 中利用勾股定理，可求出 x，即可知 CG 的长度，即得到答案．

【详解】

解：如图，延长 AB 交 ED 的延长线于 F，过 C 作 $CG\perp EF$ 于 G，

则 $BF=CG$，

在 Rt△CDG 中，$i=\dfrac{CG}{DG}=1:0.75=\dfrac{4}{3}$，$CD=10$ 米，

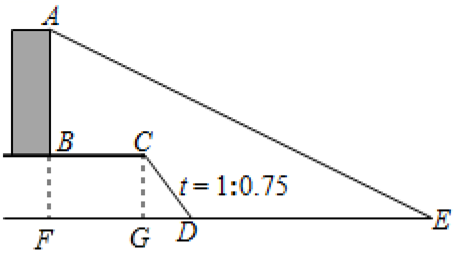
设 $CG=4x$ 米，则 $DG=3x$ 米，

由勾股定理得：$(4x)^2+(3x)^2=10^2$，

解得：$x_1=2$，$x_1=-2$（舍），

∴$CG=8$（米），$DG=6$（米），

∴$BF=CG=8$ 米，即平台距地面的高度为 8 米，



故答案为：8 米．

【点睛】

本题考查勾股定理的应用，理解题干中斜坡的坡度 i 的意义再结合勾股定理解三角形是解答本题的关键．

13．$\dfrac{6}{13}$

【分析】

设直角三角形的长直角边边长为 a，短直角边边长为 b，根据面积列出等式，求得 a 与 b 的关系，再根据三角函数的定义求解即可．

【详解】

解：设直角三角形的长直角边边长为 a，短直角边边长为 b，

由题意可知 $a^2+b^2=130, (a-b)^2=10$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

∵ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

∴ $ab=60$

∴ $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{6}{13}$

故答案为 $\dfrac{6}{13}$．

【点睛】

此题主要考查了三角函数的定义，涉及到了勾股定理、完全平方公式等内容，熟练掌握有关知识是解题的关键．

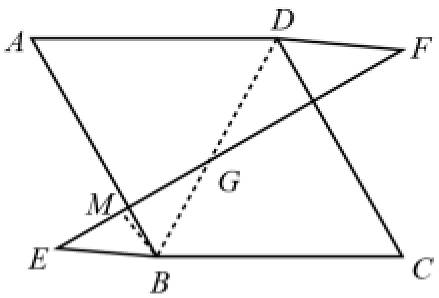
14．$3\sqrt{10}$

【分析】

连接 BD 交 EF 于点 G，过点 B 作 $BM\perp EF$，先证明□DFG∽□BEG，可得 $EG=\frac{20}{3}$，由 $\sin\angle BEF=\frac{3}{5}$，得 $BM=\frac{12}{5}$， $EM=\frac{16}{5}$，结合勾股定理得 $BG=\frac{4}{3}\sqrt{10}$，进而即可求解．

【详解】

解：连接 BD 交 EF 于点 G，过点 B 作 $BM\perp EF$，



$\because BE\,//\,DF$，

$\therefore$□DFG∽□BEG，

$\therefore \frac{FG}{EG}=\frac{DF}{BE}=\frac{5}{4}$，

$\because FG+EG=EF=15$，

$\therefore EG=15\times\frac{4}{9}=\frac{20}{3}$，

$\because \sin\angle BEF=\frac{3}{5}$，

$\therefore \frac{BM}{BE}=\frac{3}{5}$，即： $BM=\frac{3}{5}BE=\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5}$，

$\therefore EM=\sqrt{BE^2-BM^2}=\frac{16}{5}$，

$\therefore MG=\frac{20}{3}-\frac{16}{5}=\frac{52}{15}$，

$\therefore BG=\sqrt{MG^2+BM^2}=\sqrt{\left(\frac{52}{15}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$，

