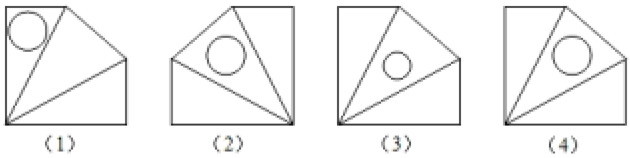
# 2022-2023 学年八年级数学期中模拟测试

（考试时间：90 分钟　试卷满分：120 分）

## 第I卷（选择题 共 30 分）

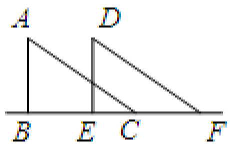
一、选择题：本题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．下列四个图形是全等图形的是（　　）



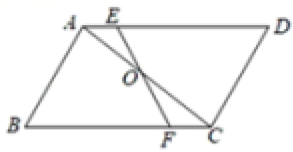
A．（1）和（3）　　B．（2）和（3）　　C．（2）和（4）　　D．（3）和（4）

2．如图，$Rt\triangle ABC$沿直角边$BC$所在的直线向右平移得到$\triangle DEF$，下列结论错误的是（　　）




A．$\triangle ABC\cong\triangle DEF$　　B．$\angle DEF=90°$　　C．$BE=EC$　　D．$\angle D=\angle A$

3．如图，四边形$ABCD$中，点$E$在$AD$上，点$F$在$BC$上，线段$EF$与$AC$交于点$O$且互相平分，若$AD=BC=10$，$EF=CD=6$，则四边形$EFCD$的周长是（　　）

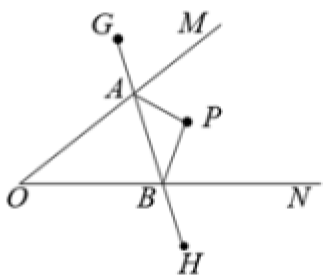



A．16　　B．20　　C．22　　D．26

4．下面 4 个汽车标志图案中，不是轴对称图形的是（　　）

A．　　B．　　C．　　D．

5．如图，$\angle MON$内有一点$P$，$P$点关于$OM$的轴对称点是$G$，$P$点关于$ON$的轴对称点是$H$，$GH$分别交$OM$、$ON$于$A$、$B$点．若$GH$的长为 15cm，则$\triangle PAB$的周长为（　　）

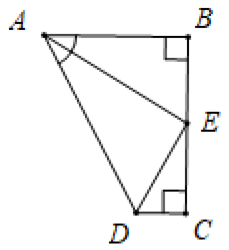


A．5cm　　　　B．10cm　　　　C．20cm　　　　D．15cm

6．点M（3，-4）关于y轴的对称点的坐标是（　　）

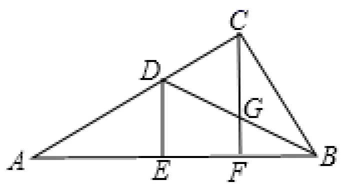
A．（3，4）　　　　B．（-3，4）　　　　C．（-3，-4）　　　　D．（-4，3）

7．如图，点$E$是$BC$的中点，$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，$AE$平分$\angle BAD$，下列结论：①$\angle AED=90^{\circ}$；②$\angle ADE=\angle CDE$；③$DE=BE$；④$AD=AB+CD$．其中正确的是（ ）




A．①②④　　　　B．①②③④　　　　C．②③④　　　　D．①③

8．如图，$Rt\triangle ABC$中，$CF$是斜边$AB$上的高，角平分线$BD$交$CF$于$G$，$DE\perp AB$于$E$，则下列结论①$\angle A=\angle BCF$，②$CD=CG$，③$AD=BD$，④$BC=BE$中正确的个数是（　　）



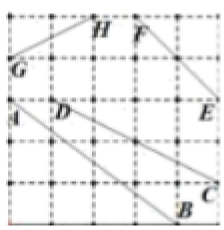

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

9．在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为$a$、$b$、$c$，下列条件中，不能判断$\triangle ABC$是直角三角形的是（　　）

A．$a=3$，$b=4$，$c=5$　　　　B．$a=b$，$\angle C=45^{\circ}$

C．$\angle A$：$\angle B$：$\angle C=1$：2：3　　　　D．$a=9$，$b=40$，$c=41$

10．如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长都为1，有$AB$，$CD$，$EF$，$GH$四条线段，其中长度是$2\sqrt{5}$的线段是（　　）

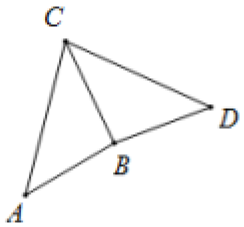



A．$AB$　　　　B．$CD$　　　　C．$EF$　　　　D．$GH$

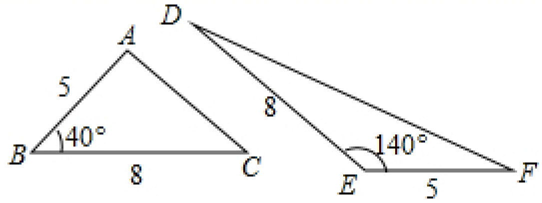
## 第II卷（非选择题 共90分）

二、填空题，每小题4分，共28分。

11．如图，$\triangle ABC\cong\triangle DBC$，$\angle A=45°$，$\angle ACD=80°$，则$\angle DBC$的度数为_______________°．



