第 2 章 有理数

一、正数、负数

像+3、+1.5、$+\frac{1}{2}$、+584 等大于 0 的数，叫做**正数**；像－3、－1.5、$-\frac{1}{2}$、－584 等在正数前面加"－"号的数，叫做**负数**．

要点分析：

（1）一个数前面的"+""-"是这个数的性质符号，"+"常省略，但"-"不能省略.

（2）用正数和负数表示具有相反意义的量时，哪种为正可任意选择，但习惯把"前进、上升"等规定为正，而把"后退、下降"等规定为负．

（3）0 既不是正数也不是负数，它是正数和负数的"分水岭"．

二、有理数与无理数

1：有理数的分类

（1）按整数、分数的关系分类：（2）按正数、负数与 0 的关系分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

要点分析：

（1）有理数都可以写成分数的形式，整数也可以看作是分母为 1 的数.

（2）分数与有限小数、无限循环小数可以互化，所以有限小数和无限循环小数可看作分数，但无限不循环小数不是分数，例如 π．

（3）正数和零统称为非负数；负数和零统称为非正数；正整数、0、负整数统称整数．

2：有理数

我们把能够写成分数形式 $\frac{m}{n}$（m,n 是整数，n≠0）的数叫做**有理数**．

要点分析：

（1）有限小数和循环小数都可以化为分数，他们都是有理数．

（2）所有整数都可以写成分母是 1 的分数，因此可以理解为整数和分数统称为有理数．

3：无理数

1、定义：

无限不循环小数叫做无理数．

要点分析：

（1）无理数的特征：无理数的小数部分位数无限．无理数的小数部分不循环，不能表示成分数的形式．

（2）目前常见的无理数有两种形式：①含π类．②看似循环而实质不循环的数，如：1.313113111……．

2、有理数与无理数的区别

（1）无理数是无限不循环小数，有理数是有限小数或无限循环小数．

（2）任何一个有理数都可以化为分数的形式，而无理数则不能．

4：循环小数化分数

1、定义：

如果一个无限小数的各数位上的数字，从小数部分的某一位起，按一定顺序不断重复出现，那么这样的小数叫做无限循环小数，简称循环小数，其中重复出现的一个或几个数字叫做它的一个循环节．

2、纯循环小数

从小数点后面第一位起就开始循环的小数，叫做纯循环小数．例如：0．666…、$0.\dot{2}$．．纯循环小数化为分数的方法是：分子是一个循环节的数字组成的数；分母的各位数字都是9，9的个数等于一个循环节的位数．

例如$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$0.\dot{1}8\dot{9}=\frac{189}{999}=\frac{7}{37}$．

3、混循环小数

如果小数点后面的开头几位不循环，到后面的某一位才开始循环，这样的小数叫做混循环小数．例如：$0.1\dot{2}$、0．3456456…．混循环小数化为分数的方法是：分子是不循环部分和一个循环节的数字组成的数减去不循环部分的数字组成的数所得的差，分母就是按一个循环节的位数写几个9，再在后面按不循环部分的位数添写几个0组成的数．

例如$0.9\dot{1}\dot{8}=\frac{918-9}{990}=\frac{101}{110}$，$0.23\dot{9}=\frac{239-23}{900}=\frac{6}{25}$，$0.35\dot{1}3\dot{5}=\frac{35135-35}{99900}=\frac{35100}{99900}=\frac{13}{37}$．

要点分析：

（1）任何一个循环小数都可化为分数．

（2）混循环小数化分数也可以先化为纯循环小数，然后再化为分数．

三、数轴

1：数轴

定义：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴．

要点分析：

（1）定义中的"规定"二字是说原点的选定、正方向的取向、单位长度大小的确定，都是根据需要"规定"的．通常，习惯取向右为正方向．

（2）长度单位与单位长度是不同的，单位长度是根据需要选取的代表"1"的线段，而长度单位是为度量线段的长度而制定的单位．有 km、m、dm、cm 等．

2：数轴的画法

（1）画一条直线（通常画成水平位置）；

（2）在这条直线上取一点作为原点，这点表示 0；

（3）规定直线上向右为正方向，画上箭头；

（4）再选取适当的长度，从原点向右每隔一个单位长度取一点，依次标上 1，2，3，…从原点向左，每隔一个单位长度取一点，依次标上-1，-2，-3，…

要点分析：

（1）原点的位置、单位长度的大小可根据实际情况适当选取．

（2）确定单位长度时根据实际情况，有时也可以每隔两个（或更多的）单位长度取一点．

3：数轴与有理数的关系

任何一个有理数都可以用数轴上的点来表示，但数轴上的点不都表示有理数，还可以表示其他数，比如π．

要点分析：

（1）一般地，数轴上原点右边的点表示正数，左边的点表示负数；反过来也对，即正数用数轴上原点右边的点表示，负数用原点左边的点表示，零用原点表示．

（2）一般地，在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大．

四、相反数

1、定义：如果两个数只有符号不同，那么称其中一个数为另一个数的相反数．特别地，0 的相反数是 0．

要点分析：

（1）"只"字是说仅仅是符号不同，其它部分完全相同．

（2）"0 的相反数是 0"是相反数定义的一部分，不能漏掉．

（3）相反数是成对出现的，单独一个数不能说是相反数．

（4）求一个数的相反数，只要在它的前面添上"-"号即可．

2、性质：

（1）互为相反数的两数的点分别位于原点的两旁，且与原点的距离相等（这两个点关于原点对称）．

（2）互为相反数的两数和为 0．

五、多重符号的化简

多重符号的化简，由数字前面“-”号的个数来确定，若有偶数个时，化简结果为正，如-{-[-(-4)]}=4 ；若有奇数个时，化简结果为负，如-{+[-(-4)]}=-4 ．