$\therefore BD=\frac{9}{4}BG=\frac{9}{4}\times\frac{4}{3}\sqrt{10}=3\sqrt{10}$，

$\because$在菱形 $ABCD$， $\angle ABC=120°$，

$\therefore\angle C=60°$，$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$，

$\therefore\triangle DBC$是等边三角形，

$\therefore BC=BD=3\sqrt{10}$，

故答案是：$3\sqrt{10}$．

【点睛】

本题主要考查菱形的性质，勾股定理，解直角三角形，相似三角形的判定和性质，添加辅助线，构造直角三角形和相似三角形，是解题的关键．

15．$\frac{1}{2}$

【分析】

先求出$\angle AOB$，再求出$\overset{\frown}{AB}$的长，则围成圆锥的底面的周长等于弧长，从而求出底面半径．

【详解】

如图，连接OB，过B作$BC//AO$交网格线于点C，

则$OB=2,BC=1$

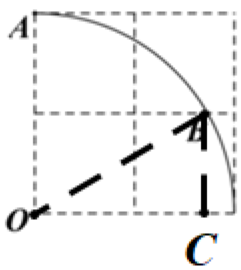
$\because\sin\angle BOC=\frac{BC}{OB}=\frac{1}{2}=\sin 30°$

$\therefore\angle AOB=90°-\angle BOC=60°$

设$\overset{\frown}{AB}$为l,则$l=\frac{60}{360}\times 2\pi\times 2=\frac{2}{3}\pi$，

设底面半径为r，则$2\pi r=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore r=\frac{1}{3}$



故答案为：$\frac{1}{3}$．

【点睛】

本题考查了网格问题，锐角三角函数实际应用，扇形面积公式，圆锥底面积，求出$\angle AOB$是解题的关键．

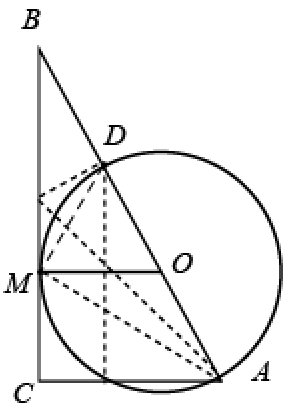
16．$\frac{4}{3}<AD<2$

【分析】

以 AD 为直径，作⊙O与 BC 相切于点 M，连接 OM，求出此时 AD 的长；以 AD 为直径，作⊙O，当点 D 与点 B 重合时，求出 AD 的长，进入即可得到答案．

【详解】

解：以 AD 为直径，作⊙O与 BC 相切于点 M，连接 OM，则 $OM\perp BC$，此时，在 $Rt\triangle ABC$ 的直角边上存在 3 个不同的点分别和点 A、D 成为直角三角形，如图，



∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°,\angle CBA=30°,AC=1$，

∴AB=2，

∵$OM\perp BC$，

∴$\sin 30°=\dfrac{OM}{OB}=\dfrac{1}{2}$，

设 OM=x，则 AO=x，

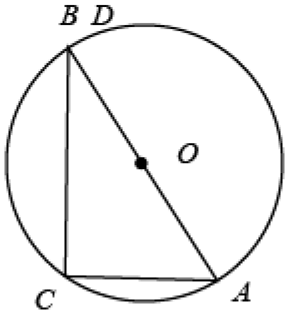
∴$\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{1}{2}$，解得：$x=\dfrac{2}{3}$，

∴$AD=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$，

以 AD 为直径，作⊙O，当点 D 与点 B 重合时，如图，此时 AD=AB=2，

∴在 $Rt\triangle ABC$ 的直角边上存在 4 个不同的点分别和点 A、D 成为直角三角形的三个顶点，则 AD 长的取值范围是：$\dfrac{4}{3}<AD<2$．