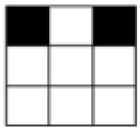

第 11 题图



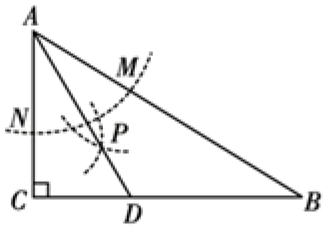

第 12 题图

12．如图，若△$ABC$和△$DEF$的面积分别为$S_1$、$S_2$，则$S_1$与$S_2$的数量关系为_______________．

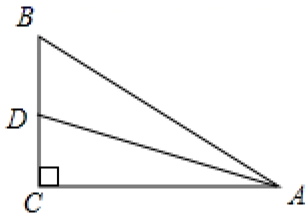
13．如图，在 3×3 的正方形网格中有两个小正方形被涂黑，再将图中其余小正方形任意一个涂黑，使得整个图形（包括网格）构成一个轴对称图形，那么涂法共有__________种．



14．如图，在△$ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，以$A$为圆心，任意长为半径画弧分别交$AB$、$AC$于点$M$、$N$，再分别以点$M$，$N$为圆心，大于$\frac{1}{2}MN$的长为半径画弧，两弧交于点$P$，连接$AP$并延长交$BC$于$D$；则下列说法：①$AD$平分$\angle BAC$；②$\angle ADC=60°$；③点$D$在线段$AB$的垂直平分线上④连接$DM$，$DN$，则$DM=DN$其中正确的是_______________．（只填序号）



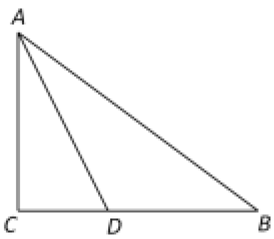

第 14 题图




第 15 题图

15．如图，△$ABC$中，$\angle C=90°$，$AD$平分$\angle BAC$，$AB=12$，$CD=4$，则$\triangle ABD$的面积为____________．

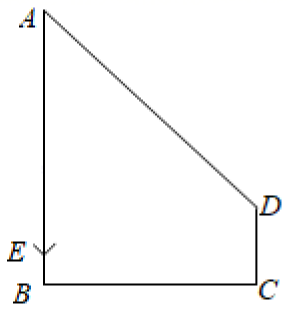
16．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，$AD$是$\triangle ABC$的角平分线，则$BD$的长是__________．




17．已知：有一小块$Rt$△$ABC$的绿地，量得两直角边长分别是$AC=8\text{m}$，$BC=6\text{m}$，现在要将这块绿地扩充成等腰$\triangle ABD$，且扩充部分（△$ADC$）是以$8\text{m}$为直角边长的直角三角形，扩充部分的边$CD$长为_______________．

三、解答题，共 62 分。

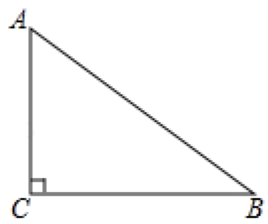
18．如图，在荡秋千时，绳子最低点 $E$ 离地面 1m，荡到最高点 $D$ 时离地面 4m，此时水平位移 $BC$ 是 6m，求绳子长．



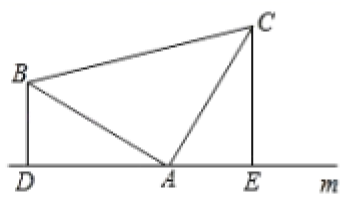

19．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$．

（1）请利用无刻度的直尺和圆规在线段 $BC$ 上作一点 $D$，使点 $D$ 到边 $AB$ 的距离等于 $CD$．（不写作法，保留作图痕迹）

（2）若 $AB=15$，$BC=12$，求 $CD$ 的长．



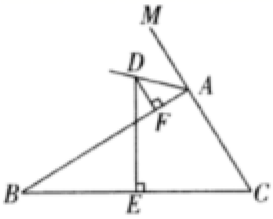

20．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，直线 $m$ 经过点 $A$，$BD\perp$直线 $m$，$CE\perp$直线 $m$，垂足分别为 $D$，$E$．



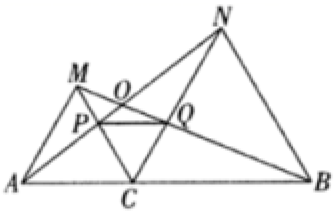

（1）求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$；

（2）若 $BD=2$cm，$CE=4$cm，求 $DE$ 的长．

21．如图．在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，边 $BC$ 的垂直平分线 $DE$ 交$\triangle ABC$的外角$\angle BAM$的平分线于点 $D$，垂足为 $DF\perp AB$，垂足为 $F$．求证：$BF=AC+AF$．




