

2022-2023 学年八年级下册数学检测卷

第10章《分式》

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____

注意事项：

本试卷满分 100 分，试题共 24 题，选择 10 道、填空 8 道、解答 6 道。答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、班级等信息填写在试卷规定的位置。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列分式中是最简分式的是（ ）

A. $\frac{2x+4}{6x+8}$

B. $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

C. $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

D. $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

2. 若 $\frac{6}{2x+3}$ 表示一个整数，则整数 x 可取值的个数是（ ）

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 8 个

3. 下列各式正确的是（ ）

A. $\frac{-a+b}{-a-b} = \frac{a+b}{a-b}$

B. $\frac{-a+b}{-a-b} = \frac{-a+b}{a+b}$

C. $\frac{-a+b}{-a-b} = \frac{a-b}{a+b}$

D. $\frac{-a+b}{-a-b} = \frac{a-b}{-a-b}$

4. 如果把分式 $\frac{x^2}{x+y}$ 中 x 、 y 的值都变为原来的 3 倍，则分式的值（ ）

A. 变为原来的 9 倍

B. 变为原来的 3 倍

C. 不变

D. 变为原来的 $\frac{1}{3}$

5. 若 a 为正整数，则化简 $\frac{a+1}{a^2-a} \div \frac{a+1}{a^2-2a+1}$ 的结果可以是（ ）

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

6. 已知 $x+y=4$ ， $x-y=1$ ，则式子 $(x-y+\frac{4xy}{x-y})(x+y-\frac{4xy}{x+y})$ 的值是（ ）

A. 12

B. 8

C. 4

D. 3

7. 随着快递业务的增加，某快递公司为快递员更换了快捷的交通工具，现在平均每人每周比原来多投递 80 件，若快递公司的快递员人数不变，公司投递快件的能力由每周 3000 件提高到 4200 件，求原来平均每人每周投递快件多少件？设原来平均每人每周投递快件 x 件，根据题意可列方程为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

8. 已知 a, b 为实数，则代数式 $a^2 + b^2 - 2a + 4b + 7$ 的值为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

9. 式子 $\frac{1}{x^2 + 1}$ 的值不可能为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. 3

10. 已知 a, b 为实数且满足 $a^2 + b^2 = 1$ ， $\sin \theta = a$ ， $\cos \theta = b$ ，设 θ 为锐角，则 θ 的度数为

- ①若 $\theta = 30^\circ$ 时，
②若 $\theta = 45^\circ$ 时，
③若 $\theta = 60^\circ$ 时，
④若 $\theta = 90^\circ$ 时，则

则上述四个结论正确的有 $\quad$ 个.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）请把答案直接填写在横线上

11. 如果分式 $\frac{1}{x-1}$ 的值为 0，则 x 的值是_____。

12. 下列分式的变形中：① $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ② $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ；③ $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ；④ $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ，
错误的是_____（填序号）

13. 若 a, b 为实数，且 $a^2 + b^2 = 1$ ，则 $\sin \theta$ 的值是_____。

14. 已知 a, b 为实数，则代数式 $a^2 + b^2 - 2a + 4b + 7$ 的值为_____。

15. 某地积极响应“把绿水青山变成金山银山，用绿色杠杆撬动经济转型”发展理念，开展荒山绿化，打造美好家园，促进旅游发展. 某工程队承接了 90 万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际工作时每天的工作效率比原计划提高了 $\frac{1}{3}$ ，结果提前 30 天完成了任务. 设原计划每天绿化的面积为 x 万平方米，则所列方程为_____。

16. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2}$ 的解为非负数，则 x 的取值范围为_____。

17. 对于任意非零实数 a, b ，规定 $a \oplus b = \frac{a+b}{ab}$ ，例如： $2 \oplus 3 = \frac{2+3}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$ ，则 $3 \oplus 2 = \frac{3+2}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$ ，
或“ $\oplus$ ”或“ $\ominus$ ”，若 $a \oplus b = \frac{a+b}{ab}$ ，则 $a \ominus b = \frac{a-b}{ab}$ 。

18. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

(1) 若该方程有增根, 则增根是_____

(2) 若该方程的解大于 1, 则 a 的取值范围是_____

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 46 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 解分式方程

(1)

(2)

20. 先化简, 再求值: $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$, 其中 $x=3$, 其中

21. 阅读下列一段文字, 并根据规律解题:

_____。

试计算

22. 关于 x 的方程 $\frac{a}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的解为 $x=2$, $x=3$; (可变形为 $\frac{a}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$ 的解
为 $x=2$, $x=3$; 的解为 $x=2$, $x=3$; 的解为: $x=2$, $x=3$;