故答案是：$\dfrac{4}{3}<AD<2$．



【点睛】

本题主要考查圆的综合问题，熟练掌握圆周角定理的推论，解直角三角形，画出图形，分类讨论，是解题的关键．

17．5

【分析】

在点 B'到达 B 之前，重叠部分的面积在增大，当点 B'到达 B 点以后，且点 C'到达 C 以前，重叠部分的面积不变，之后在 B'到达 C 之前，重叠部分的面积开始变小，由此可得出 $B'C'$的长度为 a，BC 的长度为 $a+3$，再根据△ABC 的面积即可列出关于 a 的方程，求出 a 即可．

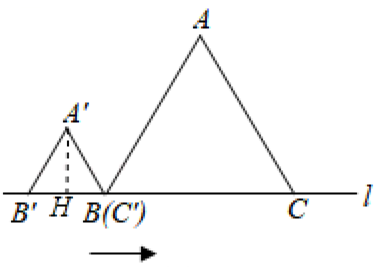
【详解】

解：当点 B'移动到点 B 时，重叠部分的面积不再变化，

根据图象可知 $B'C'=a$，$S_{\triangle A'B'C'}=\sqrt{3}$，

过点 A'作 $A'H\perp B'C'$，

则 $A'H$ 为△$A'B'C'$的高，



(1)

∵△$A'B'C'$是等边三角形，

∴$\angle A'B'H=60°$，

∴$\sin60°=\frac{A'H}{A'B'}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$A'H=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

∴$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a$，即$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，

解得 $a=-2$（舍）或 $a=2$，

当点 C' 移动到点 C 时，重叠部分的面积开始变小，

根据图像可知 $BC=a+3=2+3=5$，

∴△ABC 的边长是 5，

故答案为 5．

【点睛】

本题主要考查动点问题的函数图象和三角函数，关键是要分析清楚移动过程可分为哪几个阶段，每个阶段都是如何变化的，先是点 B' 到达 B 之前是一个阶段，然后点 C' 到达 C 是一个阶段，最后 B' 到达 C 又是一个阶段，分清楚阶段，根据图象信息列出方程即可．

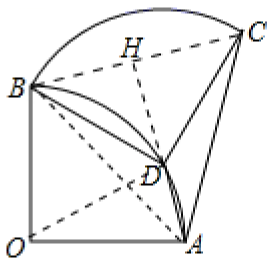
18．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【分析】

如图，连 OD、AB、BC，延长 AD 交 BC 于 H 点，由旋转的性质可得 $BD=BO=OD=CD=OA$，$\angle BDC=90°$，可得△BOD 为等边三角形，可证□ABC 是等边三角形，由线段垂直平分线的性质可得 AH 垂直平分 BC，由等腰直角三角形的性质和等边三角形的性质可得 $AC=2CH$，$AD=\sqrt{3}CH-CH$，即可求解．

【详解】

解：如图，连 OD、AB、BC，延长 AD 交 BC 于 H 点，



∵将扇形 OAB 绕点 B 逆时针旋转，得到扇形 BDC，若点 O 刚好落在弧 AB 上的点 D 处，

∴ $BD=BO=OD=CD=OA$，$\angle BDC=90°$，

∴□OBD 是等边三角形，

∴ $\angle OBD=60°$，即旋转角为 $60°$，

∴ $\angle ABC=\angle OBD=60°$，又可知 $AB=BC$，

∴□ABC 是等边三角形，

∵ $AB=AC$，$BD=CD$，

∴ AH 垂直平分 BC，

$\therefore \angle CAH = 30^\circ$，

$\therefore AC = 2CH$，

$\therefore AH = CH \div \tan 30^\circ = \sqrt{3}CH$，

$\because BD = CD$，$\angle BDC = 90^\circ$，$DH \perp BC$，

$\therefore DH = CH$，

$\therefore AD = \sqrt{3}CH - CH$，

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$．

【点睛】

本题考查图形旋转，等边三角形判定与性质，垂直平分线的判定，特殊角锐角三角函数，等腰直角三角形判定与性质，掌握图形旋转，等边三角形判定与性质，垂直平分线的判定，特殊角锐角三角函数，等腰直角三角形判定与性质是解题关键．