22．如图，$C$为线段$AB$上一点，$\triangle ACM$，$\triangle CBN$是等边三角形．$AN$，$BM$，相交于点$O$，$AN$，$CM$，，交于点$P$，$BM$，$CN$，交于点$Q$，连接$PQ$．




（1）求证：$AN = BM$；

（2）求$\angle AOB$的度数；

（3）求证：$PQ//AB$

23．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线$MN$经过点$C$，且$AD\perp MN$于$D$，$BE\perp MN$于$E$．

（1）当直线$MN$绕点$C$旋转到图1的位置时

①请说明$\triangle ADC \cong \triangle CEB$的理由；

②请说明$DE=AD+BE$的理由；

（2）当直线$MN$绕点$C$旋转到图2的位置时，$DE$、$AD$、$BE$具有怎样的等量关系？请直接在横线上写出这个等量关系：________________

（3）当直线$MN$绕点$C$旋转到图3的位置时，$DE$、$AD$、$BE$具有怎样的等量关系？请直接在横线上写出这个等量关系：________________．

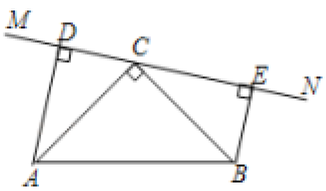


图 1

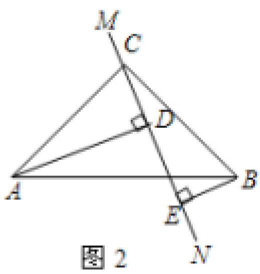


图 2

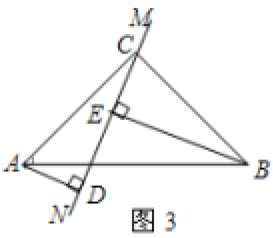


图 3

# 参考答案

一、选择题：本题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【分析】

根据全等形是能够完全重合的两个图形进行分析判断．

【详解】

解：能够完全重合的两个图形叫做全等形．由图可得，（2）、（3）、（4）图中的圆形在中间的三角形上，（1）的圆在一边，所以，排除（1）；又（2）、（3）、（4）图中的圆，很明显（3）图中的圆小于（2）、（4）中的圆；所以，排除（3）；所以，能够完全重合的两个图形是（2）、（4）．故选：$C$．

【点睛】

本题考查了全等形的定义：能够完全重合的两个平面图形叫做全等形，全等形的形状相同、大小相等．

2、C

【分析】

根据平移的性质，结合图形，对选项进行一一分析，选择正确答案．

【详解】

解：A、$Rt\triangle ABC$沿直角边$BC$所在的直线向右平移得到$\triangle DEF$，则$\triangle ABC\cong\triangle DEF$成立，故正确，不符合题意；

B、$\triangle DEF$为直角三角形，则$\angle DEF=90^{\circ}$成立，故正确，不符合题意；

C、$BE=EC$不能成立，故错误，符合题意；

D、$\angle D=\angle A$为对应角，正确，不符合题意；

故选：C．

【点睛】

本题考查了平移的基本性质：①平移不改变图形的形状和大小；②经过平移，对应点所连的线段平行且相等，对应线段平行且相等，对应角相等．

3、C

【分析】

由题意线段$EF$与$AC$交于点$O$且互相平分，即可得出$OE=OF$，$OA=OC$，由对顶角相等可知$\angle EOA=\angle FOC$，即利用“$SAS$”可判断$\triangle EOA\cong\triangle FOC$，得出$AE=CF$，即得到

$L_{四边形EFCD}=EF+CD+CF+DE=EF+CD+AD$，即可求解．

【详解】

∵线段 $EF$ 与 $AC$ 交于点 $O$ 且互相平分，

∴ $OE=OF$， $OA=OC$．

∵ $\angle EOA=\angle FOC$，

∴ $\triangle EOA\cong\triangle FOC(SAS)$，

∴$AE=CF$．

∵ $L_{四边形EFCD}=EF+CD+CF+DE$，

∴ $L_{四边形EFCD}=EF+CD+AE+DE=EF+CD+AD=6+6+10=22$．

故选：C．

【点睛】

本题考查三角形全等的判定和性质．找出三角形全等的判定条件是解答本题的关键．

4、A

【分析】

根据轴对称图形的概念求解即可．轴对称图形：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．

【详解】

解：A、不是轴对称图形，故本选项符合题意；

B、是轴对称图形，故本选项不符合题意；

C、是轴对称图形，故本选项不符合题意；

D、是轴对称图形，故本选项不符合题意．

故选：A．

【点睛】

本题考查了轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合．

5、D

【分析】

先根据轴对称的性质得出 $PA=AG$，$PB=BH$，由此可得出结论．

【详解】

解：∵$P$ 点关于 $OM$ 的轴对称点是 $G$，

∴$PA=AG$，

∵$P$点关于$ON$的轴对称点是$H$，

∴$PB=BH$，

∴$\triangle PAB$的周长$=AP+PB+AB=AG+AB+BH=GH=15cm$．

故选：D．

【点睛】

本题考查的是轴对称的性质，熟知如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴上的任意一点到一对对称点的距离相等是解答此题的关键．