(1) 请你根据上述方程与解的特征，比较关于 x 的方程 $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{c}{x-2}$ 与它们的关系，猜想它的解是什么？

(2) 请总结上面的结论，并求下列方程的解．

① $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2}$ ；

② $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x-3}$ ．

23. 已知，关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{c}{x-2}$ ．

(1) 当 $a=1, b=1$ 时，求分式方程的解；

(2) 当 $a=1, b=1$ 时，求 c 为何值时分式方程无解；

(3) 若 $a=1, b=1$ ，且 c 为正整数，当分式方程的解为整数时，求 c 的值。

24. 为了“迎国庆，向祖国母亲献礼”，某建筑公司承建了修筑一段公路的任务，指派甲、乙两队合作，18天可以完成，共需施工费 126000 元；如果甲、乙两队单独完成此项工程，乙队所用时间是甲队的 1.5 倍，乙队每天的施工费比甲队每天的施工费少 1000 元．

(1) 甲、乙两队单独完成此项工程，各需多少天？

(2) 为了尽快完成这项工程任务，甲、乙两队通过技术革新提高了速度，同时，甲队每天的施工费提高了 $\frac{1}{3}$ ，乙队每天的施工费提高了 $\frac{1}{4}$ ，已知两队合作 12 天后，由甲队再单独做 2 天就完成了这项工程任务，且所需施工费比计划少了 21200 元．

①分别求出甲、乙两队每天的施工费用；

②求 a 的值。

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. D

【分析】根据最简分式的定义分别对每一项进行分析，即可得出答案.

【解析】A. $\frac{2x^2y}{x^2y^2}$ ，不符合题意；

B. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ ，不符合题意；

C. $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ ，不符合题意；

D. $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ 是最简分式，符合题意；

故选：D.

2. C

【分析】由 $\frac{x-1}{x+1}$ 表示一个整数且 x 为整数，则 $x+1=1$ 或 $x+1=2$ 或 $x+1=3$ 或 $x+1=4$ ，进而求出 x 的值.

【解析】 $\frac{x-1}{x+1}$ 表示一个整数且 x 是整数，

$x+1=1$ 或 $x+1=2$ 或 $x+1=3$ 或 $x+1=4$.

当 $x+1=1$ ，则 $x=0$.

当 $x+1=2$ ，则 $x=1$.

当 $x+1=3$ ，则 $x=2$ （不合题意，故舍去）.

当 $x+1=4$ ，则 $x=3$ （不合题意，故舍去）.

当 $x+1=5$ ，则 $x=4$.

当 $x+1=6$ ，则 $x=5$.

当 $x+1=7$ ，则 $x=6$ （不合题意，故舍去）.

当 $x+1=8$ ，则 $x=7$ （不合题意，故舍去）.

综上，整数 x 的取值有 -1 、 1 、 0 、 4 、 5 . 故选：C.

3. C

【分析】根据分式的基本性质化简即可.

【解析】

，故选：C.

4. B

【分析】根据分式的基本性质即可求出答案.

【解析】，故选：B.

5. B

【分析】将原式中分母进行因式分解，然后把除法转化为乘法进行计算，最后根据 a 为正整数进行判断.

【解析】原式

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2 - 1}{a^2 + a} \cdot \frac{a}{a - 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a - 1)}{a(a + 1)} \cdot \frac{a}{a - 1} \\ &= \frac{a - 1}{a} \end{aligned}$$

又 a 为正整数，

$$\frac{a - 1}{a}$$

即 a = 2 且 a = 3 时，

选项 A、C、D 均不符合题意，

当 a = 2 时，

原式 = $\frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$ ，故选项 B 符合题意，

故选：B.

6. C

【分析】先将原式化简为 $\frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$ ，再代入计算即可.

【解析】当 a = 2、a = 3 时，

原式

，故选：C.

7. D

【分析】设原来平均每人每周投递快件 x 件，则更换了快捷的交通工具后平均每人每周投递快件 $2x$ 件，根据快递公司的快递员人数不变且公司投递快件的能力由每周 3000 件提高到 4200 件，即可得出关于 x 的分式方程，此题得解．

【解析】设原来平均每人每周投递快件 x 件，则更换了快捷的交通工具后平均每人每周投递快件 $2x$ 件，

依题意得：
$$\frac{3000}{x} = \frac{4200}{2x}.$$

故选：D.