19．（1）$\frac{5}{2}$；（2）1．

【分析】

（1）将 tan45°=1，sin30°=$\frac{1}{2}$，cos30°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，tan60°=$\sqrt{3}$分别代入，再计算解题；

（2）将 cos60°=$\frac{1}{2}$，cos45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，tan²30°=$(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{1}{3}$分别代入，再计算解题．

【详解】

解：（1）2tan45°•sin30°+cos30°•tan60°

$=2\times1\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$

$=1+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{2}$；

（2）cos60°－$\frac{\sqrt{2}}{2}$cos45°+3tan²30°

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}$

$=1$．

【点睛】

本题考查特殊角的锐角函数值、锐角三角函数值的混合运算等知识，是重要考点，掌握相关知识是解题关键．

20．$a=2\sqrt{3}$ 、 $b=2$、$c=4$

【分析】

利用三角形内角和定理构建方程组求出$\angle A$，ÐB的值，再利用正切的定义得$a=\sqrt{3}b$，解方程组求出a，b，即可解决问题．

【详解】

解：由题意知：$\begin{cases}\angle A-\angle B=30^\circ \\ \angle A+\angle B=90^\circ\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}\angle A=60^\circ \\ \angle B=30^\circ\end{cases}$，

$\because \tan A=\dfrac{a}{b}$，

$\therefore a=b\tan A=b\tan 60^\circ=\sqrt{3}b$，

由$\begin{cases}a-b=2\sqrt{3}-2 \\ a=b\sqrt{3}\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=2\sqrt{3} \\ b=2\end{cases}$，

$\because \sin B=\dfrac{b}{c}$，

$\therefore c=2b=4$．

【点睛】

本题考查解直角三角形，特殊角的三角函数值等知识，解题的关键是学会利用数量关系构建方程组解决问题．

21．（1）见解析；（2）$3\sqrt{5}-3$

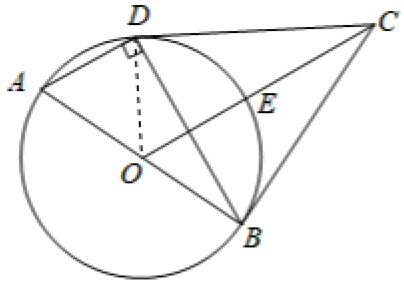
【分析】

（1）连接 OD，根据等腰三角形的性质得到$\angle ODB=\angle OBD$，由垂直的定义得到$\angle ADB=90^\circ$，确定$\angle ABD+\angle A=90^\circ$，等量代换得到$\angle ODB+\angle BDC=90^\circ$，求得 $OD\perp CD$，根据切线的定义即可得到结论；