6、C

【分析】

根据关于y轴对称点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变，即点P（x，y）关于y轴的对称点P′的坐标是（−x，y）．

【详解】

∵点M（3，−4），

∴关于y轴的对称点的坐标是（−3，−4）．

故选：C．

【点睛】

此题主要考查了关于x轴、y轴对称点的坐标特点，熟练掌握关于坐标轴对称的特点是解题关键．

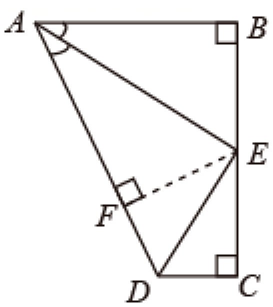
7、A

【分析】

过$E$作$EF\perp AD$于$F$，易证得$Rt\triangle AEF\cong Rt\triangle AEB$，得到$BE=EF$，$AB=AF$，$\angle AEF=\angle AEB$；而点$E$是$BC$的中点，得到$EC=EF=BE$，则可证得$Rt\triangle EFD\cong Rt\triangle ECD$，得到$DC=DF$，$\angle FDE=\angle CDE$，也可得到$AD=AF+FD=AB+DC$，$\angle AED=\angle AEF+\angle FED=\frac{1}{2}\angle BEC=90°$，即可判断出正确的结论．

【详解】

解：过$E$作$EF\perp AD$于$F$，如图，




∵$AB\perp BC$，$AE$平分$\angle BAD$，

$\therefore BE=EF$，$AE=AE$，

$\therefore Rt\triangle AEF\cong Rt\triangle AEB(HL)$

$\therefore AB=AF$，$\angle AEF=\angle AEB$；

而点 $E$ 是 $BC$ 的中点，

$\therefore EC=EF=BE$，所以③错误；

$\because EC=EF$，$ED=ED$，

$\therefore Rt\triangle EFD\cong Rt\triangle ECD(HL)$，

$\therefore DC=DF$，$\angle FDE=\angle CDE$，所以②正确；

$\therefore AD=AF+FD=AB+DC$，所以④正确；

$\therefore \angle AED=\angle AEF+\angle FED=\frac{1}{2}\angle BEC=90°$，所以①正确，

综上：①②④正确，

故选 A

【点睛】

本题考查了三角形全等的判定与性质，角平分线的性质，解题的关键是掌握全等三角形的判定与性质．

8、C

【分析】

①根据直角三角形两角互补的性质即可进行解答；②由于 $BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$\angle ACB=90°$，利用互余关系，故可得出结论；③由于 $DE$ 是否是 $AB$ 的垂直平分线不能确定，可知此小题错误；④由 $HL$ 证明 $\triangle BCD\cong\triangle BED$ 可得出结论．

【详解】

解：①$\because\triangle ABC$ 是直角三角形，

$\therefore\angle A+\angle ABC=90°$，

$\because CF\perp AB$，

$\therefore\angle BCF+\angle ABC=90°$，

$\therefore\angle A=\angle BCF$，故此小题正确；

②$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore\angle DBC=\angle DBA$，

$\because\angle BCD=\angle CFB=90°$，利用互余关系，得 $\angle BGF=\angle BDC=\angle CGD$，

$\therefore CD=CG$，故此小题正确；

③由于 $DE$ 是否是 $AB$ 的垂直平分线不能确定，故此小题错误；

④∵$BD$是$\angle ABC$的平分线，$DE\perp AB$，$\angle ACB=90°$，

∴$DE=CD$，$BD=BD$，

∴$\triangle BCD\cong\triangle BED(HL)$，

∴$BC=BE$，故此小题正确．

故①②④正确．

故选：C．

【点睛】

本题考查了角平分线的性质，等腰三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质．在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角．

9、B

【分析】

A.由勾股定理逆定理得：$3^2+4^2=5^2$，即可判断A正确；

B.由等腰三角形的性质与三角形内角和定理得：$\angle A=\angle B=62.5°$，所以B错误；

C.由三角形内角和定理即可求出$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$，所以C正确；

D.由勾股定理逆定理得：$9^2+40^2=41^2$，即可判断D正确．

【详解】

A.由题可得：$3^2+4^2=25=5^2$满足勾股定理，

∴□$ABC$是直角三角形，故A选项正确；

B.∵$a=b$，

∴$\angle A=\angle B$，

由三角形内角和定理得：∴$\angle A=\angle B=\dfrac{180°-45°}{2}=62.5°$，

∴□$ABC$不是直角三角形，故B选项错误；

C.∵$A:B:C=1:2:3$，

∴设$\angle A=x$，则$\angle B=2x$，$\angle C=3x$，

由三角形内角和定理得：$x+2x+3x=180°$，

解得：$x=30°$，$2x=60°$，$3x=90°$，

∴□$ABC$是直角三角形，故C选项正确；

D. .由题可得：$9^2+40^2=1681=41^2$满足勾股定理，

∴□$ABC$是直角三角形，故D选项正确．

故选：B．

【点睛】

本题考查了直角三角形的判定，一是根据直角三角形的定义：有一个角是直角的三角形是直角三角形，二是根据勾股定理逆定理：如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，则这个三角形是直角三角形，本题的关键在于勾股定理逆定理的求解．