要点分析：

（1）在一个数的前面添上一个“＋”，仍然与原数相同，如＋5＝5，＋（－5）＝－5．

（2）在一个数的前面添上一个“－”，就成为原数的相反数．如－（－3）就是－3 的相反数，因此，－（－3）＝3．

六、绝对值

1、定义：在数轴上，一个数所对应的点与原点的距离叫做这个数的绝对值，例如+2 的绝对值等于 2，记作|+2|=2；-3 的绝对值等于 3，记作|-3|=3．

要点分析：

（1）绝对值的代数意义：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0．即对于任何有理数 a 都有：

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

（2）绝对值的几何意义：一个数的绝对值就是表示这个数的点到原点的距离，离原点的距离越远，绝对值越大；离原点的距离越近，绝对值越小．

（3）一个有理数是由符号和绝对值两个方面来确定的．

2、性质：

（1）0 除外，绝对值为一正数的数有两个，它们互为相反数．

（2）互为相反数的两个数（0 除外）的绝对值相等.

（3）绝对值具有非负性，即任何一个数的绝对值总是正数或 0．

七、有理数的大小比较

1、数轴法：在数轴上表示出这两个有理数，左边的数总比右边的数小．如：a 与 b 在数轴上的位置如图所示，则 a＜b．

2、法则比较法：

两个数比较大小，按数的性质符号分类，情况如下：

两数同号	同为正号：绝对值大的数大
	同为负号：绝对值大的反而小
两数异号	正数大于负数
一数为 0	正数与 0：正数大于 0
	负数与 0：负数小于 0

要点分析：

利用绝对值比较两个负数的大小的步骤：（1）分别计算两数的绝对值；（2）比较绝对值的大小；（3）判定两数的大小．

3、作差法：设 a、b 为任意数，若 a-b＞0，则 a＞b；若 a-b＝0，则 a＝b；若 a-b＜0，a＜b；反之成立．

4、求商法：设 a、b 为任意正数，若 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若 $\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$；反之也成立．若 a、b 为任意负数，则与上述结论相反．

5．倒数比较法：如果两个数都大于零，那么倒数大的反而小．

八、有理数的运算

1、法则：

（1）加法法则：①同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加．②绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值．③一个数同 0 相加，仍得这个数．

（2）减法法则：减去一个数，等于加这个数的相反数．即 $a-b=a+(-b)$ ．

（3）乘法法则：①两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘．②任何数同 0 相乘，都得 0．

（4）除法法则：除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数．即 $a\div b=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq0)$ ．

（5）乘方运算的符号法则：①负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数；②正数的任何次幂都是正数，0 的任何非零次幂都是 0．

(6)有理数的混合运算顺序：①先乘方，再乘除，最后加减；②同级运算，从左到右进行；③如有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号依次进行．

要点诠释：“奇负偶正”口诀的应用：

（1）多重负号的化简，这里奇偶指的是“－”号的个数，例如：－[－（－3）]=－3，－[+（－3）]=3．

（2）有理数乘法，当多个非零因数相乘时，这里奇偶指的是负因数的个数，正负指结果中积的符号，例如：（－3）×（－2）×（－6）=－36，而（－3）×（－2）×6=36．

（3）有理数乘方，这里奇偶指的是指数，当底数为负数时，指数为奇数，则幂为负；指数为偶数，

则幂为正，例如：$(-3)^2=9$，$(-3)^3=-27$．

2．运算律：

（1）交换律: ①加法交换律:a+b=b+a；②乘法交换律:ab=ba；

（2）结合律: ①加法结合律：(a+b)+c=a+(b+c)；②乘法结合律：（ab）c=a(bc)

（3）分配律：a(b+c)=ab+ac

九、科学记数法、近似数及精确度

1、科学记数法：把一个大于 10 的数表示成$a\times10^n$的形式（其中$1\le|a|<10$，n是正整数），此种记法叫做科学记数法．例如：200 000=2×10^5．

2、近似数：接近准确数而不等于准确数的数，叫做这个精确数的近似数或近似值.如长江的长约为 6300 ㎞，这里的 6300 ㎞就是近似数.

要点诠释：一般采用四舍五入法取近似数，只要看要保留位数的下一位是舍还是入.

3、精确度：一个近似数四舍五入到哪一位，就称这个数精确到哪一位，精确到的这一位也叫做这个近似数的精确度.

要点诠释：

（1）精确度是指近似数与准确数的接近程度.

（2）精确度有两种形式：①精确到哪一位．②保留几个有效数字．这两种的形式的意义不一样，一般来说精确到哪一位可以表示误差绝对值的大小，例如精确到 0.1 米，说明结果与实际数相差不超过 0.05 米，而有效数字往往用来比较几个近似数哪个更精确些.