（2）根据切线的性质得到$\angle CDO=90^\circ$，根据余角的性质得到$\angle COD=\angle BDC$，解直角三角形即可得到结论．

【详解】

解：（1）证明：连接 OD，



∵$OD=OB$，

∴$\angle ODB=\angle OBD$，

∵$BD\perp AD$，

∴$\angle ADB=90°$，

∴$\angle ABD+\angle A=90°$，

∵$\angle BDC=\angle BAD$，

∴$\angle ODB+\angle BDC=90°$，

∴$OD\perp CD$，

∴CD 是⊙O 的切线；

（2）∵CD 是⊙O 的切线，

∴$\angle CDO=90°$，

∵$\cos\angle BDC=\frac{1}{3}$，$\angle BDC=\angle BAD$．

∴$\cos\angle BAD=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，

∵$AD=2$，

∴$AB=6$，

∴$OD=OE=3$，

∵$CD=6$，

∴$OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=3\sqrt{5}$，

∴$CE=CO-OE=3\sqrt{5}-3$．

【点睛】

本题考查了切线的判定和性质，等腰三角形的性质，解直角三角形，正确的识别图形是解题的关键．

22．$20\sqrt{2}$cm

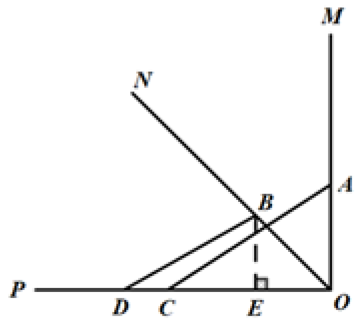
【分析】

题目中出现了特殊角度 $45°$ 和 $30°$，因此可以构造直角三角形，再利用特殊角的三角函数值，即可求解

出对应线段的长度．

【详解】

解：如图，过点 B 作 $BE\perp OD$ 于点 E，



由题意可知：$\angle BOE=45°$

$\because BO=20, BE\perp OD$

$\therefore BE=OE=\sin 45° BO=10\sqrt{2}$

在 Rt□BDE 中，$\angle BDE=30°$

$\therefore \sin\angle BDE=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore BD=20\sqrt{2}$

$\because BD=AC$

$\therefore AC=20\sqrt{2}$

答：滑动支架 AC 的长为 $20\sqrt{2}\text{cm}$．

【点睛】

本题主要考查了特殊角度的三角函数值，在遇到特殊角度时，适当添加垂线，构造直角三角形是解决本题的关键．

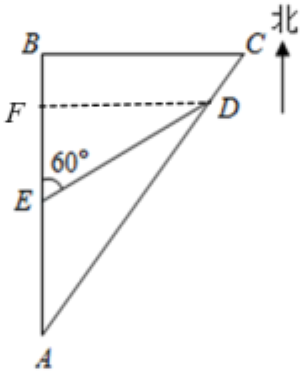
23．乙船与 C 码头之间的距离为 11.8 海里

【分析】

过 D 作 $DF\perp BE$ 于 F，根据题意可得$\angle FDE=30°$，所以 $DE=2FE$，设 $FE=x$ 海里，则 $DE=2x$ 海里，可得 $DF=\sqrt{3}x$ 海里，再根据锐角三角函数列出方程求出 x 的值，进而可得结果．

【详解】

解：过 D 作 $DF\perp BE$ 于 F，



∴$\angle DFE=90°$

∵$\angle DEF=60°$，

∴$\angle FDE=30°$，

∴$DE=2FE$，

设 $FE=x$ 海里，则 $DE=2x$ 海里，

∴ $DF=\sqrt{3}x$ 海里，

在 $Rt\triangle ADF$ 中，$\angle A=37°$，

∴ $AF=\dfrac{DF}{\tan 37°}\approx\dfrac{\sqrt{3}}{0.75}x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x$，

$AD=\dfrac{DF}{\sin 37°}\approx\dfrac{\sqrt{3}x}{0.60}=\dfrac{5\sqrt{3}x}{3}$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=37°$，$BC=60$ 海里，

∴ $AB=\dfrac{BC}{\tan 37°}\approx\dfrac{60}{0.75}=80$（海里），

$AC=\dfrac{BC}{\sin 37°}\approx\dfrac{60}{0.60}=100$（海里），

∵$BE=AB-AF+EF$，

∴ $40=80-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+x$，

解得 $x=\dfrac{160\sqrt{3}+120}{13}$，

∴ $CD=AC-AD=100-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{160\sqrt{3}+120}{13}\approx 11.8$（海里）．

答：乙船与 C 码头之间的距离为 11.8 海里．

【点睛】

本题考查的是解直角三角形的应用，掌握利用锐角三角函数建立角与边之间的联系是解题的关键.