10、B

【分析】

利用勾股定理分别求出四条线段的长度即可得到答案．

【详解】

解：由题意可得：$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$GH=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

故选B．

【点睛】

本题主要考查了勾股定理，解题的关键在于能够熟练掌握勾股定理．

第II卷（非选择题 共90分）

二、填空题，每小题4分，共28分。

11、95

【分析】

根据全等三角形的性质求出$\angle D=\angle A=45°$，$\angle ACB=\angle DCB$，进而可求出$\angle DCB$，再根据三角形内角和定理求出$\angle DBC$的度数即可．

【详解】

解：$\because \triangle ABC \cong \triangle DBC$，$\angle A=45°$，

$\therefore \angle D=\angle A=45°$，$\angle ACB=\angle DCB$，

$\because \angle ACD=80°$，

$\therefore \angle BCD=\angle ACB=40°$，

$\therefore \angle DBC=180°-\angle D-\angle DCB=95°$，

故答案为：95．

【点睛】

本题考查了全等三角形的性质的应用，能根据全等三角形的性质得出$\angle D=\angle A=45°$，$\angle ACB=\angle DCB$是解此题的关键，注意：全等三角形的对应角相等，对应边相等．

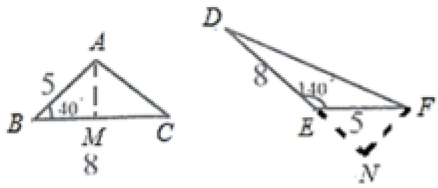
12、$S_1=S_2$##

【分析】

过 $A$ 点作 $AM\perp BC$，过 $F$ 点作 $FN\perp DE$，可证$\triangle ABM\cong\triangle FEN$，得到 $AM=FN$，再根据面积公式计算即可得到答案．

【详解】

解：过 $A$ 点作 $AM\perp BC$，过 $F$ 点作 $FN\perp DE$，如下图：




$\angle FEN=180°-140°=40°$

在 $\triangle ABM$ 与 $\Delta FEN$ 中．

$$\begin{cases}\angle FEN=\angle ABM\\ \angle FNE=\angle ABM\\ AB=EF\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle FEN(AAS)$

$\therefore AM=FN$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}BC\times AM=4AM$，$S_2=\frac{1}{2}DE\times FN=4FN$．

$\therefore S_1=S_2$

故答案为 $S_1=S_2$

【点睛】

本题主要考查了三角形的全等判定和性质，以及三角形的面积公式，灵活运用全等三角形的判定和性质是解题的关键．

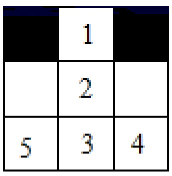
13、5

【分析】

直接利用轴对称图形的性质分析得出答案．

【详解】

解：如图所示：所标数字之处都可以构成轴对称图形．




故答案为：5．

【点睛】

此题主要考查了利用轴对称设计图案，正确掌握轴对称图形的性质是解题关键．

14、①②③④

【分析】

利用作图方法可以判断① ；利用角平分线的定义可以求出$\angle BAD=\angle CAD=30°$，从而可以求出$\angle ADC=60°$，即可判断②；根据$\angle B=\angle BAD$，得到$AD=BD$，即可判断③；证明$\triangle AMD\cong\triangle AND$，即可判断④．

【详解】

解：由作图方法可知$AD$是$\angle BAC$的角平分线，故①正确；

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$，

$\because\angle C=90°$，$\angle B=30°$，

$\therefore\angle BAC=60°$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAD=30°$，

$\therefore\angle ADC=60°$，故②正确；

$\because\angle B=\angle BAD=30°$，

$\therefore AD=BD$，

$\therefore$点$D$在$AB$的垂直平分线上，故③正确；

连接$DM$，$DN$，

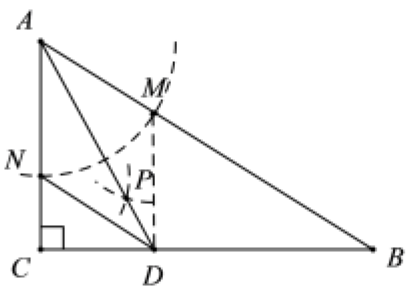
在$\triangle AMD$和$\triangle AND$中

$$\begin{cases}AM=AN\\ \angle NAD=\angle MAD\\ AD=AD\end{cases},$$

$\therefore\triangle AMD\cong\triangle AND$，

$\therefore DM=DN$，故④正确，

故答案为：①②③④．




【点睛】

本题主要考查了角平分线的定义和作图，全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，垂直

平分线的判定等等，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解．

15、24

【分析】

首先过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，由角平分线的性质，即可求得 $DE$ 的长，继而求得 $\triangle ABD$ 的面积．