8. D

【分析】已知等式左边通分并利用同分母分式的加法法则计算，整理得到 $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$ ，代入原式计算即可得到结果．

【解析】 $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{(a - 1)(a + 1)}{a^2 + 1}$ ，即 $\frac{a - 1}{a + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$ ，
则原式 $= \frac{a - 1}{a + 1} \cdot \frac{a + 1}{a + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$ ，

故选：D.

9. B

【分析】 $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$ 中， $x^2 + 1 \neq 0$ ，所以 $x^2 - 1 = 0$ ，解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ ，当 $x = 1$ 或 $x = -1$ 时，式子值为 0 不成立．

【解析】

当 $x = 1$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$ ，

而 $x = -1$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$ ，
所以 $x = 1$ 或 $x = -1$ 时， $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$ ，
不能等于 0，

故选：B

10. B

- 【分析】①根据分式的加法法则计算即可得结论；
②根据分式的加法法则计算即可得结论；
③根据分式的加法法则计算即可得结论；
④根据方式的乘法运算法则计算，再进行分类讨论即可得结论．

【解析】 $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，

①当 $a > 0, b > 0$ 时， $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ，故①正确；

②当 $a < 0, b < 0$ 时， $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
当 $a > 0, b > 0$ 时， $\frac{a}{b} > 0$ ，或 $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
或 $\frac{a}{b} > 0$ ，故②错误；

③当 $a = 0$ 时， $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a}{b}$ 可能同号，也可能异号，
或 $\frac{a}{b} > 0$ ，而 $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
或 $\frac{a}{b} > 0$ ，故③错误；

④ $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
原式 $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
， $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
， $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
， $\frac{a}{b} > 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ ， $\frac{a}{b} = 0$ ， $\frac{a}{b}$ 的符号由 a 和 b 的符号决定，
，故④正确。

故选：B。

二、填空题（共 8 小题）

11.

【分析】分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零。

【解析】分式 $\frac{a}{b}$ 的值为 0，

且 $b \neq 0$ 。

解得： $a = 0$ 。

故答案为： $a = 0$ 。

12.

【分析】根据分式的基本性质即可求出答案.

【解析】③原式 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ，故③错误；

④原式 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ，故④错误；

故答案为：③④.

13.

【分析】已知等式变形后，代入原式计算即可得到结果.

【解析】由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，得到 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ，

则原式 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ ，

故答案为：1.

14.

【分析】变形已知，整体代入求出结果.

【解析】 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a-b}{a+b}$ ，
 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a-b}{a+b}$ ，

故答案为： $\frac{a-b}{a+b}$.

15.

【分析】设原计划每天绿化的面积为 x 万平方米，则实际每天绿化的面积为 $\frac{1}{1.2}x$ 万平方米，根据
工作时间 = 工作总量 ÷ 工作效率，结合实际比原计划提前 30 天完成了任务，即可得出关于 x 的分式方
程，此题得解.

【解析】设原计划每天绿化的面积为 x 万平方米，则实际每天绿化的面积为 $\frac{1}{1.2}x$ 万平方米，

依题意得： $\frac{120}{x} - \frac{120}{\frac{1}{1.2}x} = 30$.

故答案为： $\frac{120}{x} - \frac{120}{\frac{1}{1.2}x} = 30$.

16.

【分析】先解关于 x 的方程，再根据解为非负数得出关于 a 的不等式，解得 a 的取值范围，然后根据分式有意义的条件，得出该范围内 a 不能取的值，即可得出答案．

【解析】方程两边同时乘以 $x-1$ 得：

$$a,$$

解得： $x = \frac{a+1}{a-1}$ ，

x 解为非负数，

$$\frac{a+1}{a-1} \geq 0,$$

解得： $a \leq -1$ 或 $a > 1$ ，

$$a \neq 1,$$

$$a \neq -1,$$

$$a \neq 0,$$

$$a \neq 2.$$

故答案为： $a \leq -1$ 且 $a > 1$ 且 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$ ．

17.

【分析】利用题中的新定义判断，求出方程的解即可得到结果．

【解析】根据题意得： $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ ，

$$x = 2;$$

根据题意得： $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ ，

去分母得： $1 = \frac{1}{3}x$ ，

解得： $x = 3$ ，

经检验 $x = 3$ 是分式方程的解．

故答案为： $x = 2$ ； $x = 3$ ．

18.

【分析】（1）根据分式方程有增根，得到最简公分母为 0，即可求出 a 的值；

（2）分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x ，根据解为负数求出 a 的范围即可．

【解析】（1）这个方程有增根，

$$x = 0,$$

$$x = 1.$$

故答案为： $a = 2$ ；

(2) 分式方程去分母得：_____，

去括号合并得：_____，即_____，

根据题意得：_____，且_____，

解得：_____，且_____。

故答案为：_____，且_____。

三、解答题（共 6 小题）

19.