24．（1）见解析；（2）$\dfrac{5}{4}$

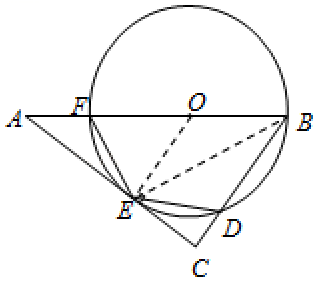
【分析】

（1）连接OE，BE，因为$DE=EF$，所以$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}$，从而易证$\angle OEB=\angle DBE$，所以$OE//BC$，继而可证明$BC\perp AC$；

（2）设$\odot O$的半径为r，则$AO=5-r$，在RtΔAOE中，$\sin A=\frac{OE}{OA}=\frac{r}{5-r}=\frac{3}{5}$，从而可求出$r$的值．

【详解】

解：（1）证明：连接OE，BE，



$\because DE=EF$，

$\therefore \overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}$，

$\therefore \angle OBE=\angle DBE$，

$\because OE=OB$，

$\therefore \angle OEB=\angle OBE$，

$\therefore \angle OEB=\angle DBE$，

$\therefore OE//BC$，

$\because \odot O$与边AC相切于点E，

$\therefore OE\perp AC$，

$\therefore BC\perp AC$，

$\therefore \angle C=90^\circ$；

（2）在ΔABC，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$\sin A=\frac{3}{5}$，

$\therefore AB=5$，

设$\odot O$的半径为r，则$AO=5-r$，

在RtΔAOE中，$\sin A=\frac{OE}{OA}=\frac{r}{5-r}=\frac{3}{5}$，

$\therefore r=\frac{15}{8}$，

$\therefore AF=5-2\times\frac{15}{8}=\frac{5}{4}$．

【点睛】

本题考查了圆中弧、弦之间的关系，圆周角定理的推论，切线的性质和解直角三角形等知识，属于常

考题型，熟练掌握上述基本知识是解答的关键．

25．（1）$DE=37\,cm$；（2）$4cm$；

【分析】

（1）如图2中，作$BO\perp DE$于O．解直角三角形求出OD即可解决问题．

（2）作$DF\perp l$于F，$CP\perp DF$于P，$BG\perp DF$于G，$CH\perp BG$于H．则四边形$PCHG$是矩形，求出DF，再求出DF-DE即可解决问题．

【详解】

解：（1）作$BO\perp DE$于点F，则$\angle BOE=\angle BOD=90°$，

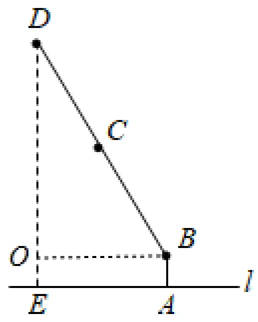


图2

$\because DE\perp l$，$AB\perp l$，

$\therefore \angle OEA=\angle BAE=90°=\angle BOE$．

$\therefore$四边形$ABOE$为矩形．

$\therefore EO=AB=5cm$，$EO\parallel AB$，

$\because EO\parallel AB$，

$\therefore \angle D+\angle ABD=180°$，

$\because \angle ABD=143°$，

$\therefore \angle D=37°$，

在$Rt\triangle BDO$中，$\because \angle BOD=90°$，

$\therefore \dfrac{DO}{DB}=\cos D=\cos 37°=0.8$，

$\because DB=DC+BC=20+20=40$（$cm$），

$\therefore DO=40\times 0.8=32$（$cm$），

$\therefore DE=DO+EO=32+5=37$（$cm$），

答：连杆端点D离桌面l的高度DE为$37cm$；

（2）如图3，作$DF\perp l$于F，$CP\perp DF$于P，$BG\perp DF$于G，$CH\perp BG$于H．则四边形$PCHG$是矩形，