【详解】

解：过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，

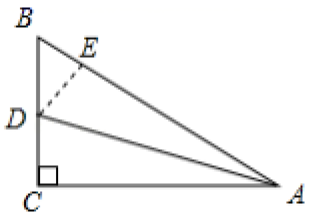
$\because \angle C=90^\circ$， $AD$ 平分 $\angle BAC$， $DE\perp AB$，

$\therefore DE=CD=4$，

又 $\because AB=12$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\square DE=\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$．

故答案为：24．




【点睛】

此题考查了角平分线的性质．此题难度不大，注意掌握辅助线的作法，注意数形结合思想的应用，熟练掌握角平分线的性质是解决本题的关键．

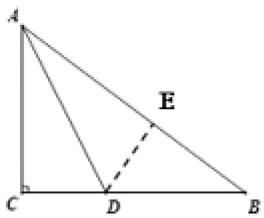
16、$\frac{3}{2}$

【分析】

过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，利用角平分线的性质，可得 $DE=CD$，从而得到 $Rt\square ACD\cong AED$，可得 $AE=AC=3$，然后设 $BD=x$，则 $DE=CD=4-x$，在 $Rt\square BDE$ 中，利用勾股定理，即可求解．

【详解】

解：如图，过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，




$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore DE=CD$，

$\because AD=AD$，

$\therefore Rt\triangle ACD\cong AED(HL)$ ，

∴$AE=AC=3$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=3$，$BC=4$，由勾股定理得：

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$ ，

∴$BE=AB-AE=2$，

设 $BD=x$，则 $DE=CD=4-x$，

在 $Rt\triangle BDE$ 中，$DE^2+BE^2=BD^2$ ，

$\therefore (4-x)^2+2^2=x^2$ ，解得：$x=\frac{3}{2}$ ，

即 $BD=\frac{3}{2}$ ．

故答案为：$\frac{3}{2}$ ．

【点睛】

本题主要考查了角平分线的性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，熟练掌握角平分线上的点到角两边的距离相等是解题的关键．

17、4 或 6 或$\frac{7}{3}$

【分析】

分 3 种情况：①当 $AB=AD$时，②当 $BA=BD$时，③当 $DA=DB$时，分别画出图形，利用勾股定理即可求解．

【详解】

如图所示：

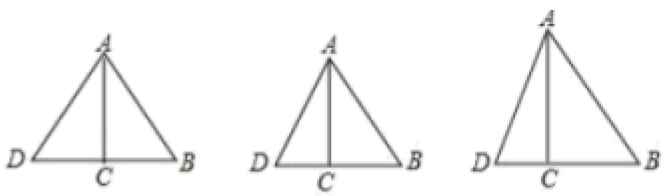



图1　　图2　　图3

在$Rt\Delta ABC$中，因为 $\angle ACB=90°$， $AC=8m$， $BC=6m$

$\therefore AB=10m$

①如图 1，当 $AB=AD$时， $CD=6m$

②如图 2，当 $BA=BD$ 时， $CD=4m$

③如图 3，当 $DA=DB$ 时，设 $AD=x$，则 $CD=x-6$

$\therefore x^2=(x-6)^2+8^2$，

$\therefore x=\dfrac{25}{3}$，

$\therefore CD=\dfrac{25}{3}-6=\dfrac{7}{3}$，

故答案是：4 或 6 或 $\dfrac{7}{3}$．

**【点睛】**

此题主要考查了勾股定理的应用以及等腰三角形的定义，熟练应用勾股定理，掌握分类讨论数学思想方法是解题关键．

三、解答题，共 62 分。

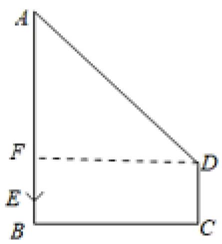
18、绳子长为 7.5 米

**【分析】**

设绳子长 $AD$ 为 $x$ 米，过点 $D$ 作 $DF\perp AB$ 于 $F$，构造直角三角形，根据勾股定理求解即可．

**【详解】**

解：设绳子长 $AD$ 为 $x$ 米，过点 $D$ 作 $DF\perp AB$ 于 $F$，如下图：




由题意得：$AB=x+1$ 米，$AF=x+1-4=x-3$ 米，$AD=x$ 米，$DF=BC=6$ 米

由勾股定理得：$(x-3)^2+6^2=x^2$

解得：$x=7.5$

答：绳子长为 7.5 米

**【点睛】**

此题考查了勾股定理的应用，解题的关键是构造直角三角形，利用勾股定理求解．

19、（1）见解析；（2）4.5

**【分析】**

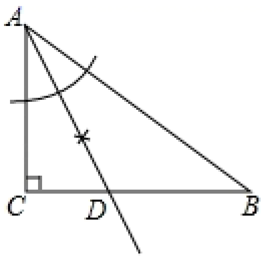
（1）如图，根据角平分线的性质作出∠$CAB$ 的角平分线：以点 $A$ 为圆心，任意长为半径作弧，分别与 $AB$、$AC$ 相交于一点，再以这两点分别为圆心，大于这两点的距离的一半为半径分别作弧，两弧相交于一点，连接点 $A$ 与该交点并延长交 $BC$ 于点 $D$ 即可；