【分析】(1) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解；

(2) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解。

【解析】(1) 去分母得：_____，

解得：_____，

经检验_____是分式方程的解；

(2) 去分母得：_____，

解得：_____，

经检验_____是增根，分式方程无解。

20.

【分析】根据分式的减法和除法可以化简题目中的式子，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题。

【解析】

_____，

_____，

_____，

_____，

_____，

当_____时，原式_____。

21.

【分析】由题意可知 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，从而可求得答案；
按照上述方法将各分式进行拆项裂项，从而可求得答案．

【解析】

．

故答案为： ．

．

22．

【分析】（1）由题所给式子规律，即可求解；

（2）①将所求方程变形为 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，即可得 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，求出 x 即可；

②将所求方程可变形为 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，可得 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，解出 x 即可．

【解析】（1）由已知可得，方程 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 的解为 $x = yz$ 或 $x = yz$ ；

（2）① $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 可变形为 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，

方程的解为 $x = yz$ ， $x = yz$ ，

或 $x = yz$ ；

② $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 可变形为 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，

方程的解为 $x = yz$ 或 $x = yz$ ，

或 $x = yz$ ．

23．

【分析】(1) 将 x 和 y 的值代入分式方程，解分式方程即可；

(2) 把 x 的值代入分式方程，分式方程去分母后化为整式方程，分类讨论 x 的值，使分式方程无解即可；

(3) 将 y 代入方程，分式方程去分母化为整式方程，表示出整式方程的解，由解为整数和 x 为正整数确定 x 的取值．

【解析】

(1) 把 $x=1$ ， $y=2$ 代入分式方程 $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ 中，得

方程两边同时乘以 $3(x+y)$ ，

检验：把 $x=1$ 代入 $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ ，所以原分式方程的解是 $x=1$ ．

答：分式方程的解是 $x=1$ ．

(2) 把 $x=2$ 代入分式方程 $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ 得

方程两边同时乘以 $3(x+y)$ ，

①当 $y=1$ 时，即 $x=2$ ，方程无解；

②当 $y=2$ 时，

$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ 时，分式方程无解，即 $x=2$ ， $y=2$ 不存在；

$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ 时，分式方程无解，即 $x=2$ ， $y=2$ ．

综上所述， $x=1$ 或 $x=2$ 时，分式方程 $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ 无解．

(3) 把 $y=2$ 代入分式方程 $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$ ，得：

方程两边同时乘以 $\frac{1}{x-1}$ ，

整理得：

$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ ，且 x 为正整数， $x+1$ 为整数

$x-1$ 必为 195 的因数，

$x-1$ 的因数有 1、3、5、13、15、39、65、195

但 1、3、5 小于 11，不合题意，故 $x-1$ 可以取 13、15、39、65、195 这五个数。

对应地，方程的解 x 为 3、5、13、15、17

由于 $x=1$ 为分式方程的增根，故应舍去。

对应地， x 只可以取 3、29、55、185

所以满足条件的 x 可取 3、29、55、185 这四个数。

24.

【分析】(1) 设甲公司单独完成此项工程需 x 天，直接利用甲、乙两公司合做，18 天可以完成，利用两公司合作每天完成总量的 $\frac{1}{18}$ ，进而列出方程求出答案；

(2) ①设甲公司技术革新前每天的施工费用是 a 元，那么乙公司技术革新前每天的施工费用是 b 元，可列出方程，解方程即可；

②根据①可分别表示甲、乙公司技术革新后每天的施工费用，于是可列出方程，解方程即可。

【解析】(1) 设甲公司单独完成此项工程需 x 天，

根据题意可得： $\frac{1}{x} + \frac{1}{15} = \frac{1}{18}$ ，

解得： $x = 30$ ，

检验，知 $x = 30$ 符合题意，

，

答：甲公司单独完成此项工程需 30 天，乙公司单独完成此项工程需 45 天；

(2) ①设甲公司技术革新前每天的施工费用是 a 元，那么乙公司技术革新前每天的施工费用是 b 元，

则由题意可得： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{18}$ ，

解得： $\begin{cases} x=4000 \\ y=3000 \end{cases}$ ，

答：技术革新前，甲公司每天的施工费用是 4000 元，乙公司每天的施工费用是 3000 元；

② $\begin{cases} x=4000+a \\ y=3000 \end{cases}$ ，

解得： $a=10$ ．

答： a 的值是 10．