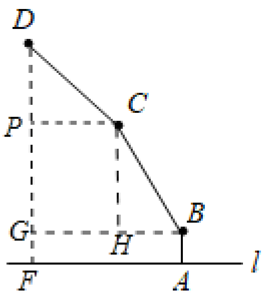


图3

∵$\angle CBH=53°$，$\angle CHB=90°$，

∴$\angle BCH=37°$，

∵$\angle BCD=180°-16°=164°$，$\angle DCP=37°$，

∴$CH=BC\sin53°=20\times0.8=16$（$cm$），$DP=CD\sin37°=20\times0.6=12$（$cm$），

∴$DF=DP+PG+GF=DP+CH+AB=12+16+5=33$（$cm$），

∴下降高度：$DE-DF=37-33=4$（cm）．

答：此时连杆端点D离桌面l的高度减小了$4cm$．

【点睛】

本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题．

26．（1）$6cm$；（2）$52.5cm$．

【分析】

（1）过M作与AC平行的直线，与OA、FC分别相交于D、E．那么求BM的长就转化为求DA的长，而要求出DA，必须先求出OD，在直角三角形ODM中，$\sin\alpha$的值，且铁环的半径为$OM=30$，可求得DM的值，从而求得DA的值；

（2）因为$\angle OMD+\angle FME=\angle OMD+\angle AOM=90°$，得到$\angle FME=\angle AOM$，再得到$\cos\alpha=\cos\angle AOM=\frac{OD}{OM}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$，在在$Rt\triangle FEM$中，利用三角函数的定义即可求解．

【详解】

解：（1）如图2，过点M作$MD\perp OA$交OA于点D，

在$Rt\triangle ODM$中，$\sin\alpha=\frac{DM}{OM}=\frac{3}{5}$，$OM=30$

∴$DM=18cm$

∴$OD=\sqrt{30^2-18^2}=24\,cm$，

∴$AD=BM=30-24=6cm$；

（2）如图2，延长DM交CF于点E，

∵MF是$\odot O$的切线

∴$\angle OMF=90°$

∴$\angle OMD+\angle FME=90°$

∵$\angle OMD+\angle AOM=90°$

∴$\angle FME=\angle AOM=\alpha$，

∴$\cos\alpha=\cos\angle AOM=\dfrac{OD}{OM}=\dfrac{24}{30}=\dfrac{4}{5}$

∵$ME=AC-DM=60-18=42cm$，

∴在$Rt\triangle FEM$中，$\cos\alpha=\dfrac{ME}{MF}=\dfrac{4}{5}$

∴$MF=52.5cm$．

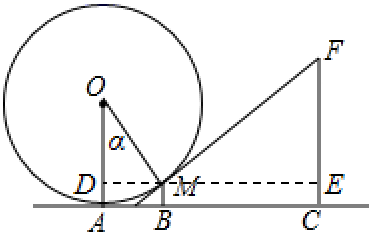


图2

【点睛】

考查了解直角三角形的应用，解此题的关键是把实际问题转化为数学问题，只要把实际问题抽象到解直角三角形中即可解答．

27．（1）（1，$\dfrac{16}{3}$）；（2）8；（3）① N（$-\dfrac{8}{3},\dfrac{44}{27}$）；②存在点$P$，点$P$的坐标为（0，$\dfrac{10+\sqrt{46}}{6}$）或（0，$\dfrac{10-\sqrt{46}}{6}$）．

【分析】

（1）将解析式配方为顶点式，即可得到顶点坐标；

（2）先分别求出点A、B、C的坐标，再根据三角形的面积公式计算得到答案；

（3）①先求出直线AC的解析式，设点M的坐标为（$m,\dfrac{4}{3}m+4$），根据$MP:BP=2:1$，求出m，得到直线BM的解析式，解$\begin{cases}y=-\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+4\\ y=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}\end{cases}$，即可得到点$N$的坐标；

②先求出$\tan\angle ACO=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{3}{4}$，$AC=5$，若存在点$P$，在$P$点的运动过程中，$\tan\angle APD$的值是否能为$\dfrac{3}{4}$，则$\angle APD=\angle ACO$，推出$\angle CAP=\angle OPD$，过点$D$作$DE\perp AC$于点$E$，设点$P$的坐标为（0，$n$），根据

