

第4章 一元一次方程

一、方程和一元一次方程的概念

1) 方程：含有未知数的等式。

如何判断一个式子是不是方程，只需看两点：一是等式；二是含有未知数。

例： $3x=5y+2$ ； $100x=200$ ； $3x^2+2y=3$ 等

2) 一元一次方程：只含有一个未知数（元，隐含未知数系数不为0），未知数的次数是1（次），等号两边都是整式（整式：未知数的积，而非商）的方程。

如何判断一元一次方程：①整式方程；②只含一个未知数，且未知数的系数不为0；③未知数的次数为1。

例： $\frac{x}{2}+1=\frac{1}{3}$ ； $\frac{2}{x}+1=\frac{1}{3}$ ； $3m-2n=5$ ； $3m=5$ ； $6x^2-12=0$

二、方程的解与解方程

1) 方程的解：使方程两边相等的未知数的值

2) 解方程：求方程的解的过程

三、等式的性质

1) 等式两边同加或同减一个数（或式子），等式仍然成立。即：若 $a=b$ ，则 $a \pm c = b \pm c$ （注：此处字母可表示一个数字，也可表示一个式子）

2) 等式两边同乘一个数（或式子），或同除一个不为零的数（式子），等式仍然成立。

即：若 $a=b$ ，则 $\begin{cases} a \times c = b \times c \\ a \div c = b \div c, c \neq 0 \end{cases}$ （此处字母可表示数字，也可表示式子）

例： $3x+7=2-2x$ $3x+7+2x=2-2x+2x$ $3x+7+2x-7=2-2x+2x-7$ $5x=-5$ $5x \div 5 = -5 \div 5$ $x=-1$

3) 其他性质：①对称性：若 $a=b$ ，则 $b=a$ ；②传递性：若 $a=b$ ， $b=c$ ，则 $a=c$ 。

四、合并同类项解一元一次方程

（1）合并同类项：将同类项合并在一起的过程

方法：1) 合并同类项；2) 系数化为1

五、移项解一元一次方程

（1）移项

例： $2x-3=4x-7$

$2x-3+3=4x-7+3$ （利用等式的性质）（左边的-3变到右边变成了+3）

$2x=4x-4$

$2x-4x=4x-4-4x$ （利用等式的性质）（右边的4x变到左边变成了-4x）

$$-2x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-2}$$

$$x=2$$

①我们发现，利用等式两边同加或同减一个数（式子），等式不变的性质，可以将方程化为同类项在同一边的情形（即未知数在一边，数值在另一边）。同时，我们还发现，在这个化简的过程中，实际就是把一项移到了另一边，并变号的过程。

②移项：把等式一边的项变号后移动到另一边的过程。（注：整体移动，整体变号）

（2）解一元一次方程的步骤：①移项（将同类项移动到同一侧）；②合并同类项；③将未知数的系数化为 1。

例： $2x-3=4x-7$

$$2x-4x=-7+3 \quad \text{移项}$$

$$-2x=-4 \quad \text{合并同类项}$$

$$x=2 \quad \text{未知数系数化为 1}$$

六、去括号

1) 去括号：在解方程的过程中，将方程中含有的括号去掉的过程。

2) 方法：与整式的运算中去括号的过程一样（注：整体去括号）

3) 顺序：先去小括号，再去中括号，最后去大括号（由内向外，有时为了简化计算，可视情况而定）

4) 去括号原则：括号前是“-”号时，去括号后，括号里面的每一项都要变号。

七、去分母

1) 两边同乘最小公倍数，以去分母。

例： $\frac{y+2}{4} - \frac{2y-1}{6} = 1.$

这样的方程中有些系数是分数，如果能化去分母，把系数化成整数，则可以使解方程中的计算更简便些。

利用等式性质：等式两边同时乘一个数，结果仍相等。在这个方程中，乘分母的最小公倍数为 12，方程两边同乘 12，得：

$$12\left(\frac{y+2}{4} - \frac{2y-1}{6}\right) = 1 \times 12.$$

$$3(y+2) - 2(2y-1) = 12,$$

$$3y+6 - 4y+2 = 12,$$

$$-y = 4,$$

$$y = -4.$$

2) 步骤: ①确定最小公倍数; ②两边同乘最小公倍数, 去分母。

3) 去分母原则: 等式两边同乘分母的最小公倍数, 注意必须保证每一项都乘最小公倍数 (包括整数项)

八、列方程解应用题的步骤:

①审: 审题, 分析题中已知什么, 求什么, 明确各数量之间关系

②设: 设未知数 (一般求什么, 就设什么为 x)

③找: 找出能够表示应用题全部意义的一个相等关系

④列: 根据这个相等关系列出需要的代数式, 进而列出方程

⑤解: 解所列出的方程, 求出未知数的值

⑥答: 检验所求解是否符合题意, 写出答案 (包括单位名称)

九、一元一次方程的应用

一元一次方程解应用题的类型有:

(1) 探索规律型问题;

(2) 数字问题;

(3) 销售问题 (利润=售价-进价, 利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\%$;

(4) 工程问题 (①工作量=人均效率×人数×时间; ②如果一件工作分几个阶段完成, 那么各阶段的工作量的和=工作总量);

(5) 行程问题 (路程=速度×时间);

(6) 等值变换问题;

(7) 和, 差, 倍, 分问题;

(8) 分配问题;

(9) 比赛积分问题;

(10) 水流航行问题 (顺水速度=静水速度+水流速度; 逆水速度=静水速度-水流速度)。