（2）过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，根据角平分线的性质可得 $CD=DE$，设 $CD=DE=x$，根据

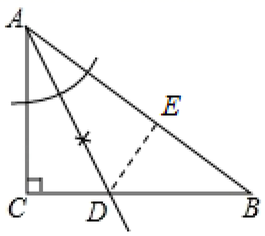
$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$ 列方程求解即可．

【详解】

解：（1）如图，点 $D$ 即为所求；




（2）如图，过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，




∵∠$C$＝90°，$AB$＝15，$BC$＝12，

∴在 $Rt$□$ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=9$，

∵$AD$ 是∠$CAB$ 的角平分线，$DE\perp AB$，∠$C$＝90°，

∴$CD$＝$DE$，

设 $CD$＝$DE$＝$x$，

∵ $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$，

∴$\frac{1}{2}AC\cdot CD+\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴$\frac{1}{2}\times 9x+\frac{1}{2}\times 15x=\frac{1}{2}\times 9\times 12$，

解得：$x=4.5$，

∴$CD$＝4.5．

【点睛】

本题考查作图－复杂作图，角平分线的性质定理以及勾股定理，解题的关键熟练角平分线的性质定理，属于中考常考题型．

20、（1）见解析；（2）$DE$＝6cm．

【分析】

（1）根据 $BD\perp$直线 $m$，$CE\perp$直线 $m$ 得∠$BDA$=∠$CEA$=90°，而∠$BAC$=90°，根据等角的余角相等得∠

$CAE=\angle ABD$，然后根据“$AAS$”可判断$\triangle ADB\cong\triangle CEA$；

（2）根据全等三角形的性质得出$AE=BD$，$AD=CE$，于是$DE=AE+AD=BD+CE$．

【详解】

解：（1）∵$BD\perp$直线$m$，$CE\perp$直线$m$，

∴$\angle BDA=\angle CEA=90°$，

∵$\angle BAC=90°$，

∴$\angle BAD+\angle CAE=90°$，

∵$\angle BAD+\angle ABD=90°$，

∴$\angle CAE=\angle ABD$，

∵在$\triangle ABD$和$\triangle CAE$中，

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE\\ \angle BDA=\angle CEA\\ AB=AC\end{cases},$$

∴$\triangle ABD\cong\triangle CAE$（$AAS$），

（2）∵$\triangle ABD\cong\triangle CAE$，

∴$AE=BD$，$AD=CE$，

∴$DE=AE+AD=BD+CE$，

∵$BD=2$cm，$CE=4$cm，

∴$DE=6$cm；

【点睛】

本题考查了全等三角形的判定与性质：判定三角形全等的方法有“$SSS$”、“$SAS$”、“$ASA$”、“$AAS$”；得出$\angle CAE=\angle ABD$是解题关键．

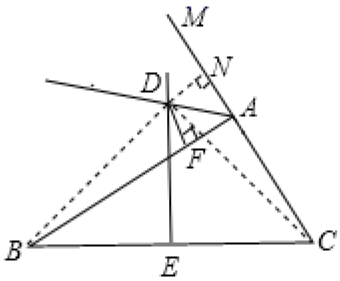
21、见解析．

【分析】

过$D$作$DN\perp AC$，垂足为$N$，连接$DB$、$DC$，推出$DN=DF$，$DB=DC$，根据$HL$证$\mathrm{Rt}\triangle DBF\cong\mathrm{Rt}\triangle DCN$，推出$BF=CN$，根据$HL$证$\mathrm{Rt}\triangle DFA\cong\mathrm{Rt}\triangle DNA$，推出$AN=AF$即可．

【详解】

证明：过$D$作$DN\perp AC$，垂足为$N$，连接$DB$、$DC$，




$\because AD$平分$\angle BAM$， $DE$垂直平分$BC$，

$\therefore DN=DF$， $DB=DC$，

又$\because DF\perp AB$， $DN\perp AC$，

$\therefore \angle DFB=\angle DNC=90^{\circ}$，

在$Rt\triangle DBF$和$Rt\triangle DCN$中

$\because \begin{cases} DB=DC \\ DF=DN \end{cases}$，

$\therefore Rt\triangle DBF\cong Rt\triangle DCN\left(HL\right)$

$\therefore BF=CN$，

在$Rt\triangle DFA$和$Rt\triangle DNA$中

$\because \begin{cases} AD=AD \\ DF=DN \end{cases}$，

$\therefore Rt\triangle DFA\cong Rt\triangle DNA\left(HL\right)$

$\therefore AN=AF$，

$\therefore BF=AC+AN=AC+AF$，

即$BF=AF+AC$．

【点睛】

本题考查了全等三角形的性质和判定，线段的垂直平分线定理，角平分线性质等知识点，会添加适当的辅助线，会利用中垂线的性质找出全等的条件是解决本题的关键．

22、（1）见解析；（2）$\angle AOB=120^{\circ}$；（3）见解析．

【分析】

（1）先证出$\angle ACN=\angle MCB$，再由$SAS$证明$\triangle ACN\cong\triangle MCB$，即可得出$AN=BM$；