$\tan\angle CAP=\tan\angle OPD$，得到 $\frac{PE}{AE}=\frac{OD}{OP}$，列得 $\frac{\frac{3}{5}(4-n)}{\frac{4}{5}n+\frac{9}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{n}$，计算求出 n 的值，根据 $0\le n\le 4$ 判断得出点 P 的存在性．

【详解】

解：（1）$\because y=-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4=-\frac{4}{3}(x+1)^2+\frac{16}{3}$，

$\therefore D$ 点的坐标为（1，$\frac{16}{3}$），

故答案为：（1，$\frac{16}{3}$）；

（2）令 $y=-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4$ 中 $y=0$，得 $-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4=0$，解得 $x_1=-3, x_2=1$，

令 $x=0$，得 $y=4$，

$\therefore A$（-3,0），B（1,0），C（0,4），

$\therefore AB=4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$；

（3）①$\because A$（-3,0），C（0,4），

$\therefore$直线 AC 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+4$，

设点 M 的坐标为（$m,\frac{4}{3}m+4$），

$\because MP:BP=2:1$，

$\therefore -m$：1=2:1，

解得 $m=-2$，

$\therefore M$（-2，$\frac{4}{3}$），

$\therefore$直线 BM 的解析式为 $y=-\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}$

解 $\begin{cases} y=-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4 \\ y=-\frac{4}{9}x+\frac{4}{9} \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases}$，

$\begin{cases} x_2=-\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{44}{27} \end{cases}$，

$\therefore N$（$-\frac{8}{3},\frac{44}{27}$）；

②∵$OA=3$，$OC=4$，

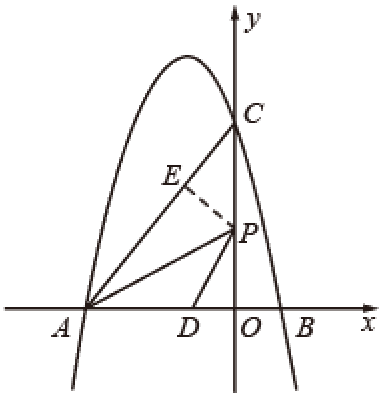
∴$\tan\angle ACO=\frac{OA}{OC}=\frac{3}{4}$，$AC=5$，

若存在点 P，在 P 点的运动过程中，$\tan\angle APD$的值能为$\frac{3}{4}$，则$\angle APD=\angle ACO$，

∵$\angle APO=\angle APD+\angle OPD=\angle ACO+\angle CAP$，

∴$\angle CAP=\angle OPD$，

过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，



设点 P 的坐标为（0，n），

∴$CP=4-n$，

∴$CE=\frac{4}{5}(4-n),PE=\frac{3}{5}(4-n)$，

∴$AE=5-\frac{4}{5}(4-n)=\frac{4}{5}n+\frac{9}{5}$，

∵$D(-\frac{1}{2},0)$，

∴$OD=\frac{1}{2}$，

∵$\tan\angle CAP=\tan\angle OPD$，

∴$\frac{PE}{AE}=\frac{OD}{OP}$，

∴$\frac{\frac{3}{5}(4-n)}{\frac{4}{5}n+\frac{9}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{n}$，

解得$n_1=\frac{10+\sqrt{46}}{6},n_2=\frac{10-\sqrt{46}}{6}$，

∵$0\le n\le 4$，

∴存在点 P，点 P 的坐标为（0，$\frac{10+\sqrt{46}}{6}$）或（0，$\frac{10-\sqrt{46}}{6}$）．

【点睛】

此题考查二次函数的综合题，将二次函数解析式化为顶点式形式，函数图象与坐标轴的交点问题，两个函数图象的交点坐标，锐角三角函数，解一元二次方程，综合掌握各知识点并应用解决问题是解题的关键．