（2）由$\triangle ACN\cong\triangle MCB$得出$\angle ANC=\angle MBC$，再证出$\angle MBC+\angle CAN=60^{\circ}$，即可得出结果；

（3）由$\triangle ACM$、$\triangle CBN$是等边三角形，可得$\angle ACM=\angle NCB=\angle PCQ=60^{\circ}$，根据（2）可知：$\angle PNC=\angle QBC$，则可证$\triangle PCN\cong\triangle QCB$，可得$PC=QC$，$\triangle PCQ$是等边三角形，得到$\angle PQC=\angle NCB=60^{\circ}$，可证$PQ//AB$．

【详解】

（1）证明：$\because \Delta ACM$、$CBN$是等边三角形，

$\therefore AC=CM$，$CN=CB$，$\angle ACM=\angle NCB=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ACN=\angle MCB$，

在$\Delta ACN$和$\Delta MCB$中$\begin{cases} AC=CM \\ \angle ACN=\angle MCB \\ CN=CB \end{cases}$，

$\therefore \Delta ACN\cong \Delta MCB(SAS)$，

$\therefore AN=BM$；

（2）解：$\because \Delta ACN\cong \Delta MCB$，

$\therefore \angle ANC=\angle MBC$，

$\because \angle ACN=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$，

$\therefore \angle ANC+\angle CAN=60^{\circ}$，

$\therefore \angle MBC+\angle CAN=60^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB=120^{\circ}$．

（3）$\because \triangle ACM$、□$CBN$是等边三角形，

$\therefore \angle ACM=\angle NCB=60^{\circ}$

$\therefore \angle PCQ=60^{\circ}$

$\therefore \angle ACM=\angle NCB=\angle PCQ=60^{\circ}$，

由（2）可知：$\angle PNC=\angle QBC$

在$\triangle PCN$和$\triangle QCB$中

$\begin{cases} \angle PCN=\angle QCB=60^{\circ} \\ CN=CB \\ \angle PNC=\angle QBC \end{cases}$

$\therefore$ □$PCN\cong$□$QCB$

$\therefore PC=QC$

$\therefore \triangle PCQ$是等边三角形

$\therefore \angle PQC=60^{\circ}$

$\therefore \angle PQC=\angle NCB=60^{\circ}$

$\therefore PQ//AB$．

【点睛】

本题考查了等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质；熟练掌握等边三角形的性质，证明三角形全等是解决问题的关键．

23、（1）①见解析；②见解析；（2）$DE=AD-BE$；（3）$DE=BE-AD$

【分析】

（1）①由$\angle ACB=90°$，得$\angle ACD+\angle BCE=90°$，而$AD\perp MN$于$D$，$BE\perp MN$于$E$，则$\angle ADC=\angle CEB=90°$，根据等角的余角相等得到$\angle ACD=\angle CBE$，即可证明$Rt\triangle ADC\cong Rt\triangle CEB$，②由①可得$AD=CE$，$DC=BE$，即可得到$DE=DC+CE=BE+AD$．

（2）根据等角的余角相等得到$\angle ACD=\angle CBE$，易得$\triangle ADC\cong\triangle CEB$，得到$AD=CE$，$DC=BE$，所以$DE=CE-CD=AD-BE$．

（3）$DE$、$AD$、$BE$具有的等量关系为：$DE=BE-AD$．证明的方法与（2）相同．

【详解】

证明：(1) ①$\because AD\perp MN$于$D$，$BE\perp MN$于$E$，

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$，

$\angle ACD+\angle DAC=90$，

$\therefore \angle DAC=\angle BCE$，

在$\triangle ADC$和$\triangle CEB$中

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle BEC\\ \angle DAC=\angle BCE\\ AC=BC\end{cases},$$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CEB$，

②$\because \triangle ADC\cong\triangle CEB$，

$\therefore AD=EC$，$CD=BE$，

$\because DC+CE=DE$，

$\therefore AD+EB=DE$，

（2）结论：$DE=AD-BE$，

$\because BE\perp EC$，$AD\perp CE$，

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$，

$\therefore \angle EBC+\angle BCE=90°$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ACE+\angle BCE=90°$,

$\therefore \angle ACD=\angle EBC$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$,

$\therefore AD=EC$，$CD=BE$,

$\therefore DE=EC-CD=AD-EB$,

（3）结论：$DE=BE-AD$,

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$,

$\because BE \perp MN$，$AD \perp MN$,

$\therefore \angle ADC=\angle DEC=90°$,

$\therefore \angle ACD+\angle DAC=90°$,

$\therefore \angle DAC=\angle BCE$,

在$\triangle ADC$和$\triangle CEB$中

$$\begin{cases} \angle ADC=\angle BEC \\ \angle DAC=\angle BCE \\ AC=BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$,

$\therefore AD=EC$，$CD=BE$,

$\therefore DE=CD-EC=EB-AD$.

【点睛】

本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等，对应点到旋转中心的距离相等，对应点与旋转中心的连线段所夹的角等于旋转角．也考查了直角三角形全等的判定与性质．